УДК 512.64

ПРО ІНВОЛЮЦІЇ В КІЛЬЦЯХ МАТРИЦЬ

В.Р.Зеліско, Л.Р.Сенькусь

Zelisko V.R., Sen'kus L.R. On involutions in the rings of matrices. The existence of some type of involutions in the rings of matrices is obtained. The problem of simmetrizability and factorizability of the direct product of matrices under these involutions is investigated.

Нехай K-комутативне кільце з інволюцією, визначеною як така операція ∇, що для довільних елементів $a,\ b \in K$ виконуються рівності:

$$(a+b)^{\nabla} = a^{\nabla} + b^{\nabla}, \quad (ab)^{\nabla} = a^{\nabla} b^{\nabla}, \quad (a^{\nabla})^{\nabla} = a.$$

На кільце матриць $M_n(K)$ інволюція ∇ переноситься таким чином [1]:

$$A^{\nabla} = (a_{ij})^{\nabla} = (a_{ji}^{\nabla}). \tag{1}$$

Матрицю A називають симетричною, якщо $A^{\nabla} = A$.

Відомо, [2], що в кільці $M_2(K)$ існує симплектична інволюція, визначена так:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{*} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{2}$$

У цій статті поняття симплектичної інволюції поширено на випадок матриць порядку 2^n, у кільці матриць парного порядку введено інволюцію мішаного типу, доведено теореми про взаємозв'язок між симетричними матрицями і їх прямим добутком при цих інволюціях.

Визначимо в кільці матриць $M_{2^n}(K)$ індукцією за n операцію $*$. При $n=1$ операція $*$ – – симплектична інволюція (2). Зобразимо 2^n-матрицю A у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

і покладемо

$$A^{*} = \begin{pmatrix} A_4^{*} & -A_2^{*} \\ -A_3^{*} & A_1^{*} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

де операція $*$ в кільці $M_{2^{n-1}}(K)$ знову визначається згідно (3) і (4), A_i – матриці порядку 2^{n-2}.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 15A23.

Теорема 1. *Операція $*$, визначена в (4), є симплектичною інволюцією в кільці $M_{2^n}(K)$.*

Доведення. Індукція за n. При $n = 1$ (2) є симплектичною інволюцією. Припустимо, що операція (4) є симплектичною інволюцією у випадку $A_i \in M_{2^{n-1}}(K)$, $i = \overline{1,4}$. Тоді для матриць $A, B \in M_{2^n}(K)$ одержимо :

$$(A+B)^* = \begin{pmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ A_3+B_3 & A_4+B_4 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} (A_4+B_4)^* & -(A_2+B_2)^* \\ -(A_3+B_3)^* & (A_1+B_1)^* \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} A_4^* & -A_2^* \\ -A_3^* & A_1^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_4^* & -B_2^* \\ -B_3^* & B_1^* \end{pmatrix} = A^* + B^*;$$
$$(AB)^* = \left(\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}\right)^* = \begin{pmatrix} A_1B_1+A_2B_3 & A_1B_2+A_2B_4 \\ A_3B_1+A_4B_3 & A_3B_2+A_4B_4 \end{pmatrix}^* =$$
$$= \begin{pmatrix} (A_3B_2+A_4B_4)^* & -(A_1B_2+A_2B_4)^* \\ -(A_3B_1+A_4B_3)^* & (A_1B_1+A_2B_3)^* \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} B_2^*A_3^*+B_4^*A_4^* & -(B_2^*A_1^*+B_4^*A_2^*) \\ -(B_1^*A_3^*+B_3^*A_4^*) & B_1^*A_1^*+B_3^*A_2^* \end{pmatrix};$$
$$B^*A^* = \begin{pmatrix} B_4^* & -B_2^* \\ -B_3^* & B_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_4^* & -A_2^* \\ -A_3^* & A_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_4^*A_4^*+B_2^*A_3^* & -(B_4^*A_2^*+B_2^*A_1^*) \\ -(B_3^*A_4^*+B_1^*A_3^*) & B_3^*A_2^*+B_1^*A_1^* \end{pmatrix}.$$

Отже, $(AB)^* = B^*A^*$. Аналогічно перевіряється умова $(A^*)^* = A$. Справді,

$$(A^*)^* = \begin{pmatrix} A_4^* & -A_2^* \\ -A_3^* & A_1^* \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} (A_1^*)^* & (A_2^*)^* \\ (A_3^*)^* & (A_4^*)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = A.$$

Теорему доведено.

Нехай в кільці матриць $M_{2n}(K)$ визначено операцію $\#$ таким чином:

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}^{\#} = \begin{pmatrix} A_4^{\nabla} & -A_2^{\nabla} \\ -A_3^{\nabla} & A_1^{\nabla} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

де A_i^{∇} визначені в (1).

Теорема 2. *Операція $\#$ є інволюцією в кільці $M_{2n}(K)$.*

Доведення. Досить показати, що

$$(A+B)^{\#} = A^{\#} + B^{\#}, \quad (AB)^{\#} = B^{\#}A^{\#}, \quad (A^{\#})^{\#}.$$

Перевіримо другу умову:

$$(AB)^{\#} = \left(\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}\right)^{\#} = \begin{pmatrix} A_1B_1+A_2B_3 & A_1B_2+A_2B_4 \\ A_3B_1+A_4B_3 & A_3B_2+A_4B_4 \end{pmatrix}^{\#} =$$

$$= \begin{pmatrix} (A_3B_2+A_4B_4)^{\nabla} & -(A_1B_2+A_2B_4)^{\nabla} \\ -(A_3B_1+A_4B_3)^{\nabla} & (A_1B_1+A_2B_3)^{\nabla} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B_2^\nabla A_3^\nabla + B_4^\nabla A_4^\nabla & -(B_2^\nabla A_1^\nabla + B_4^\nabla A_2^\nabla) \\ -(B_1^\nabla A_3^\nabla + B_3^\nabla A_4^\nabla) & B_1^\nabla A_1^\nabla + B_3^\nabla A_2^\nabla \end{pmatrix}.$$

$$B^{\#}A^{\#} = \begin{pmatrix} B_4^\nabla & -B_2^\nabla \\ -B_3^\nabla & B_1^\nabla \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_4^\nabla & -A_2^\nabla \\ -A_3^\nabla & A_1^\nabla \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B_4^\nabla A_4^\nabla + B_2^\nabla A_3^\nabla & -(B_4^\nabla A_2^\nabla + B_2^\nabla A_1^\nabla) \\ -(B_3^\nabla A_4^\nabla + B_1^\nabla A_3^\nabla) & B_3^\nabla A_2^\nabla + B_1^\nabla A_1^\nabla \end{pmatrix} = (AB)^{\#}.$$

Аналогічно перевіряються дві інші умови.

Теорему доведено.

Зауважимо, що встановлена інволюція $\#$ є узагальненням розглянутої у праці [3] інволюції у випадку, коли інволюція ∇ в кільці K є тотожною.

Розглянемо питання про симетричність прямого (кронекерівського) добутку матриць A, B, визначеного як матрицю $A \otimes B = (a_{ij}B) \in M_{n^2}(K)$, [4], де K– довільне комутативне кільце з одиницею.

Лема. *Для довільної матриці $A \in M_n(K)$ і одиничної матриці E порядку n справджуються рівності $(E \otimes A)^\nabla = E \otimes A^\nabla$, $(A \otimes E)^\nabla = A^\nabla \otimes E$ для кожної інволюції ∇ вигляду (1).*

Доведення. За означенням прямого добутку:

$$E \otimes A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & A \end{pmatrix}.$$

$$(E \otimes A)^\nabla = \begin{pmatrix} A & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & A \end{pmatrix}^\nabla = \begin{pmatrix} A^\nabla & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & A^\nabla \end{pmatrix} = E \otimes A^\nabla.$$

Аналогічно

$$(A \otimes E)^\nabla = \begin{pmatrix} a_{11}E & \dots & a_{1m}E \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}E & \dots & a_{nm}E \end{pmatrix}^\nabla = \begin{pmatrix} a_{11}^\nabla E^\nabla & \dots & a_{n1}^\nabla E^\nabla \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m}^\nabla E^\nabla & \dots & a_{nm}^\nabla E^\nabla \end{pmatrix}.$$

Оскільки $E^\nabla = E$, то

$$A \otimes E = \begin{pmatrix} a_{11}^\nabla E & \dots & a_{n1}^\nabla E \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m}^\nabla E & \dots & a_{nm}^\nabla E \end{pmatrix} = A^\nabla \otimes E.$$

Теорема 3. *Прямий добуток симетричних матриць над кільцем з інволюцією (1) є симетричною матрицею.*

Доведення. Нехай $A^\nabla = A, B^\nabla = B$. Тоді, використовуючи властивість прямого добутку [4], властивість інволюції [1] та попередню лему, дістанемо

$$(A \otimes B)^\nabla = ((A \otimes E)(E \otimes B))^\nabla =$$

$$= (E \otimes B)^\nabla (A \otimes E)^\nabla = (E \otimes B^\nabla)(A^\nabla \otimes E) = A^\nabla \otimes B^\nabla = A \otimes B.$$

Теорему доведено.

З доведення теореми 3 видно, що твердження цієї теореми справедливе і для симплектичної інволюції, визначеної рівністю (4), але не виконується для визначеної теоремою 2 інволюції $\#$.

Кажуть, що симетрична матриця $A \in M_n(K)$ є факторизованою, якщо існують такі матриці $B, C \in M_n(K)$, що

$$A = BCB^\nabla, \ C = C^\nabla.$$

Як наслідок з теореми 3 дістаємо твердження

Твердження. *Якщо A_1, A_2 – факторизовані симетричні матриці, то $A_1 \otimes A_2$ – факторизована.*

Доведення. Використовуючи властивості прямого добутку [4] і теорему 3, одержимо:

$$A_1 \otimes A_2 = B_1 C_1 B_1{}^\nabla \otimes B_2 C_2 B_2{}^\nabla = (B_1 \otimes B_2)(C_1 \otimes C_2)(B_1{}_1^\nabla \otimes B_2^\nabla) =$$

$$= (B_1 \otimes B_2)(C_1 \otimes C_2)(B_1 \otimes B_2)^\nabla.$$

Теорема 4. *Нехай A і B деякі матриці з тотожною інволюцією ∇, перенесеною на кільце матриць рівністю : $A^\nabla = A^\top$, для яких $(A \otimes B)^\nabla = A \otimes B$. Тоді $A^\nabla = A$, $B^\nabla = B$.*

Доведення. .Оскільки $(A \otimes B)^\nabla = A \otimes B$, то прирівнюючи елементи в перших n рядках і перших n стовпцях матриць $A \otimes B$ і $(A \otimes B)^\nabla$, дістанемо що $B = B^\nabla$.

Аналогічно, прирівнюючи елементи в перших n рядках і останніх n стовпцях цих матриць, отримаємо, що $A = A^\nabla$.

Теорему доведено.

Зауважимо, що для симплектичної інволюції твердження теореми 4 взагалі кажучи невірне.

1. Любачевский Б.Д. *Факторизация симметричных матриц с элементами из кольца с инволюцией.1* // Сибирск. матем. журнал. – 1973. – Т.14, N.2. – С. 337–350.
2. Скорняков А.А. Общая алгебра. Т.1. -М.: Наука, 1990.
3. Drensky J., Veselin S., Giambruno A.. *On the $*-$polynomial identities of minimal degree for matrices with involution.* // Boll.Un. Mat. Ital. – 1995. – A(7)9, N.3. – C. 471–482.
4. Ланкастер П. Теория матриц. -М., Наука, 1978.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997