УДК 517.537.72

ОЦІНКИ МАКСИМУМУ МОДУЛЯ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

О.М.Мулява , Я.Я.Притула

Mul'ava O.M., Prytula Ya.Ya. Estimates of maximum modulus of an entire Dirichlet series. Let $S(\Lambda)$ be a class of entire Dirichlet series $F(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n)$, $s = \sigma + it$, where $\Lambda = (\lambda_n) > 0 \uparrow +\infty$. For $F \in S(\Lambda)$ let $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : \ t \in \mathbb{R}\}$, and $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ be the maximal term.

By Ω we denote a class of positive unbounded on $(-\infty, +\infty)$ functions Φ such that the derivative Φ' is a continuous positive and growing to $+\infty$ on $(-\infty, +\infty)$ function. For $\Phi \in \Omega$ via $S(\Lambda, \Phi)$ we denote a subclass of entire Dirichlet series such that $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

In the class $S(\Lambda, \Phi)$ it is shown necessary and sufficient condition on Λ for fulfilling the correlation $M(\sigma, F) \leqslant \mu\Big(\dfrac{\sigma}{1-\beta}, F\Big)^{1-\beta}$, $\beta \in (0,1)$ for all $\sigma \geqslant \sigma_0$.

Нехай $\Lambda = (\lambda_n)$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, а $S(\Lambda)$ — клас цілих (абсолютно збіжних в $\mathbb{C}$) рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n), \quad s = \sigma + it. \tag{1}$$

Серед коефіцієнтів a_n ряду (1) можуть зустрічатись рівні нулеві, але вважаємо, що цей ряд не зводиться до експоненціального многочлена.

Для $F \in S(\Lambda)$ нехай $M(\sigma) = M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : \ t \in \mathbb{R}\}$, а $\mu(\sigma) = \mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ — максимальний член ряду (1). Добре відомо [1, с. 182; 2, с. 21], що $\mu(\sigma, F) \leqslant M(\sigma, F)$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$. Оцінки $M(\sigma)$ через $\mu(\sigma)$ зверху залежать від щільності показників λ_n ряду (1). Ще в 1924 році Ж.Валірон [3] (див. також [1, с. 184] і [2, с. 32]) показав, що якщо $\ln n \leqslant (\tau + o(1))\lambda_n \, (n \to \infty)$, то

$$M(\sigma, F) \leqslant \mu(\sigma + \tau + o(1), F), \quad \sigma \to \infty. \tag{2}$$

Цей результат уточнено в [4], де доведена така

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50.

Теорема А. *Нехай $\tau \in [0, +\infty)$. Для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda)$ справджувалось співвідношення (2), необхідно і досить, щоб $\ln n \leqslant (\tau + o(1))\lambda_n$ $(n \to \infty)$.*

З цієї теореми випливає, що якщо $\ln n = O(\lambda_n)$, $n \to \infty$, то для кожної сталої $A > 1$ і всіх досить великих σ справедлива нерівність $M(\sigma) \leqslant \mu(A\sigma)$. Виникає питання, чи існує послідовність $\Lambda, \ln n \neq O(\lambda_n), n \to \infty$, і стала $A > 1$ такі, що $M(\sigma, F) \leqslant \mu(A\sigma, F), \sigma \geqslant \sigma_0$, для кожної $F \in S(\Lambda)$. Негативна відповідь на це питання міститься в наступній теоремі.

Теорема Б [4]. *Для кожних послідовності Λ такої, що $\ln n \neq O(\lambda_n)$, $n \to \infty$, і сталої $A \in (1, +\infty)$ існують функція $F \in S(\Lambda)$ і послідовність $(\sigma_j) \uparrow +\infty$ такі, що $M(\sigma_j, F) \geqslant \mu(A\sigma_j, F)$ для всіх $j \in \mathbb{N}$.*

Проте в певних підкласах функцій із $S(\Lambda)$, які визначаються обмеженням на зростання $\mu(\sigma)$ (чи спаданням коефіцієнтів), можна вказати умову на Λ, при виконанні якої існує стала A така, що $M(\sigma, F) \leqslant\leqslant \mu(A\sigma, F)$, $\sigma \geqslant \sigma_0$, для кожної функції F з даного підкласу.

Через Ω позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' є неперервною, додатною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ функцією. Нехай φ — обернена до Φ' функція, а $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ — функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [5; 2, с. 17] функція Ψ неперервна на $(-\infty, +\infty)$ і зростає до $+\infty$.

Для $\Phi \in \Omega$ через $S(\Lambda, \Phi)$ позначимо підклас цілих рядів Діріхле (1) таких, що $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Справедлива така

Теорема 1. *Нехай $\Phi \in \Omega$ і $\beta \in [0, 1)$. Для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda, \Phi)$ виконувалась нерівність*

$$M(\sigma, F) \leqslant \mu\Big(\frac{\sigma}{1 - \beta - \varepsilon}, F\Big)^{1-\beta-\varepsilon} \tag{3}$$

для кожного $\varepsilon \in (0, 1 - \beta)$ і всіх $\sigma \geqslant \sigma_0(\varepsilon)$, необхідно і досить, щоб

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))} \leqslant \beta. \tag{4}$$

Оцінку (3) ми отримаємо із загальнішої нерівності, яка в дещо іншому вигляді є тільки в [6] і уточнює відповідні результати з [7] і [2, с. 21].

Через L позначимо клас неперервних зростаючих до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ функцій, а для $q \in L$ покладемо

$$p(\sigma) = \sup\Big\{\frac{\sigma - t}{q^{-1}(\sigma) - q^{-1}(t)}:\ -\infty \leqslant t < \sigma\Big\}.$$

Лема 1. *Якщо $q \in L$ і*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \exp\left\{\lambda_n q\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)\right\} = K_0 < +\infty, \tag{5}$$

то для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$

$$M(\sigma) \leqslant K_0 \mu\left(q^{-1}(\sigma)\right)^{p(\sigma)} + K_0 + |a_0|. \tag{6}$$

Доведення. Покладемо $r_n = \dfrac{1}{\lambda_n} \ln \dfrac{1}{|a_n|}$, $n \geqslant 1$. Оскільки ряд (1) збігається абсолютно в $\mathbb{C}$, то $r_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$. Зрозуміло також, що

$$M(\sigma, F) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} = |a_0| + \left(\sum_{r_n < q^{-1}(\sigma)} + \sum_{r_n \geqslant q^{-1}(\sigma)} \right) |a_n| \mathrm{e}^{\sigma\lambda_n}. \tag{7}$$

Якщо $r_n < q^{-1}(\sigma)$, то

$$|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} = |a_n|^{1-p(\sigma)} \left(|a_n| \mathrm{e}^{\lambda_n q^{-1}(\sigma)} \right)^{p(\sigma)} \mathrm{e}^{(\sigma - p(\sigma) q^{-1}(\sigma))\lambda_n} \leqslant$$
$$\leqslant \mu\left(q^{-1}(\sigma)\right)^{p(\sigma)} |a_n| \exp\left\{ \lambda_n \left(\sigma - \frac{\sigma - q(r_n)}{q^{-1}(\sigma) - q^{-1}(q(r_n))} \left(q^{-1}(\sigma) - r_n\right) \right) \right\}$$
$$= \mu\left(q^{-1}(\sigma)\right)^{p(\sigma)} |a_n| \exp\{\lambda_n q(r_n)\},$$

а якщо $r_n \geqslant q^{-1}(\sigma)$, то $|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \leqslant |a_n| \exp\{\lambda_n q(r_n)\}$. Тому з (7), завдяки (5), випливає нерівність (6).

Лема 2. *Нехай $\gamma > 0$ і $\delta = A(\gamma - 1)$ — довільні числа. Якщо*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{(\gamma - 1)\ln|a_n| + \delta\lambda_n}{\ln n} = h(\gamma, \delta) > 1, \tag{8}$$

то для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$ справедлива оцінка

$$M(\sigma) \leqslant K\mu\left(\frac{\sigma + \delta}{\gamma}\right)^{\gamma}, \quad K \equiv const. \tag{9}$$

Доведення. Виберемо функцію $q(x) = \gamma x - \delta$. Тоді умова (5) набуде вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp\{-((\gamma - 1)\ln|a_n| + \delta\lambda_n)\} \leqslant K_0 < \infty,$$

яка, зрозуміло, виконується, якщо виконується умова (8). Тому за лемою 1 справедлива оцінка (6) з $q(x) = \gamma x - \delta$. Але $q^{-1}(\sigma) = \dfrac{\sigma + \delta}{\gamma}$, $p(\sigma) = \gamma$, і тому з (8) маємо

$$M(\sigma) \leqslant K_0 \mu\left(\frac{\sigma + \delta}{\gamma}\right)^{\gamma} + K_0 + |a_0| \leqslant K\mu\left(\frac{\sigma + \delta}{\gamma}, F\right)^{\gamma}, \quad K = 2K_0 + |a_0|.$$

Лема 2 доведена.

Припустимо, що

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{-\ln|a_n|} \leqslant \beta < 1, \tag{10}$$

і виберемо $\delta = 0$ і $\gamma = 1 - \beta - \varepsilon/2$. Тоді

$$h(\gamma, \delta) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{-(\beta + \varepsilon/2)\ln|a_n|}{\ln n} \geqslant \frac{\beta + \varepsilon/2}{\beta} > 1,$$

і за лемою 2

$$M(\sigma, F) \leqslant K\mu\Big(\frac{\sigma}{1-\beta-\varepsilon/2}, F\Big)^{1-\beta-\varepsilon/2}, \quad K = K(\varepsilon) \equiv \text{const} > 0. \tag{11}$$

В [5; 2, с. 18] показано, що якщо $\Phi \in \Omega$, то для того щоб $\ln \mu(\sigma) \leqslant \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб $\ln |a_n| \leqslant -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geqslant 0$. Тому, якщо $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$ і виконується умова (4), то виконується і умова (10), тобто, справедлива нерівність (11).

Нерівність (5) легко випливає з (11), оскільки, з огляду на рівність

$$\ln \mu(\sigma, F) = \ln \mu(\sigma_0, F) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda_{\nu(t)}\, dt, \quad \sigma > \sigma_0,$$

де $\nu(\sigma)$ — центральний індекс ряду (1), для будь-якого $\delta > 0$ виконується

$$\ln \mu\big((1+\delta)\sigma, F\big) - (1+\delta) \ln \mu(\sigma, F) =$$
$$= \int_{\sigma}^{(1+\delta)\sigma} \lambda_{\nu(t)}\, dt - \delta \ln \mu(\sigma, F) \geqslant \delta\sigma\lambda_{\nu(\sigma)} - \delta\big(\ln |a_{\nu(\sigma)}| + \sigma\lambda_{\nu(\sigma)}\big) =$$
$$= \delta \ln \frac{1}{|a_{\nu(\sigma)}|} \to +\infty \quad (\sigma \to +\infty).$$

Достатність умови (4) в теоремі 1 доведена.

Для доведення її необхідності нам буде потрібна наступна

Лема 3. *Нехай γ — додатна, неперервна і неспадна на $[0, \infty)$ функція, а*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \gamma(\lambda_n)} > 1, \tag{12}$$

Тоді існує зростаюча підпослідовність $(\lambda_k^\star)$ послідовності Λ така, що

$$\ln k \leqslant \lambda_k^\star \gamma(\lambda_k^\star) + 1 \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{13}$$

і

$$\ln k_j \geqslant \lambda_{k_j}^\star \gamma(\lambda_{k_j}^\star) \tag{14}$$

для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.

Доведення. З умови (12) випливає існування числа

$$k_1 = \min\{k \geqslant 2 : \ln k \geqslant \lambda_k \gamma(\lambda_k)\}.$$

Ясно, що $\ln k < \lambda_k \gamma(\lambda_k)$ при $1 \leqslant k < k_1$, $\ln k_1 \geqslant \lambda_{k_1} \varphi(\lambda_{k_1})$ і

$$\ln k_1 = \ln(k_1 - 1) + \ln\Big(1 + \frac{1}{k_1 - 1}\Big) \leqslant \lambda_{k_1 - 1}\gamma(\lambda_{k_1 - 1}) + 1 < \lambda_{k_1}\gamma(\lambda_{k_1}) + 1.$$

Отже, якщо покладемо $\lambda_k^\star = \lambda_k$ для $1 \leqslant k \leqslant k_1$, то для таких k мають місце нерівності (13) і (14).

Покладемо тепер

$$j_1 = \min\{j \in \mathbb{N} : \ln(k_1+1) < \lambda_{k_1+j}\gamma(\lambda_{k_1+j})\}$$

і з послідовності Λ викинемо числа $\lambda_{k_1+1}, \dots, \lambda_{k_1+j_1}$, тобто покладемо $\lambda^\star_{k_1+1} = \lambda_{k_1+j_1+1}$.

Завдяки (12), існує

$$k_2 = \min\{k \geqslant k_1+2 : \ln k \geqslant \lambda_{k+j_1}\gamma(\lambda_{k+j_1})\}.$$

Тоді $\ln k < \lambda_{k+j_1}\gamma(\lambda_{k+j_1})$ при $k_1+1 \leqslant k < k_2, \ln k_2 \geqslant \lambda_{k_2+j_1}\gamma(\lambda_{k_2+j_1})$ і $\ln k_2 \leqslant \ln(k_2-1)+1 \leqslant \lambda_{k_2+j_1}\gamma(\lambda_{k_2+j_1})+1$. Тому, якщо покладемо $\lambda^\star_k = \lambda_{k+j_1}$ для $k_1+1 \leqslant k \leqslant k_2$, то для таких k також виконуються нерівності (13) і (14).

Якщо k_l і j_{l-1}, $l \geqslant 2$ вже вибрані, то покладемо

$$j_l = \min\{j \in \mathbb{N} : \ln(k_l+1) < \lambda_{k_l+j_1+\dots+j_{l-1}+1}\gamma(\lambda_{k_l+j_1+\dots+j_{l-1}+1})\}$$

і з послідовності Λ викинемо члени $\lambda_{k_l+j_1+\dots+j_{l-1}+1}, \dots, \lambda_{k_l+j_1+\dots+j_{l-1}+j_l}$, тобто покладемо $\lambda^\star_{k_l+1} = \lambda_{k_l+j_1+\dots+j_l+1}$. З огляду на (12), існує

$$k_{l+1} = \min\{k \geqslant k_l+2 : \ln k \geqslant \lambda_{k+j_1+\dots+j_l}\gamma(\lambda_{k+j_1+\dots+j_l})\}.$$

Тоді

$$\ln k < \lambda_{k+j_1+\dots+j_l}\gamma(\lambda_{k+j_1+\dots+j_l}), \quad k_l+1 \leqslant k < k_{l+1},$$

і, як вище

$$\lambda_{k_{l+1}+j_1+\dots+j_l}\gamma(\lambda_{k_{l+1}+j_1+\dots+j_l}) \leqslant \ln k_{l+1} \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_{k_{l+1}+j_1+\dots+j_l}\gamma(\lambda_{k_{l+1}+j_1+\dots+j_l})+1.$$

Тому, якщо покладемо $\lambda^\star_k = \lambda_{k+j_1+\dots+j_l}$, $k_l+1 \leqslant k \leqslant k_{l+1}$, то для таких k знову маємо (13) і (14). Лема 3 доведена.

Доведемо необхідністі умови (4) в теоремі 1. Припустимо, що вона не виконується, тобто,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))} = B > \beta.$$

Покладемо $\gamma = b\Psi(\varphi(x))$, $\beta < b < \min\{1, B\}$. Тоді виконується (14), і за лемою 1 існує підпослідовність $(\lambda^\star_k)$, для якої виконуються нерівності (13) і (14). Покладемо, далі, $a_n = 0$ при $\lambda_n \neq \lambda^\star_k$ і $a_n = a^\star_k = \exp\{-\lambda^\star_k\Psi(\varphi(\lambda^\star_k))\}$ при $\lambda_n = \lambda^\star_k$. Так ми прийдемо до ряду Діріхле

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-\lambda_k\Psi(\varphi(\lambda_k)) + s\lambda_k\}, \tag{15}$$

де для простоти $\lambda_k = \lambda^\star_k$. Оскільки $b \in (0,1)$ і виконується (13) з $\gamma(x) = b\Psi(\varphi(x))$, то ряд (15) є цілим. Для цього ряду з критерію, наведеного при доведенні достатності випливає, що $\ln\mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$. Далі, якщо виберемо $q_j = \left[\frac{1}{2}k_j\right]$, то з (13) і (14) маємо

$$b\lambda_{q_j}\Psi(\varphi(\lambda_{q_j})) \geqslant \ln q_j - 1 \geqslant \ln k_j - 4 \geqslant b\lambda_{k_j}\Psi(\varphi(\lambda_{k_j})) - 4.$$

Тому для кожного $\sigma \in \mathbb{R}$ маємо

$$
\begin{aligned}
M(\sigma, F) &\geqslant \sum_{q_j \leqslant k \leqslant k_j} \exp\{-\ln a_k + \sigma\lambda_k\} \geqslant \frac{1}{2} k_j \exp\{-\lambda_{k_j}\Psi(\varphi(\lambda_{k_j})) + \sigma\lambda_{q_j}\} \geqslant \\
&\geqslant \frac{1}{2}\exp\{-\lambda_{k_j}\Psi(\varphi(\lambda_{k_j}))(1-b) + \sigma\lambda_{q_j}\} \geqslant \\
&\geqslant \frac{1}{2}\exp\left\{-(1-b)\lambda_{q_j}\Psi(\varphi(\lambda_{q_j})) + \sigma\lambda_{q_j} - \frac{4(1-b)}{b}\right\} = \\
&= K_1\left(\exp\left\{-\lambda_{q_j}\Psi(\varphi(\lambda_{q_j})) + \frac{\sigma}{1-b}\lambda_{q_j}\right\}\right)^{1-b}, \quad K_1 = \frac{1}{2}\exp\{-\frac{4(1-b)}{b}\}.
\end{aligned}
$$

Якщо виберемо $\sigma_j = (1-b)\varphi(\lambda_{q_j})$, то звідси матимемо

$$
\begin{aligned}
M(\sigma_j, F) &\geqslant K_1\big(\exp\{\Phi(\varphi(\lambda_{q_j}))\}\big)^{1-b} = \\
&= K_1\left(\exp\left\{\Phi\left(\frac{\sigma_j}{1-b}\right)\right\}\right)^{1-b} \geqslant K_1\mu\left(\frac{\sigma_j}{1-b}, F\right)^{1-b}.
\end{aligned}
$$

Оскільки $b > \beta$, то, як при доведенні достатності, звідси отримуємо, що для функції (15) нерівність (3) не виконується. Теорема 1 повністю доведена.

1. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент . – М.: Наука. – 1976. – 536 с.
2. Шеремета М.М. Цілі ряди Діріхле . – К.: ІСДО. – 1993. – 168 с.
3. Valiron G. *Sur l'abscisse de convergence des series de Dirichlet* // Bull. Soc. Math de France. – 1924. – Vol. 52. – P. 86–98.
4. Притула Я.Я. *Про максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле* // Вісник Львівського ун-ту "Питання алгебри та мат. фізики". – 1995. – Вип. 43. – С. 25–30.
5. Шеремета М.Н. *Двучленная асимптотика целых рядов Дирихле* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1990. – Вып. 54. – С. 16–25.
6. Шеремета М.М., Притула Я.Я., Фединяк С.І. *Зростання рядів Діріхле* – Львів. – 1995. – 30 с. – Препринт N 18-95. – Наук.-учб. центр мат. моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України.
7. Винницкий Б.В. *О росте целых функций, заданых рядами* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(\lambda_n z)$ // Укр. матем. журн. – 1979. – Т. 31, N 5. – С. 534–540.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997