

УДК 512.552.12

КІЛЬЦЯ З ЕЛЕМЕНТАРНОЮ РЕДУКЦІЄЮ МАТРИЦЬ І КВАЗІЄВКЛІДОВІ КІЛЬЦЯ

О.М. РОМАНІВ

Romaniv O. M. Rings with elementary reduction of matrices and quasi-Euclidean rings We establish necessary and sufficient conditions under which a quasi-Euclidean ring is a ring with elementary reduction of matrices. It is proved that a semilocal Bezout ring is a ring with elementary reduction of matrices. We give a criterion for existing a solution of one matrix equation of a special type and find all such solutions.

§ 1. Основні означення та домовленості

Під кільцем R у даній праці розуміємо комутативне кільце з відмінною від нуля одиницею, а під $\mathcal{U}(R)$ — групу зворотних елементів цього кільця. Позначимо через (a, b) найбільший спільний дільник елементів a і b кільця R . Множину всіх максимальних ідеалів кільця R , які містять елемент a , позначатимемо $\text{mspec}(a)$, а радикал Джекобсона — $\mathcal{J}(R)$. Відзначимо, що термін *напівлокальність* не імплікує жодних ланцюгових умов. Кільце квадратних матриць порядку n з елементами кільця R позначимо через R_n , а *слід* і *визначник* матриці $A \in R_n$ — через $\text{tr } A$ і $\det A$ відповідно.

Означення 1. Під *елементарною матрицею* з елементами кільця R розуміємо квадратну матрицю одного з трьох типів [1]:

- 1) діагональна матриця зі зворотними елементами на головній діагоналі;
- 2) матриця, відмінна від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю;
- 3) матриця перестановки, тобто матриця, яка отримується з одиничної шляхом перестановки деяких її рядків і стовпців.

Означення 2. Групою *елементарних матриць* $\text{GE}_n(R)$ назовемо групу, породжену елементарними матрицями порядку n другого типу (тобто матрицями, відмінними від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю). Через $\text{SL}_n(R)$ позначимо *спеціальну лінійну групу*, тобто групу матриць порядку n , визначник яких дорівнює одиниці.

Означення 3. Говоритимемо, що матриці A і B з елементами кільця R є *елементарно еквівалентними* (у позначеннях $A \sim B$), якщо існують такі елементарні над R матриці $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_s$ відповідних розмірів, що

$$P_1 \cdot \dots \cdot P_k \cdot A \cdot Q_1 \cdot \dots \cdot Q_s = B.$$

Означення 4. Матриця A володіє *елементарною редукцією*, якщо вона елементарно еквівалентна канонічній діагональній матриці

$$\text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, 0, \dots, 0),$$

де $\varepsilon_i R \cap R \varepsilon_i \supseteq R \varepsilon_{i+1} R$, $i = 1, 2, \dots, r-1$, (під діагональною розуміємо, взагалі кажучи, прямокутну матрицю, в якій поза головною діагоналлю стоять нулі).

Означення 5. Кільце R називається *кільцем з елементарною редукцією матриць*, якщо довільна матриця над ним володіє елементарною редукцією [2].

Поняття кільця з елементарною редукцією матриць було введено Б.В. Забавським і ним же була сформульована задача повного описання таких кілець [2].

Від *кільця елементарних дільників* [3] кільце з елементарною редукцією матриць відрізняється тим, що в його означенні матриці $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_s$ є елементарними. Тому зрозуміло, що кільце з елементарною редукцією матриць є кільцем елементарних дільників. Проте не будь-яке кільце елементарних дільників є кільцем з елементарною редукцією матриць. Прикладом такого кільця є кільце $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 + 1)$ [1, 4], яке, зокрема, є кільцем головних ідеалів, але не є квазієвклідовим.

Означення 6. Кільце R називається *елементарно головним* [4], якщо для довільних $a, b \in R$ існують $c \in R$ і матриця $M \in \text{GE}_2(R)$ такі, що $(a, b)M = (c, 0)$.

Означення 7. Якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують $c \in R$ і зворотна матриця $M \in R_2$ такі, що $(a, b)M = (c, 0)$, то кільце R називається *правим кільцем Ерміта*. Аналогічно визначається *ліве кільце Ерміта*. У комутативному випадку ці класи кілець збігаються [3].

Критерій ермітовості (див. [5, теор. 3]). Комутативне кільце R є кільцем Ерміта тоді і тільки тоді, коли для довільних $a, b \in R$ існують такі $a_0, b_0, d \in R$, що $a = a_0 d$, $b = b_0 d$ і $(a_0, b_0) = 1$.

Означення 8. Кільце R називається *кільцем Безу* [3], якщо будь-який скінченнопороджений ідеал є головним, тобто для довільних елементів $a, b \in R$ існує таке $d \in R$, що $aR + bR = dR$.

Очевидно, Ермітове кільце є кільцем Безу [3].

§2. Квазієвклідові кільця

Означення 9. Під *квазі-алгоритмом* [4], заданим на кільці R , розуміємо таку функцію $\varphi: R \times R \rightarrow W$ (W — деякий ординал), що для довільних $a, b \in R$ ($b \neq 0$) існують такі $q, r \in R$, для яких виконуються умови $a = bq + r$ і $\varphi(b, r) < \varphi(a, b)$.

Означення 10. Кільце R називають *квазієвклідовим* [4], якщо існує деякий ординал W і квазі-алгоритм $R \times R \rightarrow W$.

Прикладами квазієвклідових кілець є євклідові кільця, кільця нормування, регулярні кільця [4].

Нагадаємо деякі необхідні факти.

Теорема 1 (див. [4 теор.8]). Клас квазієвклідових кілець збігається з класом елементарно головних кілець.

Теорема 2 (див. [4, теор.17]). Нехай R — кільце і для довільного $x \in R$ аннулятор $\text{Ann}(x)$ породжується ідемпотентом. Тоді такі твердження еквівалентні:

- (i) R є квазієвклідовим;

(ii) R є кільце Безу і $\text{GE}_n(R) = \text{SL}_n(R)$ для довільного натурального $n \geq 2$.

Зауваження. Нехай $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in R_2$, де R — квазіевклідове кільце. На підставі теореми 1, кільце R є елементарно головним. Тому для елементів $x, y \in R$ існують такі $a \in R$ і елементарна матриця $M \in \text{GE}_2(R)$, що $(x, y)M = (a, 0)$. Тоді

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Отже, над квазіевклідовим кільцем при зведенні матриць другого порядку до діагонального вигляду досить обмежитися трикутними матрицями вигляду $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ або $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Доведемо деякі допоміжні твердження.

Твердження 1. *Квазіевклідове кільце є кільцем Ерміта.*

Доведення. Достатньо зауважити, що квазіевклідове кільце є елементарно головним (теорема 1), а елементарно головне кільце є кільцем Ерміта (це випливає з означень 6 і 7).

Лема 1. *Довільна зворотна матриця над квазіевклідовим кільцем R є скінченим добутком елементарних матриць.*

Доведення. Спочатку доведемо, що довільну зворотну матрицю другого порядку над квазіевклідовим кільцем за допомогою елементарних перетворень можна звести до діагонального вигляду.

Нехай $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ — зворотна над R матриця. Тоді $(a, b) = 1$ і, оскільки квазіевклідове кільце є елементарно головним (теорема 1), то існує така матриця $Q \in \text{GE}_2(R)$, що $(a, b)Q = (1, 0)$. Тому

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}.$$

Нехай $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b_1 & 1 \end{pmatrix}$, $P \in \text{GE}_2(R)$. Тоді

$$P \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix},$$

що й потрібно було довести.

Отже, якщо A — довільна зворотна матриця над квазіевклідовим кільцем R , то існують такі матриці P, Q (які є скінченими добутками елементарних матриць), що

$$P \cdot A \cdot Q = F, \tag{1}$$

де F — діагональна матриця. Очевидно, матриця F є зворотною матрицею. Оскільки визначник матриці F дорівнює добутку діагональних елементів, то звідси випливає, що всі ці діагональні елементи є зворотними. Отже, F є елементарною матрицею першого типу.

З рівності (1) перейдемо до рівності $A = P^{-1} \cdot F \cdot Q^{-1}$, з якої випливає, що довільна зворотна матриця над квазіевклідовим кільцем є скінченим добутком елементарних матриць.

Твердження 2. Квazіевклідове кільце R є кільцем з елементарною редукцією матриць, коли кожна матриця вигляду $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, де $aR + bR + cR = R$, володіє елементарною редукцією.

Доведення. Необхідність очевидна.

Для доведення достатності припустимо, що $aR + bR + cR = dR$ і $d \notin \mathcal{U}(R)$. На підставі твердження 1 і критерію ермітовості, існують такі елементи $a_0, b_0, c_0 \in R$, що $a = a_0d$, $b = b_0d$, $c = c_0d$ і $a_0R + b_0R + c_0R = R$. Тому

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix},$$

де матриця $\begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix}$ володіє елементарною редукцією. Зважаючи на належність $\text{diag}(d, d)$ до центру R_2 , тепер легко бачити, що матриця вигляду $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ також володіє елементарною редукцією.

Індукція за розмірами матриць завершує доведення.

Теорема 3. Нехай R — квazіевклідова область, в якій множина максимальних ідеалів є незліченною, а довільний ненульовий елемент міститься в не більше, ніж зліченній множині максимальних ідеалів. Тоді R — кільце з елементарною редукцією матриць.

Доведення. Згідно з твердженням 2, для доведення теореми достатньо обмежитися матрицями вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

де $aR + bR + cR = R$.

Якщо $a \in \mathcal{U}(R)$, то

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Отже, матриця A володіє елементарною редукцією. Нехай $a \notin \mathcal{U}(R)$, тобто множина максимальних ідеалів, які містять a , непорожня. Покладемо

$$\text{mspec}(a) = \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_n, \dots\}.$$

Тоді, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $b \notin \mathcal{M}_1$. Справді, якщо $b \in \mathcal{M}_1$, то $(b + c) \notin \mathcal{M}_1$, оскільки $aR + bR + cR = R$ і елементарними перетвореннями стовпців елемент b можна замінити елементом $(b + c)$. Кільце R — елементарно головне (теорема 1). Тому існує така елементарна матриця P_1 , що

$$P_1 A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix},$$

де $aR + bR = a_1R$.

Якщо $a_1 \in \mathcal{U}(R)$, то матриця $P_1 A$ володіє елементарною редукцією. Нехай $a_1 \notin \mathcal{U}(R)$ і, як і вище, вважатимемо, що $a_1 \in \mathcal{M}_2$. Тоді $b_1 \notin \mathcal{M}_2$, бо у протилежному випадку

$(b_1 + c_1) \notin \mathcal{M}_2$. Оскільки кільце R є елементарно головним, то існує така елементарна матриця Q_1 , що $P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$, де $a_1 R + b_1 R = a_2 R$.

Продовжуючи побудову, отримаємо сукупність матриць вигляду

$$P_k A Q_k = \begin{pmatrix} a_i & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

яким відповідає такий ланцюг ідеалів

$$aR \subset a_1 R \subset a_2 R \subset \dots \subset a_i R \subset \dots, \quad (2)$$

причому $a_i \notin \mathcal{M}_i$.

Позначимо $\mathcal{I} = \bigcup_i a_i R$. Припустимо, що $\mathcal{I} \neq R$. Тоді існує такий максимальний ідеал $\mathcal{M}$, що $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$. Оскільки $aR \subset \mathcal{I}$, то $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s$, де $\mathcal{M}_s \in \text{mspec}(a)$. Це неможливо, бо існує такий ідеал $a_s R$ з ланцюга (2), що $a_s \notin \mathcal{M}_s$. Тому, $\mathcal{I} = R$, тобто ланцюг (2) скінченний. Отже, існують такі матриці P_n, Q_n , які є скінченними добутками елементарних матриць, що $P_n A Q_n$ є канонічною діагональною матрицею.

Зауважимо, що в доведенні теореми 3 використані ідеї праці [11].

З теореми 3 очевидним чином випливають такі наслідки.

Наслідок 1. *Напівлокальне квазієвклідове кільце є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Наслідок 2. *Квазієвклідове кільце, в якому множина максимальних ідеалів є не більш, ніж зліченна, є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Теорема 4. *Напівлокальне кільце Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Доведення. Нехай R — напівлокальне кільце Безу і елементи $a, b \in R$ такі, що $aR + bR = R$. Тоді

$$\text{mspec}(a) \cap \text{mspec}(b) = \emptyset. \quad (3)$$

Позначимо через r елемент кільця R , який належить усім максимальним ідеалам кільця R , крім максимальних ідеалів множини $\text{mspec}(a)$ (такий елемент r існує, оскільки кільце R напівлокальне). Очевидно,

$$\text{mspec}(r) \cap \text{mspec}(a) = \emptyset. \quad (4)$$

Розглянемо елемент $a + br \in R$. Припустимо, що $a + br \in \mathcal{M}$, де $\mathcal{M}$ — максимальний ідеал кільця R .

Можливі такі випадки:

- 1) $a \in \mathcal{M}$ і $b \in \mathcal{M}$ — суперечить умові (3);
- 2) $a \in \mathcal{M}$ і $r \in \mathcal{M}$ — суперечить умові (4).

Отже, наше припущення невірне. Тому $a + br = u \in \mathcal{U}(R)$ і

$$(a, b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} = (u, b) \stackrel{e}{\sim} (u, 0).$$

Як бачимо, кільце R є елементарно головним, а на підставі теореми 1, воно квазієвклідове. Тоді за наслідком 1 отримуємо, що напівлокальне кільце Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Далі розглядатимемо кільце Ерміта R , яке задовольняє таку умову.

Умова 1. Нехай для $a, b \in R$ ($a \notin \mathcal{J}(R)$) існує таке $m \in R$, що $(b, m) = 1$ і для кожного $n \in R$ такого, що $(n, a) \neq 1$ і $(n, b) = 1$, маємо: $(n, m) \neq 1$.

У [7, теор.2.6] доведено, що довільне кільце Ерміта R , елементи якого задовольняють умову 1, є кільцем елементарних дільників. Використаємо цей факт для доведення теореми, у формулюванні якої умову 1 дещо перефразуємо.

Теорема 5. Нехай R — кільце Ерміта і для будь-яких $a, b \in R$ ($b \neq 0$) існує таке $s \in R$, що $\text{mspec}(s) = \text{mspec}(a) \setminus \text{mspec}(b)$. Тоді R — кільце з елементарною редукцією матриць.

Доведення. Нехай елементи $a, b \in R$ такі, що $aR + bR = R$. Очевидно,

$$\text{mspec}(a) \cap \text{mspec}(b) = \emptyset. \quad (5)$$

За умовою теореми, існує деякий елемент $r \in R$, який належить усім максимальним ідеалам кільця R , крім максимальних ідеалів множини $\text{mspec}(a)$. Тому $\text{mspec}(r) = \text{mspec}(0) \setminus \text{mspec}(a)$. Очевидно, що

$$\text{mspec}(r) \cap \text{mspec}(a) = \emptyset. \quad (6)$$

Розглянемо елемент $a + br \in R$. Припустимо, що $a + br = u \in \mathcal{M}$ ($\mathcal{M} \in \text{mspec}(R)$). Тоді $a \in \mathcal{M}$ і $b \in \mathcal{M}$ або $a \in \mathcal{M}$ і $r \in \mathcal{M}$, що суперечить умовам (5) або (6) відповідно. Тому $a + br \in \mathcal{U}(R)$. Звідси

$$(a, b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} = (u, b) \stackrel{\varepsilon}{\sim} (u, 0).$$

Таким чином, дане кільце R є елементарно головним, а на підставі теореми 1 і квазієвклідовим. Оскільки кільце Ерміта, елементи якого задовольняють умову 1, є кільцем елементарних дільників, а довільна зворотна матриця над квазієвклідовим кільцем є добутком елементарних матриць, то кільце R є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Означення 11 Комутативне кільце R називається кільцем стабільного рангу один, якщо для довільних взаємнопростих $a, b \in R$ існує такий елемент $t \in R$, що $a + bt$ є зворотним елементом кільця R .

Зауважимо, що кільця, які задовольняють умовам теорем 4,5, є кільцями стабільного рангу один.

Теорема 6. Кільце Ерміта стабільного рангу один є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Доведення. Нехай R — кільце стабільного рангу один. Припустимо, що $aR + bR = dR$, де $a, b, d \in R$. Тоді, згідно з критерієм ермітовості, існують такі $a_0, b_0 \in R$, що $a = a_0d$, $b = b_0d$. Тому

$$(a, b) = (a_0, b_0) \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Оскільки R — кільце стабільного рангу один, то для елементів a_0, b_0 існує таке $t \in R$, що $a_0 + b_0t = u \in \mathcal{U}(R)$. Таким чином,

$$(a_0, b_0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = (u, b) \stackrel{\varepsilon}{\sim} (u, 0).$$

Зважаючи на належність $\text{diag}(d, d)$ до центру R_2 , легко бачити, що R є елементарно головним, а тому й квазієвклідовим (теорема 1). На підставі твердження 1, R є кільцем Ерміта. Кільце Ерміта стабільного рангу один є кільцем елементарних дільників [8, лема 4], а довільна зворотна матриця над квазієвклідовим кільцем є скінченим добутком елементарних матриць (лема 1). Тому отримуємо, що кільце Ерміта стабільного рангу один є кільцем з елементарною редуцією матриць.

Оскільки регулярні кільця і кільця нормування є кільцями стабільного рангу один, то з теореми 6 випливають такі наслідки.

Наслідок 3. *Регулярне кільце є кільцем з елементарною редуцією матриць.*

Наслідок 4. *Кільце нормування є кільцем з елементарною редуцією матриць.*

§3. Матричні рівняння спеціального вигляду над квазієвклідовими областями

У праці [9] Забавським Б. і Дяченко Н. одержали критерій існування розв'язку матричного рівняння спеціального типу над комутативною областю Безу. Ми сформулюємо і доведемо подібний критерій над квазієвклідовою областю і, що важливо, знайдемо ці розв'язки в явному вигляді.

Теорема 8. *Для квазієвклідової області R такі властивості еквівалентні:*

- (i) R — кільце з елементарною редуцією матриць;
- (ii) для довільної матриці $A \in R_2$, найбільший спільний дільник всіх у сукупності елементів якої дорівнює одиниці, знайдеться власний (тобто ненульовий і неединичний) ідемпотент у правому ідеалі AR_2 ;
- (iii) матричне рівняння $XAX = X$ має ненульовий розв'язок, де $X, A \in R_2$ і найбільший спільний дільник всіх (у сукупності) елементів матриці A дорівнює одиниці.

Доведення. Проведемо доведення за схемою (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii). Нехай $aR + bR + cR = R$, де $a, b, c \in R$. Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R_2.$$

Оскільки R — кільце з елементарною редуцією матриць, то для матриці A існують такі зворотні матриці $P, Q \in R_2$ (які є скінченими добутками елементарних матриць), що $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$. Тоді

$$\begin{aligned} (AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P)^2 &= AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} PAQ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P = \\ &= AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P = AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P. \end{aligned}$$

Легко бачити, що $AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$ — шуканий ідемпотент в ідеалі AR_2 .

(ii)⇒(iii). Нехай ідемпотент $E = E^2 \in AR_2$, тоді $E = AB$ (де $B \in R_2$). Розглянемо добуток

$$BABABAB = (BAB)(ABAB) = (BAB)AB = B(ABAB) = BAB.$$

Звідси, поклавши $X = BAB$, отримаємо рівність $XAX = X$. Отже, рівняння $XAX = X$ має ненульовий розв'язок.

(iii)⇒(ii). Нехай рівняння $XAX = X$ має ненульовий розв'язок. Тоді, домноживши його зліва на A , отримаємо $AXAX = AX$. Звідси випливає, що будь-який правий ідеал AR_2 містить власний ідемпотент.

(ii)⇒(i). Розглянемо такі $a, b, c \in R$, що $aR + bR + cR = R$. Нехай $\begin{pmatrix} r & k \\ s & t \end{pmatrix} \in R_2$ і $F = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & k \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar + bs & ak + bt \\ cs & ct \end{pmatrix}$ — власний ідемпотент. У праці [10, лема 1] було доведено, що матриця $M \in R_2$, де R — область цілісності, є власним ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли $\det M = 0$ і $\text{tr } M = 1$. Завдяки цьому факту, із рівностей $\text{tr } F = 1$ і $\det F = 0$ отримуються рівності $ar + bs + ct = 1$ і $sk = rt$ ($rtR \subseteq sR$).

Припустимо, що $dR = rR + sR$ і $r = dp$ і $s = dq$, де $p, q \in R$, $(p, q) = 1$, $p, q \in R$.

Тоді з рівності $sk = rt$ випливає, що $dpt = dqk$, а тому $pt = qk$. Отже, існує деяке $m \in R$, для якого $t = qm$.

Покладемо

$$P = \begin{pmatrix} d & m \\ -cq & ap + bq \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} p & -bd - cm \\ q & ad \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що $\det P = \det Q = 1$. На підставі теореми 2, спеціальна лінійна група $SL_2(R)$ збігається з групою елементарних матриць $GE_2(R)$. Тому P і Q — зворотні матриці, які є добутками елементарних над R матриць.

Розглянемо добуток

$$PAQ = \begin{pmatrix} d & m \\ -cq & ap + bq \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -bd - cm \\ q & ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ac \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що матриця A , а, отже, і довільна матриця над R , володіє елементарною редукцією. Тому R — кільце з елементарною редукцією матриць.

Теорему доведено. Залишилось записати розв'язок матричного рівняння $XAX = X$ в явному вигляді. Вже доведено, що $X = BAB$, де AB — власний ідемпотент у правому ідеалі AR_2 . Тому

$$X = \begin{pmatrix} r & k \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & k \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & k \\ s & t \end{pmatrix},$$

де $ar + bs + ct = 1$ і $sk = rt$ ($rtR \subseteq sR$).

Перейдемо до розгляду групи $SL_2(R)$, де R — кільце з елементарною редукцією матриць. Згідно з теоремою 2, R є такою областю Безу, що $GE_2(R) = SL_2(R)$. Тому довільну матрицю другого порядку над кільцем R , визначник якої дорівнює одиниці, можна зобразити у вигляді скінченного добутку матриць вигляду $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Справді, група $\text{GE}_2(R)$ породжується матрицями вигляду $F(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, де $a \in R$ [4], як це видно з таких рівностей:

$$\begin{aligned} F(a) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GE}_2(R), \\ F^{-1}(a) &= F(0)F(-a)F(0) \in \text{GE}_2(R), \\ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= (F(0))^3 F(a), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = F(-a)(F(0))^3. \end{aligned}$$

Як наслідки можна сформулювати ще ряд тверджень, доведення яких тепер вже очевидні.

Теорема 8. Група $\text{SL}_2(R)$, де R — кільце нормування, породжується матрицями вигляду $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, де $a, b \in R$.

Теорема 9. Група $\text{SL}_2(R)$, де R — регулярне кільце, породжується матрицями вигляду $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, де $a, b \in R$.

Теорема 10. Група $\text{SL}_2(R)$, де R — напівлокальне кільце Безу, породжується матрицями вигляду $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, де $a, b \in R$.

1. Cohn P. *On the structure of the GL_2 of a ring*// I.H.E.S. — 1996. — Vol 30. — P. 365 — 413.
2. Zabavsky B. *Ring with elementary reduction matrix*// Ring Theory Conf. (Miskols, Hungary). — 1996. — P. 14.
3. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules*// Trans. Amer. Math. Soc. — 1966. — Vol. 66. — P.464–491.
4. Bougaut B. *Anneaux Quasi-Euclidiens*// These de docteur troisieme cycle. — 1976. — 67 p.
5. Gillman L., Henriksen M. *Some remarks about elementary divisor rings*// Trans. Amer. Math. Soc. — 1956. — Vol. 82. — P. 362 — 365.
6. Кон П. *Свободные кольца и их связи*. — М.: Мир. — 1975.
7. Larsen M., Lewis W., Schores T. *Elementary divisor rings and finitely presented modules* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — Vol. 187. — P.231 — 248.
8. Brewer J., Katz D., Ullery W. *Pole assignability in polynomial rings, power series rings, and Prufer domains*// J. of Algebra. — 1987. — Vol. 106. — P. 265 — 286.
9. Забавский Б., Дяченко Н. *Критерий существования решения матричного уравнения специального вида над коммутативной областью Безу*// VI симп. по теор. ком. алгебр и модулей. Львов, 11-13 октября. 1990. — С. 53.
10. Дубровин Н.И. *Проективный предел с элементарными делителями*// Мат. сб. — 1982. — Vol. 119. — P. 89 — 95.
11. Забавский Б.В., Комарницкий Н.Я. *Дистрибутивные области элементарными делителями*// Укр. мат. журн. — 1990. — Т.42, N7, — С. 1000-1004.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997