УДК 517.576

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

О. Б. Скасків, Р. Д. Боднар

Skaskiv O. B., Bodnar R. D. The speed of convergence of the Dirichlet series. One finds necessary condition for the thruth of the relation $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{h(n)}\ln\frac{1}{\sigma_n(F)}=+\infty$ in the class of absolutely convergent in the half plane $\{z: Re z<0\}$ Diriclet series

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{z\lambda_n},\ a_0=1,\ a_n\geqslant 0\ \ (n\geqslant 1),$$

where $h(x)\uparrow+\infty\ \ (x\to-0)$ is a certain function,

$$\sigma_n=\sup\left\{\frac{1}{\sum_{k=1}^n a_ke^{x\lambda_k}}-\frac{1}{F(z)}:x<0\right\}.$$

Через $H_a(\Lambda)$ позначимо клас аналітичних у півплощині $\Pi_a=\{z: Re\, z<a\}$, $-\infty<a\leqslant+\infty$, функцій F, зображуваних абсолютно збіжними в Π_a рядами Діріхле вигляду

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{z\lambda_n},\quad a_0=1,\quad a_n\geqslant 0\quad (n\geqslant 1),\tag{1}$$

де $\Lambda=(\lambda_n)$, $0=\lambda_0<\lambda_n\uparrow+\infty$ $(1\leqslant n\to+\infty)$. Визначимо подібно, як і в праці [1], для функції $F\in H_a(\Lambda)$

$$\sigma_n(F)=\sup\left\{\frac{1}{S_n(x)}-\frac{1}{F(x)}:x<a\right\},$$

де $S_n(x)=\sum_{j=0}^n a_je^{x\lambda_j}$. Відзначимо, що оцінки величин, визначених подібно як і $\sigma_n(F)$, для цілих функцій вигляду $f(x)=\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$, $a_0=1$, $a_n\geqslant 0$ $(n\geqslant 1)$, за допомогою часткових сум ряду Тейлора, використовуються у раціональній апроксимації на $[0,+\infty)$ таких функцій (див. [2]).

Нехай L – клас функцій $h(x)$ – додатних, неперервних, зростаючих до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ і L_1 – клас функцій $h\in L$ таких, що $h(x)\geqslant x$ $(x\geqslant 0)$, $h(0)=0$. У статті [3] доведено таку теорему.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50.

Робота виконана при частковій підтримці Міжнародної Соросівської Програми підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP), гранти N APU 071097 і N GSU 071164.

Теорема А[3]. *Нехай $h \in L_1$. Для того, щоб для кожного цілого ряду Діріхле $F \in H_{+\infty}(\Lambda)$ виконувалось співвідношення*

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{h(\ln n)} \ln \frac{1}{\sigma_n(F)} = +\infty \tag{2}$$

необхідно і досить, щоб

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(\ln n(t))}{t^2} dt < +\infty, \tag{3}$$

де $n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1$ – лічильна функція послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$.

У даній замітці встановлено, що в класі $H_0(\Lambda)$ ніяка умова на зростання лише послідовності Λ (у тому числі і умова (3)) не може забезпечувати справедливість співвідношення (2).

Теорема 1. *Для будь-яких функцій $h \in L_1$, $\Phi \in L$ і для кожної послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \leqslant n \to +\infty)$ існує функція $F \in H_0(\Lambda)$ вигляду (1) така, що*

$$\mu(x, F) := \sup\{a_n e^{x\lambda_n} : n \geqslant 0\} \leqslant \exp\left\{\Phi\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\} \quad (x_0 \leqslant x < 0), \ \sup\{a_n : n \geqslant 0\} = +\infty$$

і співвідношення (2) не виконується.

Доведення. Позначимо $c_n = \ln(n+1) - \ln n$ $(n \geqslant 1)$, $\varphi(t)$ – функцію, обернену до $\Phi(t)$. Припустимо, що

$$\varphi(\ln(n+1)) \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{c_k}{\lambda_k} \leqslant 1 \quad (n \geqslant 1) \tag{4}$$

і розглянемо ряд Діріхле вигляду (1) з коефіцієнтами, що визначаються у такий спосіб:

$$\ln a_n = \ln a_{n-1} + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k} \ \ (n \geqslant 1), \ \ a_0 = 1.$$

Зауважимо, що з (4) випливає $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$, а тому

$$\ln a_n = \ln(n+1) + \lambda_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{c_k}{\lambda_k} = o(\lambda_n) \quad (n \to +\infty) \tag{5}$$

і, отже, при фіксованому $x < 0$,

$$\ln a_n + x\lambda_n = (1 + o(1))x\lambda_n = -E_n \ln n \ \ (n \to +\infty),$$

де $E_n \to +\infty$, тому ряд (1) абсолютно збіжний в Π_0, тобто $F \in H_0(\Lambda)$. Відзначимо, що із (5) випливає $a_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$.

Оскільки

$$\kappa_n := \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \ln \frac{a_{n-1}}{a_n} = -\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{c_k}{\lambda_k} \uparrow 0 \ \ (n \to +\infty),$$

то для $x \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1}]$ (див., наприклад, [4, с. 19]) $\mu(x,F) = \max\{a_j e^{x\lambda_j} : j \geqslant 0\} = a_n e^{x\lambda_n}$, тому з (5) і (4) маємо для $x \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1}]$ і $n \geqslant 1$

$$\ln \mu(x,F) \leqslant \ln \mu(\varkappa_{n+1}, F) = \ln(n+1) \leqslant \Phi\left(\frac{1}{|\varkappa_n|}\right) \leqslant \Phi\left(\frac{1}{|x|}\right). \tag{6}$$

Зауважимо тепер, що для $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\sigma_n(F) &\geqslant \frac{1}{S_n(\varkappa_{n+1})} - \frac{1}{F(\varkappa_{n+1})} \geqslant \frac{1}{S_n(\varkappa_{n+1})} - \frac{1}{S_{n+1}(\varkappa_{n+1})} = \\ &= \mu(\varkappa_{n+1}, F)(S_n(\varkappa_{n+1})S_{n+1}(\varkappa_{n+1}))^{-1} \geqslant ((n+1)(n+2)\mu(\varkappa_{n+1}, F))^{-1}.\end{aligned} \tag{7}$$

Звідси, враховуючи (6) і нерівність $x \leqslant h(x)$, маємо при $n \to +\infty$

$$\ln \frac{1}{\sigma_n(F)} \leqslant 3\ln(n+1) + o(1) \leqslant (3 + o(1))h(\ln n) \tag{8}$$

і, отже, якщо виконується умова (4), то твердження теореми встановлено.

Припустимо тепер, що умова (4) не виконується. Виберемо підпослідовність $\lambda_k^* = \lambda_{n_k}$ таку, що

$$\frac{\varphi(\ln(k+1))c_k}{\lambda_k^*} \leqslant \frac{1}{2^k} \quad (k \geqslant 1).$$

Тоді

$$\varphi(\ln\,(n+1)) \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{c_k}{\lambda_k^*} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \leqslant 1 \quad (n \geqslant 1),$$

тобто для $\Lambda^* = (\lambda_k^*)$ умова (4) виконується.

Якщо тепер $\lambda_n \notin \Lambda^*$, то покладаємо $a_n = 0$. Якщо ж $\lambda_n \in \Lambda^*$, то коефіцієнт визначаємо, як і вище, тобто, знайшовши (a_k^*) за послідовністю Λ^* (як вище a_n за Λ), покладаємо $a_{n_k} = a_k^*$ $(k \geqslant 1)$, $a_0 = 1$, $\lambda_0^* = 0$. Нехай $\varkappa_k^*$ визначено за (a_k^*) і Λ^*. Тоді для $n_j \leqslant k < n_{j+1}$ маємо $S_k(\varkappa_{j+1}^*) = S_{n_j}(\varkappa_{j+1}^*)$ і, отже, з (7) (подібно до (8)) послідовно отримуємо

$$\sigma_k(F) \geqslant \frac{1}{S_{n_j}(\varkappa_{j+1}^*)} - \frac{1}{F(\varkappa_{j+1}^*)} \geqslant ((j+1)(j+2)\mu(\varkappa_{j+1}^*, F))^{-1},$$

а також при $k \to +\infty$

$$\ln \frac{1}{\sigma_k(F)} \leqslant (3 + o(1))h(\ln j).$$

Залишилось зауважити, що $k \geqslant n_j \geqslant j$ $(j \geqslant 1)$. Крім цього, для $x \in [\varkappa_n^*, \varkappa_{n+1}^*]$ за допомогою (5) і (4), які виконуються тепер для (a_k^*) і (λ_k^*) маємо

$$\ln \mu(x,F) \leqslant \ln(n+1) \leqslant \Phi\left(\frac{1}{|\varkappa_n^*|}\right) \leqslant \Phi\left(\frac{1}{|x|}\right).$$

Теорему доведено.

Якщо в теоремі 1 не вимагати, щоб для функції $F \in H_0(\Lambda)$ виконувалась умова $\sup\{a_n : n \geqslant 0\} = +\infty$, то шукана функція будується елементарно, досить вибрати підпослідовність $\{\lambda_n^*\} \subset \{\lambda_n\}$ таку, щоб $(\lambda_n^* - \lambda_{n-1}^*) \uparrow (n \to +\infty)$ і $\kappa_n^* = -(\lambda_n^* - \lambda_{n-1}^*)^{-1}\dfrac{1}{n^2} \uparrow 0 \ (n \to +\infty)$. Тоді

$$\ln a_n^* = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}$$

і для $x \in [\kappa_n^*, \kappa_{n+1}^*)$

$$\mu(x, F) = a_n^* e^{x\lambda_n^*} < \sup\{a_n^* : n \geqslant 0\} = A < +\infty.$$

Завершується доведення, подібно як і в теореми 1, з тією різницею, що тепер отримуємо при $n \to +\infty$

$$\ln \frac{1}{\sigma_n(F)} \leqslant 2\ln n + \ln A + o(1).$$

1. Sheremeta M. N. *On the convergence rate of the partial sums of positive entire Dirichlet series* // Anal. Math.–1991.–V.17,N 1.–C. 47–53.
2 Erdos P., Reddy A. R. *Rational approximation on the positive real axis* // Proc. London Math. Soc.–1975.–V.31–P. 439-456.
3 Орищин О. Г., Скасків О. Б *Про швидкість збіжності часткових сум цілих рядів Діріхле* // Матем. Студії.–1997.–Т.7,N 2.–С.167–175.
4 Шеремета М. М. *Цілі ряди Діріхле*.–К:УСДО.–1993.–168 с.

Стаття надійшла до редколегії 12.10.97