УДК 517.53

МАКСИМАЛЬНИЙ ЧЛЕН І СУМА РЕГУЛЯРНО ЗБІЖНОГО ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РЯДУ

О.Б.Скасків , О.М.Трусевич

Skaskiv O. B., Trusevych O. M. Maximal term and sum of regulary convergent functional series For regulary convergent functional series $F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \varphi_n(z)$ (($\varphi_n(z)$ is G_α - proper sequence) we are obtained the conditions that the asymptotic equality

$$M(\alpha) \sim \mu(\alpha), \alpha \to +\infty$$

holds out an exceptional set where $M_F(\alpha) = \sup\{|F(z)| : z \in G_\alpha\}$, $\mu_F(\alpha) = \max_n \sup\{|a_n||\varphi_n(z)| : z \in G_\alpha\}$.

Нехай D— область на комплексній площині $\mathbb{C}$ (не виключаючи випадку $D = \mathbb{C}$), а $\{G_\alpha\}_{\alpha\geqslant 0}$ — сім'я областей, яка вичерпує D. Тобто, а) $G_{\alpha_1} \subset G_{\alpha_2}$ для всіх $\alpha_1 < \alpha_2$; б) $\bigcup_{\alpha>0} G_\alpha = D$.

Розглянемо послідовність аналітичних в D функцій $(\varphi_n(z))$ таких, що $\varphi_n(\alpha) = \sup\{|\varphi_n(z)| : z \in G_\alpha\} < +\infty$ $(\forall \alpha \geqslant 0)$ і $\sup\{|\varphi_n(z)| : z \in D\} = +\infty$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Послідовність $(\varphi_n(z))$ називаємо G_α-правильною (порівняй з [1]), якщо знайдуться неспадні на $[0; +\infty)$ функції $l(\alpha) > 0$ $(\alpha \geqslant 0)$ і $h(\alpha) > 0$ $(\alpha \geqslant 0)$, і послідовності $0 \leqslant \beta_n \uparrow (1 \leqslant n \to +\infty)$ і $0 \leqslant \lambda_n \uparrow (1 \leqslant n \to +\infty)$ такі, що

$$\varphi_n(\alpha) = (1 + o(1))(l(\alpha))^{\beta_n} e^{h(\alpha)\lambda_n} \tag{1}$$

при $\alpha \to +\infty$ рівномірно за $n \in \mathbb{N}$.

Зауважимо, що G_α-правильними послідовностями при відповідному виборі $\{G_\alpha\}$ є ряд функціональних послідовностей: $(z^n)_{n\geqslant 0}$, якщо $G_\alpha = \{z : |z| < \alpha\}$; $(e^{z\lambda_n})_{n\leqslant 0}$, якщо $G_\alpha = \{z : Re z < \alpha\}$ і $0 \leqslant \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$; $(E_\rho(\mu_n z))_{n\geqslant 0}$, якщо $\rho \geqslant 0.5$ і $0 \leqslant \mu_n \uparrow +\infty$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50.

$(n \to +\infty)$, де $E\rho(z)$ — ціла функція Міттаг-Леффлера порядку $\rho > 0$, при відповідному виборі $\{G_\alpha\}$, а також деякі інші. Функціональний ряд

$$F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \varphi_n(z) \tag{2}$$

за G_α-правильною послідовністю $(\varphi_n(z))$ називаємо регулярно збіжним, якщо для всіх $\alpha \geqslant 0$ є збіжним ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|\varphi_n(\alpha)$. Відзначимо, що ряди, які широко використовуються за досить загальних припущень, як правило, є регулярно збіжними. Для регулярно збіжного ряду (2) позначимо $M_F(\alpha) = \sup\{|F(z)| : z \in G_\alpha\}$, $\mu_F(\alpha) = \max\{|a_n|\varphi_n(z) : n \in \mathbb{N}\}$ — максимальний член, $\nu(\alpha) = \nu_F(\alpha) = \max\{n : |a_n|\varphi_n(\alpha) = \mu_F(\alpha) : n \in \mathbb{N}\}$ — центральний індекс.

У замітці [2] доведено таку теорему.

Теорема А [2]. *Якщо для функції F вигляду (2) виконується умова*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty,$$

то

$$F(z) = a_\nu \varphi_\nu(z) + o(\mu_F(\alpha)) \tag{3}$$

при $\alpha \to +\infty$ $(\alpha \notin E)$ рівномірно за $z \in G_\alpha$, де $\nu = \nu_F(\alpha)$, E - деяка множина скінченної h-міри, тобто h-meas$E$=$\int_{E\cap[0;+\infty)} dh(x) < +\infty$.

Наступна теорема уточнює теорему А.

Теорема 1. *Нехай h і l — диференційовні на $[0;+\infty)$ функції, $l(\alpha) \uparrow +\infty$ $(\alpha \to +\infty)$, $\dfrac{dh(\alpha)}{d\ln l(\alpha)} \geqslant 1$ $(\alpha \geqslant \alpha_0)$. Якщо для функції F вигляду (2) виконується умова*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n + \beta_{n+1} - \beta_n} < +\infty, \tag{4}$$

то співвідношення (3) виконується при $\alpha \to +\infty, \alpha \notin E$ рівномірно за $z \in G_\alpha$, де E — деяка множина така, що $\int_{E\cap[0;+\infty)} d\ln l(\alpha) < +\infty$, тобто $\ln l - meas(E) < +\infty$.

Замість рядів (2) зручно розглянути ряди вигляду $M_1(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n (l(\alpha))^{\beta_n} e^{h(\alpha)\lambda_n}$ або, використовуючи підстановку $x = \ln l(\alpha)$, перейти до рядів вигляду

$$M(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{x\beta_n + \tau(x)\lambda_n}, \tag{5}$$

де $\tau(x) = h(l^{-1}(e^x))$, очевидно, задовольняє умову $\tau'(x) \geqslant 1 (x \geqslant x_0)$, якщо $dh(\alpha) \geqslant d\ln l(\alpha)$ $(\alpha \geqslant \alpha_0)$. При цьому доведемо теорему, яка з огляду на співвідношення (1), містить в собі теорему 1.

Теорема 2. *Якщо $\tau'(x) \geqslant 1$ $(x \geqslant x_0)$ і $b_n \geqslant 0$ $(n \geqslant 1)$, то для того, щоб для будь-якої функції $M(x)$, зображеної збіжним при $x \geqslant x_0$ рядом (5) із заданими послідовностями $(\beta_n), (\lambda_n)$ такими, що $\ln n = o(\lambda_n + \beta_n)$ $(n \to +\infty)$ виконувалося при $x \to +\infty$ $(x \notin E_1, \int_{E_1 \cap [x_0;+\infty)} dx < +\infty)$ співвідношення*

$$M(x) = (1 + o(1))\mu(x)$$

необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова (4), де $\mu(x) = \max\{b_n exp\{x\beta_n +] \lambda_n \tau(x)\} : n \in \mathbb{N}\}$

Зауважимо, що важливу роль при доведенні теореми 2 відіграє умова $\tau'(x) \geqslant 1$. Для послідовності $(\mu_n), 0 \leqslant \mu_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, вважаючи, що ряд $\sum_{p=0}^{+\infty} (\mu_{p+1} - \mu_p)^{-1}$ — збіжний, позначимо $\delta_k = \max\{(j - l + 1)^{-3/2} \sum_{p=l}^{j} (\mu_{p+1} - \mu_p)^{-1} : 1 \leqslant l \leqslant k - 1 \leqslant j < \infty\}$. У статті [3] встановлено лему (леми 1,3 [3]).

Лема 1. *Існує послідовність $c_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ така, що*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k < +\infty, \ \text{де } \varepsilon_k = c_k \delta_k \in (0; 1/2),$$

при цьому

$$\sum_{n \neq \nu} \exp\{-\varepsilon_\nu |\mu_n - \mu_\nu|\} = o(1) \quad (\nu \to +\infty).$$

Наступна лема є варіантом леми 2 [3] и леми 1 [4] і доводиться подібно, повторюючи, наприклад, дослівно доведення першої частини леми 1 [4].

Лема 2. *Нехай $\nu(x)$ — довільна неспадна, додатна східчата функція, яка набуває натуральних значень при $x \in \mathbb{R}_+$. Якщо $(\varepsilon_k)_{k \geqslant 1}, \varepsilon_k \geqslant 0$ — довільна послідовність, то рівності $\nu(x \pm \varepsilon_{\nu(x)}) = \nu(x)$ виконуються для всіх $x \in [0; +\infty) \setminus E$, де E — деяка множина така, що $meas(E \bigcap [0; R]) = \int_{E \cap [0;R]} dx \leqslant 2(C + \sum_{n=1}^{\nu(R-0)} \varepsilon_n)$, а $C \geqslant 0$ — стала, що залежить тільки від функції $\nu(x)$.*

Доведення леми 3 дослівно повторює першу частину доведення леми 1, оскільки $\nu(x)$ володіє найпростішими властивостями центрального індекса.

Доведення теореми 2.

Доведемо спочатку достатність умови (4). Для цього виберемо $\mu_p = \beta_p + \lambda_p$. Тоді за лемою 2, якщо вибрати $\nu(x) = \nu_M(x)$ — центральний індекс ряду (5), одержимо, що рівності $\nu(x \pm \varepsilon_{\nu(x)}) = \nu(x)$ виконуються для всіх $x \in [0; +\infty) \setminus E$, де $meas E \leqslant 2(C + \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k) < +\infty$.

Для всіх $x \in [0; +\infty) \setminus E$ за означенням максимального члена $\mu(x)$ при виборі $\nu = \nu_M(x)$ послідовно маємо

$$b_n \exp\{(x \pm \varepsilon_\nu)\beta_n + \tau(x \pm \varepsilon_\nu)\lambda_n\} \leqslant \mu(x \pm \varepsilon_\nu),$$

звідси,

$$b_n \exp\{x\beta_n + \tau(x)\lambda_n\} \leqslant \exp\{\mp\varepsilon_\nu\beta_n + (\tau(x) - \tau(x \pm \varepsilon_\nu)\lambda_n\}\mu(x \pm \varepsilon_\nu) =$$

$$= \mu_\nu \exp\{\pm\varepsilon_\nu(\beta_\nu - \beta_n) + (\lambda_\nu - \lambda_n)(\tau(x \pm \varepsilon_\nu) - \tau(x))\}.$$

Зауважимо, що $\tau(x \pm \varepsilon_\nu) - \tau(x) = \pm\varepsilon_\nu \tau'(x \pm \theta\varepsilon_\nu), 0 \leqslant \theta \leqslant 1$ тому, вибираючи перед ε_ν знак мінус у випадку $n < \nu$, а у випадку $n > \nu$ знак плюс, остаточно, із врахуванням умови $\tau'(x) \geqslant 1$, одержимо

$$b_n \exp\{x\beta_n + \tau(x)\lambda_n\} \leqslant \mu(x)\exp\{-\varepsilon_\nu|\beta_\nu + \lambda_\nu - \beta_n - \lambda_n|\} = \exp\{-\varepsilon_\nu|\mu_\nu - \mu_n|\}\mu(x)\}$$

для всіх $n \geqslant 0$ і $x \in [0; +\infty) \setminus E$, де $\nu = \nu_M(x)$. Звідси, для всіх $x \notin E$ для $\nu = \nu_M(x)$

$$M(x) \leqslant \mu(x)\big(1 + \sum_{n \neq \nu} \exp\{-\varepsilon_\nu|\mu_\nu - \mu_n|\}\big),$$

що разом з лемою 1 доводить достатність умови (4).

Доведемо необхідність умови (4) у теоремі 2. Нехай

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} + \beta_{n+1} - \lambda_n - \beta_n} = +\infty.$$

Покажемо, що існує $b_n \geqslant 0$ така, що для функції

$$M(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \exp\{x\beta_n + \tau(x)\lambda_n\}$$

існує множина E-нескінченної міри $measE = +\infty$, для яких $M(x) > (1+h)\mu(x)(x \in E)$, де $h > 0$ – деяка стала. Визначимо $\varkappa_{n+1} = \min\{\varkappa_n + \frac{\beta}{\mu_{n+1} - \mu_n}; \tau^{-1}(\tau(\varkappa_n) + \frac{\beta}{\mu_{n+1} - \mu_n})\}$, $\mu_n = \lambda_n + \beta_n$, $\beta > 0$, $\varkappa_1 = 0$, а також визначимо (b_n) рекурентним співвідношенням

$$\ln \frac{b_n}{b_{n+1}} = \varkappa_{n+1}(\beta_{n+1} - \beta_n) + \tau(\varkappa_{n+1})(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \quad (n \geqslant 1)$$

тобто

$$\ln b_n = -\sum_{j=1}^{n-1}(\varkappa_{j+1}(\beta_{j+1} - \beta_j) + \tau(\varkappa_{j+1})(\lambda_{j+1} - \lambda_j)), \quad b_1 = 1 \tag{6}$$

Зауважимо, що $\varkappa_{n+1} > \varkappa_n$,і, крім цього,

$$\tau(\varkappa_n) \geqslant \sum_{j=1}^{n-1}(\tau(\varkappa_{j+1}) - \tau(\varkappa_j)) = \sum_{j=1}^{n-1}\Big(\frac{(1-\delta_j)\beta}{\mu_{j+1} - \mu_j} + \delta_j(\tau(\varkappa_j + \frac{\beta}{\mu_{j+1} - \mu_j}) - \tau(\varkappa_j))\Big),$$

де $\delta_j = 1$ у випадку $\varkappa_{j+1} = \varkappa_j + \dfrac{\beta}{\mu_{j+1} - \mu_j}$ і $\delta_j = 0$ у протилежному випадку.

Тому, враховуючи, що

$$\tau(\varkappa_j + \frac{\beta}{\mu_{j+1} - \mu_j}) - \tau(\varkappa_j) = \frac{\beta}{\mu_{j+1} - \mu_j}\tau'(\varkappa_j + \frac{\theta\beta}{\mu_{j+1} - \mu_j}) \geqslant \frac{\beta}{\mu_{j+1} - \mu_j}, \tag{7}$$

де $0 < \theta < 1$, отримуємо, що $\tau(\varkappa_n) \geqslant \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\beta}{\mu_{j+1}-\mu_j} \to +\infty(n \to +\infty)$. Звідси і з (6) маємо $\left(-\frac{1}{\mu_n}\ln b_n\right) \to +\infty$ $(n \to +\infty)$. Пригадуючи, що $\ln n = o(\mu_n)$ $(n \to +\infty)$, негайно маємо, що ряд $M(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{x\beta_n + \lambda_n \tau(x)}$ збіжний для всіх $x \geqslant 0$. Безпосередньо перевіряється, що $\nu_M(x) = n$ при $x \in [\varkappa_n; \varkappa_{n+1})$. Оскільки, як випливає з нерівності (7)

$$\varkappa_{n+1} = \tau^{-1}\Big(\tau(\varkappa_n) + \frac{\beta}{\mu_{n+1} - \mu_n}\Big) \quad (n \geqslant 1),$$

то для всіх $x \in [\varkappa_n; \varkappa_{n+1})$ маємо

$$\frac{M(x)}{\mu(x)} \geqslant 1 + \frac{b_{n+1}\exp\{x\beta_{n+1} + \tau(x)\lambda_{n+1}\}}{b_n\exp\{x\beta_n + \tau(x)\lambda_n\}} \geqslant$$
$$\geqslant 1 + \frac{b_{n+1}}{b_n}\exp\{\tau_n(\beta_{n+1} - \beta_n) + \tau(\varkappa_n)(\lambda_{n+1} - \lambda_n)\} =$$
$$= 1 + \exp\Big\{-\Big(\tau^{-1}\Big(\tau(\varkappa_n) + \frac{\beta}{\mu_{n+1} - \mu_n}\Big) - \varkappa_n\Big)(\beta_{n+1} - \beta_n) - \frac{\beta(\lambda_{n+1} - \lambda_n)}{\mu_{n+1} - \mu_n}\Big\}.$$

Залишилося врахувати, що

$$\tau^{-1}\Big(\tau(\varkappa_n) + \frac{\beta}{\mu_{n+1} - \mu_n}\Big) - \varkappa_n = \frac{1}{\tau'\Big(\tau^{-1}\Big(\tau(\varkappa_n) + \frac{\theta\beta}{\mu_{n+1} - \mu_n}\Big)\Big)}\frac{\beta}{\mu_{n+1} - \mu_n} \leqslant \frac{\beta}{\mu_{n+1} - \mu_n},$$

$0 < \theta < 1$. Тому $\dfrac{M(x)}{\mu(x)} \geqslant 1 + e^{-\beta}$ для всіх $x \geqslant \varkappa_1$. Теорему 2 доведено.

1. Осколков В.А. О росте целых функций, представленных регулярно сходящимися функциональными рядами // Матем. сб. – 1976. – Т.100, №2. – С.312 –334.
2. Величко С.Д., Скасків О.Б. Асимптотичні властивості одного класу функціональних рядів // Вісник ЛДУ, сер. мех. – мат. – 1989. – Вип. 32. – С. 50 – 51.
3. Скаскив О.Б. О минимуме модуля суммы ряда Дирихле с ограниченной последовательностью показателей // Матем. заметки. – 1994. – Т.56, №5. – С. 117 – 128.
4. Скаскив О.Б., Шеремета М.Н. Об асимптотическом поведении целых рядов Дирихле // Матем. сборн. – 1986 – Т.131, №11 – С. 385 – 402.

Стаття надійшла до редколегії 03.12.1997