УДК 512.64

ПРО ФАКТОРИЗАЦІЇ СИМЕТРИЧНИХ МАТРИЧНИХ ДВОЧЛЕНІВ

М.І.Кучма

Kuchma M.I. On factorizations of symmetric matrix binomials. Necessary and sufficient conditions of the factorization existence of a symmetric matrix binomials over a polynomial ring with involution are found.

У цій статті розглянуто питання про існування факторизацій комплексних симетричних матричних двочленів.

Нехай $K = \mathbb{C}[x]$ – кільце многочленів з інволюцією ∇, визначеною у праці [1]:

$$\left(\sum a_i x^i\right)^\nabla = \sum a_i^*(-x)^i, \tag{α}$$

$$\left(\sum a_i x^i\right)^\nabla = \sum a_i(-x)^i, \tag{β}$$

$$\left(\sum a_i x^i\right)^\nabla = \sum a_i x^i \tag{γ}$$

і перенесеною на кільце матриць $M_n(K)$ таким чином:

$$A(x)^\nabla = \|a_{ij}(x)\|^\nabla = \|a_{ji}(x)^\nabla\|.$$

Матрицю $A(x)$ називатимемо симетричною, якщо $A(x)^\nabla = A(x)$. Факторизацією матриці $A(x)$ з кільця $M_n(K)$ називають її зображення у вигляді

$$A(x) = B(x)CB(x)^\nabla, \tag{1}$$

де $C = C^\nabla$– деяка неособлива матриця, матричний многочлен $B(x)$ унітальний (старший коефіцієнт – одинична матриця).

Легко бачити, що матричний двочлен $A(x) = Ex^m - A$, де матриця $A \in M_n(\mathbb{C})$ і m парне число, є симетричним тоді і тільки тоді, коли матриця A є ермітовою при інволюції (α) і симетричною при інволюціях (β) і (γ). Надалі вважатимемо, що m – парне число.

Лема 1. *Нехай матриця $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\det A{\neq}0$, є симетричною і m – парне число. Тоді існує симетрична матриця $B \in M_n(\mathbb{C})$ така, що $B^m = A$.*

Доведення. Довільна симетрична матриця A ортогонально подібна до симетричної матриці [4]:

$$A = Q\widetilde{S}Q^T = Q\{\lambda_1 E_1 + S_1, \dots, \lambda_u E_u + S_u\}Q^T,$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 15A23.

де клітки $S_j, j = 1, \dots, u$, визначаються у такий спосіб:

$$S_j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & & & 0 \\ & \cdot & & \cdot & & & & & \\ 1 & & \cdot & & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot & & \cdot & & 1 \\ & & & & & \cdot & & \cdot & \\ 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & & 1 & & 0 \\ & & & & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot & & \cdot & & -1 \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ 1 & & \cdot & & \cdot & & & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot & & & & & \\ 0 & \cdot & -1 & & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Знайдемо матрицю U таку, що $U^m = \widetilde{S}$. Зважаючи на вигляд матриці $\widetilde{S}$, матриця U буде мати квазідіагональний вигляд [4]:

$$U = \{ \sqrt[m]{\lambda_1 E_1 + S_1},\ \sqrt[m]{\lambda_2 E_2 + S_2}, \dots,\ \sqrt[m]{\lambda_u E_u + S_u}\},$$

де матриця $\sqrt[m]{\lambda_j E_j + S_j}$ визначається за допомогою ряду:

$$\sqrt[m]{\lambda_j E_j + S_j} = \lambda^{1/m} E_j + \frac{1}{2 \cdot 1!}\frac{1}{m}\lambda^{1/m-1} S_j + \frac{1}{2 \cdot 2!}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\lambda^{1/m-2} S_j^2 + \dots \tag{3}$$

Як видно з (3), матриця U є симетричною, оскільки матриці S_j, $j = 1, \dots, u$, є симетричними. Тоді

$$A = Q\widetilde{S}Q^T = QU^mQ^T = QUQ^T \cdot \ldots \cdot QUQ^T = B^m,$$

де матриця $B = QUQ^T$. Легко бачити, що матриця B є симетричною і $\det B \neq 0$, оскільки матриця Q є ортогональною і $\det A \neq 0$.

Наслідок. *Нехай виконуються умови леми 1. Тоді існує кососиметрична матриця $B \in M_n(\mathbb{C})$ парного порядку така, що $B^m = A$.*

Доведення. Зважаючи на те, що квадрат кососиметричної матриці є симетричною матрицею, тобто $B^2 = C$, де $C = C^T$, маємо що $C^{m/2} = B^m = A$. Неособливість матриці B випливає із парності порядку матриці B і неособливості матриці A.

Зауваження. *Якщо $A \in M_n(\mathbb{C})$ є ермітовою невід'ємно визначеною матрицею, тоді існує єдина невід'ємно визначена ермітова матриця B така, що $B^m = A$ [2].*

Теорема 1. *Для симетричного матричного двочлена $A(x) = Ex^m - A$, де A– невироджена матриця, існує факторизація (1), у якій $B(x)$ має вигляд*

$$B(x) = (Ex - B)(Ex - \varepsilon B) \dots (Ex - \varepsilon^{m/2-1} B), \tag{4}$$

де ε – первісний корінь і матриця B – корінь m-го степеня відповідно з одиниці і матриці A.

Доведення. Згідно з результатами праці [3] симетричний матричний двочлен $A(x) = Ex^m - A$ при $\det A \neq 0$ розкладається на лінійні множники

$$A(x) = (Ex - B)(Ex - \varepsilon B) \dots (Ex - \varepsilon^{m-1} B). \tag{5}$$

Враховуючи, що для ε – первісного кореня m–го степеня з одиниці – справджуються рівності

$$\varepsilon^k = -\varepsilon^{m/2+k}, \quad k = 0, 1, ..., m/2, \tag{6}$$

отримаємо

$$\begin{aligned} A(x) &= (Ex - B)(Ex - \varepsilon B)...(Ex - \varepsilon^{m/2-1}B)(Ex + B)(Ex + \varepsilon B)...(Ex + \varepsilon^{m/2-1}B) = \\ &= (Ex - B)\dots(Ex - \varepsilon^{m/2-1}B)C(Ex - \varepsilon^{m/2-1}B)^{\nabla}\dots(Ex - B)^{\nabla}, \end{aligned} \tag{7}$$

де матриця $C = \mathrm{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$. Розклад (7) є факторизацією вигляду (1), оскільки матриця B є симетричною і кососиметричною відповідно при інволюціях (β) і (γ) та ермітовою при інволюції (α) згідно з лемою 1, наслідком та зауваженням.

Наслідок. *Факторизація (1) при інволюції (α) можлива лише при $m = 2$.*

Доведення. З рівності (7) видно, що при дії інволюції (α) первісний корінь ε повинен залишатися дійсним. Це можливо, коли ε є первісним коренем 2-го степеня з одиниці.

Для симетричного матричного двочлена $A(x) = Ex^m - A$, де матриця A – особлива, необхідні і достатні умови факторизації вигляду (1) сформулюємо в термінах теорії елементарних дільників [4].

Теорема 2. *Для симетричного матричного двочлена $A(x) = Ex^m - A$ існує факторизація (1), у якій $B(x)$ має вигляд (4) тоді і тільки тоді, коли система елементарних дільників матриці A, що відповідає нульовому характеристичному числу, складається лише із підсистем, які містять або елементарні дільники тільки першого степеня, або m елементарних дільників, показники яких або рівні, або відрізняються на одиницю.*

Доведення. Довільна комплексна симетрична матриця A ортогонально подібна симетричній матриці [4]:

$$Q^T A Q = \widetilde{S},$$

де $\widetilde{S} = \lambda_1 E^{(p_1)} + S^{(p_1)}, \lambda_2 E^{(p_2)} + S^{(p_2)}, \dots, \lambda_u E^{(p_u)} + S^{(p_u)}$, клітки $S^{(p)}$ мають вигляд (2).

Щоб матричний двочлен $Ex^m - A$ міг бути зображений у вигляді добутку лінійних множників необхідно і достатньо, щоб матричний двочлен $Ex^m - S$, де $S = \{S^{(p_1)}, \dots, S^{(p_t)}\}$, можна було зобразити у вигляді добутку лінійних множників.

Знайдемо таку симетричну (ермітову, кососиметричну) матрицю U, що $U^m = S$. Існування матриці U, згідно з результатами праці [3], передбачає, щоб система елементарних дільників матриці S складалася лише із підсистем, які містять або елементарні дільники тільки першого степеня, або m елементарних дільників, показники яких або рівні, або відрізняються на одиницю. За теоремою 1 для $A(x) = Ex^m - A$ існує факторизація при інволюції (β) ((α), (γ)).

З теореми 2 випливає наслідок аналогічний до наслідку з теореми 1.

Дослідимо питання про факторизацію вигляду (1) симетричного матричного двочлена $A(x) = Ex^m - A$, коли множник $B(x)$ є матричним двочленом степеня $m/2$.

Теорема 3. *Для $A(x) = Ex^m - A$, де $A(x) = A(x)^\nabla$, існує факторизація (1), у якій $B(x)$ є матричним двочленом степеня $m/2$.*

Доведення. Розглянемо розклад на лінійні множники (5) симетричного матричного двочлена $A(x) = Ex^m - A$ при $\det A \neq 0$:

$$A(x) = (Ex - B)(Ex - \varepsilon B)\dots(Ex - \varepsilon^{m-1}B)$$

Згрупувавши відповідні множники $Ex - \varepsilon^i B$, де $i = 0, \dots, m-1$, за підгрупою, породженою елементом ε^2, отримаємо:

$$A(x) = (Ex - B)(Ex - \varepsilon^2 B)\dots(Ex - \varepsilon^{m-2}B)(Ex - \varepsilon B)(Ex - \varepsilon^3 B)\dots(Ex - \varepsilon^{m-1}B) =$$
$$= (Ex^{m/2} - B^{m/2})(Ex - \varepsilon B)\dots(Ex - \varepsilon^{m-1}B).$$

Оскільки $A(x)$ є матричним двочленом, то переконуємось, що

$$(Ex - \varepsilon B)(Ex - \varepsilon^3 B)\dots(Ex - \varepsilon^{m-1}B) = Ex^{m/2} + B^{m/2}.$$

Тому

$$A(x) = (Ex^{m/2} - B^{m/2})(Ex^{m/2} + B^{m/2}) = (Ex^{m/2} - B^{m/2})C(Ex^{m/2} - B^{m/2})^\nabla, \quad (8)$$

де матриця $C = \mathrm{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$. Для симетричного матричного двочлена $A(x)$ існує факторизація вигляду (8) на підставі леми 1, наслідку з леми 1 та зауваження.

Розглянемо питання про факторизацію вигляду (1) симетричного матричного двочлена $A(x) = Ex^m - A$, який розкладається в добуток унітальних нерозкладних матричних двочленів:

$$A(x) = (Ex^{m_1} - B_1)(Ex^{m_2} - B_2)\dots(Ex^{m_r} - B_r), \quad \sum_{i=1}^{r} m_i = m \quad (9)$$

Лема 2. *Добуток матричних двочленів (9) є знову матричним двочленом вигляду*

$$A(x) = (Ex^s - B)(Ex^s - \varepsilon B)\dots(Ex^s - \varepsilon^{m/s-1}B), \quad (10)$$

якщо він задовольняє такі умови:

(i) всі степені m_i матричних двочленів з (9) дорівнюють s;

(ii) матриці B_i мають вигляд $B_i = \varepsilon^k B$, $i = 1, \dots, r$, де ε – первісний корінь m/s-го степеня з одиниці.

Доведення. Справді, якщо всі степені m_i у рівності (9) дорівнюють s і матриці B_i, вигляду $B_i = \varepsilon^k B$, $i = 1, \dots, r$, де ε – первісний корінь m/s- го степеня з одиниці, то $A(x)$ буде матричним двочленом вигляду (10).

Дослідимо умови факторизації симетричного матричного двочлена $A(x)$ вигляду (10), для якого m/s – парне число.

Теорема 4. *Для симетричного матричного двочлена $A(x) = Ex^m - A$, де A– нільпотентна матриця, існує факторизація вигляду (1), у якій множник $B(x)$ розкладається в добуток нерозкладних матричних двочленів тоді і тільки тоді, коли система елементарних дільників матриці A, що відповідає нульовому характеристичному числу, складається лише із підсистем, які містять або елементарні дільники тільки першого степеня, або m/s елементарних дільників, показники степенів яких або рівні, або відрізняються на одиницю.*

Доведення. Нехай матричний двочлен $A(x) = Ex^m - A$, де A – нільпотентна матриця, розкладається в добуток унітальних нерозкладних двочленів вигляду

$$A(x) = (Ex^s - B)(Ex^s - \varepsilon B)\dots(Ex^s - \varepsilon^{m/s-1}B),$$

де ε – первісний корінь і матриця B – корінь m/s-го степеня відповідно з одиниці і матриці A.

Зважаючи на рівності (6), попередня рівність перепишеться так:

$$\begin{aligned} A(x) = (Ex^s - B)(Ex^s - \varepsilon B)\dots(Ex^s - \varepsilon^{m/(2s)-1}B)(Ex^s + B)\times \\ \times(Ex^s + \varepsilon B)\dots(Ex^s + \varepsilon^{m/(2s)-1}B) = (Ex^s - B)\dots(Ex^s - \varepsilon^{m/(2s)-1}B)C\times \\ \times(Ex^s - \varepsilon^{m/(2s)-1}B)^{\nabla}\dots(Ex^s - B)^{\nabla}, \end{aligned} \tag{11}$$

де матриця $C = \mathrm{diag}(\pm1, \dots, \pm1)$.

Зауважимо, що розклад (11) є факторизацією вигляду (1) тоді і тільки тоді, коли виконуються вказані умови на систему елементарних дільників матриці A.

Відзначимо, що факторизація (11) при інволюції (α) можлива лише для $m = 2$.

1. Любачевский Б.Д. *Факторизация симметричных матриц с элементами из кольца с инволюцией. Ч.1* // Сибирск. матем. журнал. – 1973. – Т. 14, N 2. – С.337–356.
2. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. - М.: Мир, 1989. – 655 с.
3. Казімірський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. - К.: Наукова думка, – 1981. – 224 с.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1988. – 552 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997