УДК 512.552.12

КІЛЬЦЯ З МАЙЖЕ ІНВАРІАНТНИМИ ЕЛЕМЕНТАРНИМИ ДІЛЬНИКАМИ

М. Я. Комарницький

Komarnitskii M.Ya. On almost invariant elementary divisor rings. We introduced the almost invariant elementary divisor rings and found some characterization of this rings. We proved the criterion for simple rings to by elementary divisor rings.

Нехай A – асоціативне кільце з $1 \neq 0$. Якщо для матриці $C = (c_{ij})$, $c_{ij} \in A$, $i = 1,\ldots,m$; $j = 1,\ldots,n$ існують такі зворотні матриці $P \in \mathcal{U}(A_m)$ і $Q \in \mathcal{U}(A_n)$, що

$$PCQ = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & d_k & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

і $Ad_{i+1}A \subseteq Ad_i \cap d_iA$ для кожного $i = 1,\ldots,k-1$, то кажуть, що матриця A володіє діагональною редукцією.

Якщо над кільцем A кожна прямокутна матриця володіє діагональною редукцією, то це кільце називається кільцем елементарних дільників [1]. Кільця, над якими діагональною редукцією володіють однорядкові матриці, називаються ермітовими справа, а кільця, над якими діагональною редукцією володіють одностовпчикові матриці, називаються ермітовими зліва [1]. У літературі зустрічаються й інші означення кілець елементарних дільників. Наприклад, П.М. Кон у праці [2] вимагає в діагональній редукції, щоб для кожного $i < k$ існував такий інваріантний елемент c_i, що $a_{i+1}A \subseteq c_iA \subseteq a_iA$. Порівняння цих двох означень показує, що відмінності в різних поняттях діагональної редукції можуть виникати за рахунок властивостей діагональних елементів. На цьому зауваженні базується і наше означення кільця з майже інваріантними елементарними дільниками [3], [4]. Будемо говорити, що діагональна редукція (1) матриці C є майже інваріантною діагональною редукцією, якщо елементи $d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}$, за виключенням, можливо, елемента d_k, є інваріантними. Наприклад, матриця $C \in A_2$ може мати лише три можливі діагональні редукції:

1991 *Mathematics Subject Classification.* 13F07, 13G05, 16W60.

1) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, де a — довільний елемент з A;

2) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, де a — інваріантний, $a|_l b, a|_r b$ і b не є інваріантним;

3) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, де a і b — інваріантні.

Наступний результат є аналогом відповідної теореми Капланського [1], доведення якої володіє певним недоліком, оскільки в доведенні неявно використовується повна подільність довільного ненульового елемента на себе.

Теорема 1. *Ермітове кільце A є кільцем з майже інваріантними елементарними дільниками тоді і тільки тоді, коли будь-яка 2×2 матриця еквівалентна матриці вигляду*

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

де e – інваріантний елемент, який є лівим (або правим) дільником елемента d, або ж $d = 0$, а e – довільний елемент.

Доведення. Необхідність умови очевидним чином випливає з означень. Доведемо достатність сформульованої умови. Нехай A – ермітове кільце і нехай кожна 2×2 матриця володіє майже інваріантною діагональною редукцією. Розглянемо довільну $2 \times n$ – матрицю

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

і покажемо, що вона також володіє майже інваріантною діагональною редукцією. Вважатимемо, що $n \geqslant 3$. Завдяки ермітовості A існує зворотна матриця $P \in A_n$, для якої

$$(a_{11} a_{12} \ldots a_{1n})P = (d_1 0 \ldots 0).$$

Тоді

$$CP = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \end{pmatrix}.$$

Виберемо таку матрицю Q, щоб

$$AP \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a'_{21} & d_2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді існування майже інваріантної діагональної редукції для матриці

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ a'_{21} & d_2 \end{pmatrix}$$

є достатнім для остаточної майже інваріантної діагональної редукції матриці C. Аналогічно встановлюється можливість майже інваріантної діагональної редукції для будь-якої $m \times 2$ матриці.

Далі продовжимо доведення методом математичної індукції за кількістю рядків матриці.

База індукції : кожна матриця розміру $(n \times m)$, де $min\{n, m\} \leqslant 2$ володіє майже діагональною редукцією.

Припустимо, що матриці над A, з не більш як $m-1$ рядком, володіють майже інваріантною діагональною редукцією.

Для доведення кроку індукції розглянемо довільну матрицю $C=(c_{ij})$, $c_{ij}\in A$, розмірів $m\times n$. Завдяки базі індукції можна вважати, що $m\geqslant 3$ або $n\geqslant 3$. Для визначеності, нехай $m\geqslant n$. Знайдемо такі 2×2 матриці

$$P_1=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}\ ,\quad Q=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{pmatrix},$$

$P,Q\in\mathcal{U}(A_2)$, що

$$P_1\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ c_{m1} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix}Q_1=\begin{pmatrix} d_1 & 0\\ 0 & d_2\end{pmatrix}.$$

Можна вважати, що або $d_2=0$, або d_1 – інваріантний елемент і $d_1|_l d_2$ і $d_1|rd_2$. Тоді

$$PAQ=$$

$$=\begin{pmatrix} p_{11} & 0 & \cdots & 0 & p_{12}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ p_{21} & 0 & \cdots & 0 & p_{22}\end{pmatrix} C \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & \cdots & 0 & q_{12}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ q_{21} & 0 & \cdots & 0 & q_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} d_1 & c_{12} & \cdots & c_{1n-1} & 0\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n-1} & c_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & c_{m2} & \cdots & c_{mn-1} & d_2\end{pmatrix}.$$

Нехай C' – матриця, одержана з PAQ викресленням останнього рядка і остан- нього стовпчика. Оскільки матриця C' має $m-1$ рядок, то до неї можна застосувати припущення індукції. У випадку $d_2\neq 0$ існують зворотні матриці P_2 і Q_2 відповідних розмірів, для яких

$$P_2C'Q_2=\begin{pmatrix} d_1' & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_2' & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d_k' & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

де $d_1',\dots,d_{k-1}'$ – інваріантні елементи з умовою подільності кожного наступного на попередній зліва і справа, причому $d_k'\neq 0$, $k\geqslant 2$.

Таким чином,

$$\begin{pmatrix} P_2 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}P_2C'Q_2\begin{pmatrix} Q_2 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} d_1' & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & d_2' & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{2n}\\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & d_k' & \cdots & 0 & a_{kn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn-1} & d_2\end{pmatrix}.$$

Нехай C'' – матриця, отримана з цієї останньої матриці викресленням першого рядка і першого стовпчика. Тоді для деяких зворотних матриць P_3 і Q_3

$$P_3C''Q_3 = \begin{pmatrix} e_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_3 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & e_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

де елементи $e_2, e_3, \ldots, e_{k-1}$ – інваріантні і володіють вище згаданими властивостями подільності.

Отже,

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} PCQ \begin{pmatrix} Q_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} d_1' & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & e_r & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер можна добитись щоб d_1' був лівим і правим дільником елемента e_r, не порушивши при цьому існуючої подільності між елементами $e_2, \ldots, e_{r-1}$ (при цьому нових позначень не вводимо). Тому можна вважати, що всі елементи $d_1', e_2, \ldots, e_{r-1}$ є інваріантними лівими та правими дільниками елемента e_r. Коли ми будемо переходити від матриці

$$\mathrm{diag}(d_1', e_2, \ldots, r_{r-1})$$

до її майже інваріантної редукції, то отримані нові елементарні дільники залишаться інваріантними лівими і правими дільниками елемента e_r. Остаточно одержимо майже інваріантну діагональну редукцію цілої матриці C.

Розглянемо тепер випадок, коли $d_2 = 0$. Тоді елемент d_1 не зобов'язаний бути інваріантним. Повторивши ті самі перетворення, які ми робили у припущенні $d_2 \neq 0$, одержимо таку ж діагональну матрицю, але не можемо ще гарантувати інваріантність елемента d_1'.

Якщо матриця C' виявиться нульовою, то кінцева матриця

$$\mathrm{diag}(d_1', e_2, \ldots, e_r, 0, \ldots, 0),$$

в принципі, може бути еквівалентна матриці з одним ненульовим елементом (і тоді все доведено), або ж ця матриця не еквівалентна жодній однорядковій матриці і, звівши матрицю

$$\mathrm{diag}(d_1', e_2, \ldots, e_{r-1}, 0, \ldots, 0)$$

до відповідної майже діагональної форми (при $r \geqslant 2$), можемо вважати вже, що d_1' є інваріантним. Якщо ж $r = 2$, то ми перебуваємо в умовах бази індукції і знову можемо вважати, що d_1' є інваріантним. Випадок, коли d_1' є інваріантним, таким чином, можна одержати завжди, якщо матриця C не еквівалентна однорядковій матриці. Далі майже інваріантна форма будується так само, як і у першому випадку. Твердження доведено.

На підставі щойно доведеного твердження можна довести таку теорему.

Теорема 2. *Нехай A – кільце елементарних дільників. Припустимо, що в кільці A виконується ще умова*

$$(\forall u)(\forall v)\{(a \neq 0) \wedge (ua = 0) \wedge (va = 0) \wedge (uA + vA = A) \Rightarrow Au + Av = A\}. \quad (*)$$

Тоді кільце A є кільцем з майже інваріантними елементарними дільниками, визначеними однозначно з точністю до подібності, тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

1) Для кожного елемента $a \in A$ існує такий інваріантний елемент $b \in A$, що $AaA = bA = Ab$ (умова Дубровіна [5]).

2) Кожний лівий і правий дільник інваріантного елемента є інваріантним.

Доведення. Припустимо, що A – кільце з майже інваріантними елементарними дільниками, в якому виконується умова (*). Нехай a ненульовий елемент кільця A. Тоді існують такі зворотні 2×2 матриці P і $Q \in M_2(A)$, для яких

$$P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де $e, d \in A$, причому справджується лише одна з таких можливостей: а) e – інваріантний, $d \neq 0$ і $e|_l d$ і $e|_r d$; б) e – довільний і $d = 0$; в) $e = 0$, $d = 0$.

Насправді, випадок в) неможливий, оскільки $a \neq 0$.

У випадку а) з рівності (1) випливає, що $AaA \subseteq AeA + AdA \subseteq eA = Ae$. Оскільки $e \in AaA$, то $AaA = eA = Ae$ і цим самим умова Дубровіна для таких a виконується.

Покажемо, що випадок б) при наших припущеннях також неможливий. Справді, $AaA = AcA$ і запишемо матриці P та Q^{-1} в явному вигляді:

$$P = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \eta \end{pmatrix},$$

Випишемо співвідношення, які випливають з рівності

$$P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & o \end{pmatrix} Q^{-1},$$

що є наслідком рівності (1):

$$xa = c\alpha,\ ya = c\beta,\ ua = 0,\ va = 0.$$

Оскільки (u, v) є рядком зворотноі матриці P, то $uA + vA = A$. Згідно з умовою (*) $Au + Av = A$, а тому можна вибрати такі елементи α і $\beta \in A$, що $\alpha u + \beta v = 1$. Тоді маємо такі рівності

$$0 = \alpha ua + \beta va = (\alpha u + \beta v)a = 1 \cdot a = a.$$

Отже, ми одержуємо суперечність з припущенням $a \neq 0$. Робимо тепер остаточний висновок: умова Дубровіна виконується для всіх елементів a кільця A.

Перейдемо до доведення умови 2). Нехай b лівий і правий дільник інваріантного елемента $a \in A$. Припустимо, що b не є інваріантним. Оскільки a є інваріантним, то b є повним дільником елемента a. Звідси випливає, що матриця

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

перебуває в нормальній майже інваріантній діагональній формі. Але ця матриця еквівалентна деякій своїй майже інваріантній діагональній редукції

$$\begin{pmatrix} b' & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix}.$$

Завдяки тому, що над кільцем A елементарні дільники визначаються з точністю до подібності, одержуємо $A/bA \cong A/b'A$. Але інваріантний елемент b' не може бути подібним до неінваріантного елемента і умова 2) також виконується.

Навпаки, припустимо, що в кільці елементарних дільників з умовою (*) виконуються ще умови 1) та 2). Доведемо, що A є кільцем з майже інваріантними елементарними дільниками. Для цього встановимо, що кожна 2×2 матриця над A володіє майже інваріантною діагональною редукцією, оскільки згідно з твердженням 4.2., тоді кожна матриця буде володіти майже інваріантною діагональною редукцією.

Тепер можна вважати, що наша матриця має вид

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

де a є повним дільником елемента b. Оскільки $AbA \subseteq aA \cap Aa$ і існує інваріантний елемент $d \in A$, для якого $AbA = dA = Ad$, то маємо включення $dA \subseteq aA$ і $Ad \subseteq Aa$. Тому a є правим і лівим дільником інваріантного елемента d, тобто і сам є інваріантним (завдяки умові 2)). Таким чином ми довели, що матриця

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

перебуває в майже інваріантній діагональній формі. Твердження доведено.

Наслідок 3. *Область елементарних дільників є областю з майже інваріантними елементарними дільниками тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову Дубровіна і множина ненульових інваріантних елементів є насиченою мультиплікативно-замкненою множиною.*

Наслідок 4. *Область головних ідеалів є областю з майже інваріантними елементарними дільниками тоді і тільки тоді, коли кожний її ненульовий інваріантний елемент є добутком інваріантних атомів.*

Зауважимо, ще що область головних ідеалів $\mathbb{H}[x]$, де $\mathbb{H}$ - тіло кватерніонів, має елемент $x^2 + 1$, який є інваріантним, але не розкладається в добуток інваріантних атомів. Тому ця область не є областю з майже інваріантними елементарними дільниками.

Зазначимо також, що кожне просте кільце елементарних дільників є кільцем з майже інваріантними елементарними дільниками, оскільки в такому кільці немає незворотних ненульових інваріантних елементів. Над таким кільцем, кожна матриця еквівалентна матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & d & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

де d – деякий елемент з A.

Очевидно, що інваріантне кільце елементарних дільників є кільцем з майже інваріантними елементарними дільниками.

Для областей Безу можна довести аналог критерію Капланського, відомий у комутативному випадку ([1]):

Теорема 5. *Область Безу A, в якій виконується умова Дубровіна і, в якій інваріантні елементи складають насичену мультиплікативно-замкнену множину, є областю з майже інваріантними елементарними дільниками тоді і тільки тоді, коли для будь-яких елементів $a, b, c \in A$, зв'язаних співвідношенням*

$$AaA + AbA + AcA = A,$$

існують такі елементи $p, q \in A$, що

$$paA + (pb + qc)A = A.$$

Доведення. Доведемо необхідність вказаної умови. Нехай $a, b, c \in A$, такі елементи, що $AaA + AbA + AeA = A$.

Розглянемо матрицю

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

і знайдемо такі зворотні матриці

$$P = \begin{pmatrix} r & s \\ p & q \end{pmatrix}$$

та

$$Q = \begin{pmatrix} r & s \\ p & q \end{pmatrix},$$

що

$$PCQ = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

де e – інваріантний і e повним чином ділить d.

Тоді

$$AeA + AdA = AaA + AbA + AcA = A$$

і, оскільки

$$AeA \supseteq AdA,$$

то $AeA = A$. На підставі того, що e є інваріантним, звідси одержуємо $eA = A$ і $Ae = A$. Тому e – зворотній елемент. З іншого боку

$$e = pau + (pb + qc)v$$

і тому

$$paue^{-1} + (pb + qc)v^{-1} = 1,$$

що й треба було довести.

Встановимо тепер достатність зазначеної умови. Згідно з [6], [7] або [8] область A є ермітовою, а отже можна застосувати твердження 2. Згідно з цим твердженням можна обмежитись матрицею

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in A$$

і довести, що вона володіє майже інваріантною діагональною редукцією.

Нехай

$$AaA = a_1A = Aa_1, AbA = b_1A = Ab_1 \text{ і } AcA = c_1A = Ac_1.$$

Тоді

$$a_1A + b_1A + c_1A = d_1A \text{ і } Aa_1 + Ab_1 + Ac_1 = Ad_1'.$$

Але

$$d_1A = a_1A + b_1A + c_1A = AaA + AbA + AcA = Aa_1 + Ab_1 + Ac_1 = Ad_1.$$

Тому d_1 інваріантний елемент і, крім цього, маємо:

$$a = d_1a_0 = a_0'd_1 \ , \ b = d_1b_0 = b_0' = b_0'd_1 \ , \ c = d_1c_0 = c_0'd_1$$

для деяких

$$a_0, a_0', b_0, b_0', c_0, c_0' \in A.$$

Звідси одержуємо

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1a_0 & d_1b_0 \\ 0 & d_1c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_0'd_1 & b_0'd_1 \\ 0 & c_0'd_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0' & b_0' \\ 0 & c_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Тому для знаходження майже інваріантної діагональної редукції матриці C досить знайти майже інваріантну діагональну редукцію однієї з матриць

$$C' = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix} \text{ або } \begin{pmatrix} a_0' & b_0' \\ 0 & c_0' \end{pmatrix}.$$

Але

$$Aa_0A + Ab_0A + Ac_0A = A$$

і тому існують елементи p та $q \in A$, для яких

$$pa_0A = (pb_0 + qc_0)A = A.$$

Виберемо такі елементи $u, v \in A$, що

$$pa_0u = (pb_0 + qc_0)v = 1.$$

Тепер (див. [8]) доповнимо унімодулярний рядок $(p \quad q)$ до зворотної матриці P та унімодулярний стовпчик $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ до зворотньої матриці Q. Тоді одержимо

$$P\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Далі елементарними перетвореннями зводимо одержану матрицю до майже інваріантної діагональної форми

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

очевидним чином.

Ми бачимо, що матриця

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_1 t \end{pmatrix}$$

є майже інваріантною діагональною редукцією для матриці C. Теорему доведено.

Наступне твердження узагальнює теорему 3.1. праці [9].

Твердження 6. *Діагональна матриця над кільцем A з інваріантними елементами володіє майже інваріантною діагональною редукцією тоді і тільки тоді, коли кожний лівий (кожний правий) ідеал в A, породжений скінченною системою інваріантних елементів, є головним лівим (головним правим) ідеалом.*

Доведення проводиться за схемою, запропонованою в праці [9].

Твердження 7. *Дуо-кільце A є кільцем з майже інваріантними елементарними дільниками тоді і тільки тоді, коли кожний скінченно-зображуваний лівий A-модуль є прямою сумою циклічно-зображуваних модулів*

$$A/Ad_1, A/Ad_2, ..., A/Ad_k,$$

де $d_i | d_{i+1}$ *для кожного* $i = 1, ..., k-1$.

Доведення цього твердження також проводиться за схемою з праці [9].

1. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – Vol. 66, N3. – P. 464-491.
2. Cohn P.M. *Right principal Bezout domains*// J. London Math. Soc. – 1987 – Vol. 35, N2. – P. 251-262.
3. Комарницкий Н.Я. *Кольца с почти инвариантными элементарными делителями*// Международная конференция по алгебре, посвящённая памяти А.И.Мальцева (1909-1967) Тезисы сообщений. – Новосибирск. – 1989. – С.70.
4. Комарницкий Н.Я. // Кольца с почти инвариантными элементарными делителями и конечно-представимые модули // VI Симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Тезисы сообщений. – Львов. – 1990. – С.73.
5. Дубровин Н.И. *Проективный предел колец с элементарными делителями*// Матем. сб. – 1982. – Т. 119, N1. – С. 89-95.
6. Казімірський П.С., Дрогомижська М.М. *Зауваження до теорії кілець скінченно-породжених правих головних ідеалів*// Україн. мат. ж, – 1973. –Т. 25, N 5. – С.667-673.
7. Казімірський П.С., Луник Ф.П. *Дослідження з теорії елементарних дільників*// Доп. АН УРСР, - 1970. – N 1. – С.7-9.
8. Казімірський П.С., Луник Ф.П.*Доповнення прямокутньої оберненої над асоціативним кільцем матриці до оборотної*// Доп. АН УРСР. – 1972. – N 4. – С.505-506.
9. Shores T.S., Lewis W.J., Larsen M.D. // Elementary divisor rings and finitely presented modules// Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – Vol.187, N 2. – P.231-248.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997