УДК 512.544+519.46

ПРО НАПІВЛОКАЛЬНІ КІЛЬЦЯ З РОЗВ'ЯЗНОЮ ПРИЄДНАНОЮ ГРУПОЮ

Ю.Б. Іщук

Ishchuk Yu.B. On semilocal rings with solvable adjoint group. The semilocal rings with the solvable adjoint group and an Engel unipotent subgroup were characterized. Equivalance of several conditions was established for the adjoint group of the right Artinian ring.

Нехай R – асоціативне кільце з одиницею 1. Множина всіх оборотніх елементів R стосовно операції $a \circ b = a + b + ab$, де $a, b \in R$, утворює групу R°, яка називається приєднаною групою кільця R. Тоді $R^\circ \cong \mathcal{U}(R)$, де $\mathcal{U}(R)$ – група одиниць кільця R.

Кільце R називається напівлокальним, якщо фактор-кільце $R/\mathcal{J}(R)$ праве артінове.

Нагадаємо [1], що група G, яка володіє зростаючим нормальним рядом

$$1 = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \ldots \leqslant H_\alpha \leqslant H_{\alpha+1} \leqslant \ldots \leqslant H_\gamma = G,$$

де $H_\alpha \lhd G$, $H_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} H_\beta$, якщо α – граничне трансфінітне число, $H_{\alpha+1}/H_\alpha$ – максимальна локально нільпотентна нормальна підгрупа фактор-групи G/H_α, називається радикальною. Як відомо [2], існує локально розв'язна група, яка не є радикальною.

Введемо позначення:

R^+ – адитивна група кільця R;

$R(G)$ – множина правих Енгелевих елементів групи G;

$\mathcal{J}(R)$ – радикал Джекобсона кільця R;

$M_n(q)$ – повне кільце матриць порядку n з елементами із поля $GF(q)$;

$GL_n(q)$ – повна лінійна група матриць порядку n з елементами із поля $GF(q)$.

З теореми 1 [3] випливає така лема.

Лема. *Нехай R – напівлокальне кільце. Якщо приєднана група R° локально розв'язна (відповідно радикальна), то $R/\mathcal{J}(R) = T_1 \oplus \ldots \oplus T_s (s \in \mathbb{N})$ і кожне підкільце T_i ($i = 1, \ldots, s$) володіє однією з таких властивостей:*

1) T_i – поле;

2) $T_i \cong M_2(2)$;

3) $T_i \cong M_2(3)$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 13H99.

Теорема. *Нехай R – напівлокальне кільце і всі елементи групи $\mathcal{J}(R)^\circ$ є правими енгелевими. Тоді рівносильними є такі умови:*

1) R° – радикальна (відповідно локально розв'язна) група;

2) R володіє таким ідеалом I, що:

(а) $|R^+ : I^+| < \infty$;

(б) $I = B \oplus C$, де $B = 0$ або $B = \sum\limits_{i=1}^{s} B_i$ – пряма сума локальних кілець B_i і $C = \mathcal{J}(C)$ або $C/\mathcal{J}(C) \cong GF(2) \oplus \ldots \oplus GF(2)$, причому групи B_i°, $\mathcal{J}(C)^\circ$ радикальні (відповідно локально розв'язні);

(в) $R = I$ або $R/I \cong \sum\limits_{i=1}^{k} F_i$, де $F_i \cong M_2(2)$, або $F_i \cong M_2(3)$.

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2). На підставі леми

$$R/\mathcal{J}(R) = T_1 \oplus \ldots \oplus T_m \oplus K_1 \oplus \ldots \oplus K_s,$$

де T_i – поле ($i = 1, \ldots, m$), а K_j ізоморфне $M_2(2)$ або $M_2(3)$ ($j = 1, \ldots, s$). Позначимо через I повний прообраз $T_1 \oplus \ldots \oplus T_m$ в кільці R. Очевидно, що $|R^+ : I^+| < \infty$ і I – ідеал кільця R. Крім того, I – напівлокальне кільце і $\mathcal{J}(I) = \mathcal{J}(R)$.

Розглянемо підкільце I. Якщо $T_i \cong GF(2)$ для всіх i ($i = 1, \ldots, v$), то $\mathcal{U}(I) = 1 + \mathcal{J}(I)$ і $S = 0$. Припустимо, що $T_1 \neq GF(2)$. Нехай e – такий нетривіальний ідемпотент підкільця I, що $\pi(e)$ – одиниця поля T_1, де $\pi : I \to I/\mathcal{J}(I)$ – канонічний епіморфізм, $B = eIe$. Тоді

$$B/\mathcal{J}(B) \cong \pi(B) = T_1,$$

а тому B – локальне кільце з одиницею e. Оскільки $|\ (B/\mathcal{J}(B))^+\ | \neq 2$, то $\mathcal{U}(B)$ має елемент a такий, що $a - e \in \mathcal{U}(B)$. Якщо b – обернений до a елемент із $\mathcal{U}(B)$, то $(a-e)\circ(b-e) = 0$, і тому $a - e \in I^\circ$.

Нехай $I^+ = B^+ \dot{+} X \dot{+} Y \dot{+} C$ – двосторонній пірсовський розклад адитивної групи I^+. Не зменшуючи загальності міркувань, припустимо, що $\mathcal{J}(I)^m \neq 0$ і $\mathcal{J}(I)^{m+1} = 0$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. Тоді

$$[x, a-e] = x \circ (a-e) \circ (-x) \circ (b-e) = (e-a)x,$$

$$[x, \underbrace{a-e, \ldots, a-e}_{n}] = (e-a)^n x$$

для кожного ($n \in \mathbb{N}$). Оскільки $\mathcal{J}(I)^\circ \subseteq R(I^\circ)$, то $(e-a)^k \in \mathcal{U}(B)$ і тому $ex = x$. Отже, $X^2 = Y^2 = 0$ та $I = B \oplus C$. Аналогічно до теореми 2.2 [4] звідси випливає твердження теореми.

2) $\Rightarrow$ 1). Якщо $R = I$, то твердження випливає з умови (б). У випадку $R \neq I$ група R° є розширенням радикальної (відповідно локально розв'язної) групи I° за допомогою скінченної розв'язної групи $H = \prod\limits_{i=1}^{k} F_i^\circ$, а отже, R° радикальна (відповідно локально розв'язна). Теорему доведено.

Наслідок. *Нехай R – праве артінове кільце. Тоді такі умови є рівносильними:*
(1) R° *– радикальна група ;*
(2) R° *– локально розв'язна група ;*
(3) R° *– розв'язна група ;*
(4) R *володіє таким ідеалом* I, *що:*
(а) $|R^+ : I^+| < \infty$;
(б) $I = B \oplus C$, *де* $B = 0$ *або* $B = \sum\limits_{i=0}^{k} B_i$ *– пряма сума правих артінових локальних кілець, і* $C = \mathcal{J}(C)$ *або* $C/\mathcal{J}(C) \cong GF(2) \oplus \ldots \oplus GF(2)$;
(в) $B_i/\mathcal{J}(B_i)$ *– поле* $(i = 1, \ldots, k)$;
(г) $\mathcal{J}(C)$ *– нільпотентний ідеал;*
(д) $R = I$ *або* $R/I \cong \sum\limits_{i=1}^{m} F_i$, *де* $F_i \cong M_2(2)$, *або* $F_i \cong M_2(3)$.

Даний наслідок узагальнює деякі результати праць [5–6]. Його доведення випливає з теореми і з того, що приєднана група нільпотентного кільця є нільпотентною.

1. Плоткин Б.И. *Радикальные группы* // Мат. сборник. – 1955. – Т.37(79),N3. – С.507–526.
2. Hall Ph. *On non-stricly simple groups* // Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1963. – 59. – P.531–533.
3. Eldridge K.E. *On ring structures determined by groups* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol.23,N3. – P.472–477.
4. Ратинов А.В. *Полупримарные кольца с локально нильпотентной присоединенной группой* // Депонирована в ВИНИТИ, N1904–79 Деп. – Москва, 1979. – 21с.
5. Groza G. *Artinian rings having a nilpotent group of units* // J. Algebra. – 1989. – Vol.121,N2. – P.253–262.
6. Ishchuk Yu.B. *Semiperfect rings with periodic locally nilpotent group of units* // Matematychni Studii. – 1997. – Vol.7,N2. – P.125–128.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997