УДК 517.537.2

ОЦІНКИ ПОХІДНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

С.І. Фединяк, М.М. Шеремета.

Fedynyak S.I., Sheremeta M.M. Estimates of Dirichlet series derivatives Let $\lambda = (\lambda_n)$ be a sequence of non-negative numbers. For an entire (absolutely convergent in $\mathbb{C}$) Dirichlet series $F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{sigma\lambda_n}$ we denot $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ and $S_1(\sigma, F) = M(\sigma, F')/M(\sigma, F)$, $\sigma < A$. By L we denot a class of non-negative, continuous, differentiable and growing to $+\infty$ on $[0, +\infty)$ functions β such that $x^2\beta'(x) \geqslant 1$ when $x \geqslant x_0$. For $\beta \in L$ and for a positive sequence $\gamma = (\gamma_n)$ via $A_1(\beta, \lambda, \gamma)$ we denote a class of complex sequences $a = (a_n)$ such that $|a_n| \leqslant \gamma_n \exp\{-\lambda_n\beta(\lambda_n)\}$ when $n \geqslant n_0$. Finally, let B be an inverse function to β, and $\Pi(\infty, B)$ be a class of entire Dirichlet series such that $S_1(\sigma, F) \leqslant (1 + o(1))B(\sigma)$ as $\sigma \to +\infty$.

It was shown that $F \in \Pi(\infty, B)$ for all $\beta \in L$ and $a \in A_1(\beta, \lambda, \gamma)$ iff $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$.

The analogous result was obtained for Dirichlet series with zero abscissa of absolutely convergence.

Нехай $\lambda = (\lambda_n)$ – послідовність невід'ємних чисел, а ряд Діріхле

$$F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

має абсцису абсолютної збіжності $A \in (-\infty, +\infty]$. Покладемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ і $S_1(\sigma, F) = \dfrac{M(\sigma, F')}{M(\sigma, F)}$, $\sigma < A$. Величина $S_1(\sigma, F)$ відіграє важливу роль у дослідженні асимптотичних властивостей аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь (див., напр., [1], глава III), а її поводження при $\sigma \to A$ зовні тієї чи іншої виняткової множини у випадку цілих рядів Діріхле (тобто, $A = +\infty$) добре вивчене в [2], а у випадку $A = 0$ – в [3]. Оцінкам $S_1(\sigma, F)$ для всіх $A \in (-\infty, +\infty]$, присвячена стаття [4]. Тут ми продовжимо ці дослідження.

Через Λ позначимо клас невід'ємних послідовностей $\lambda = (\lambda_n)$, а через L — клас невід'ємних, неперервно диференційовних, зростаючих до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функцій. Будемо говорити, що $\beta \in L_1$, якщо $\beta \in L$ і $x^2\beta'(x) \geqslant 1$ при $x \geqslant x_0$, і $\beta \in L_2$, якщо $\beta \in L$, $\beta > 0$ і $x^2\beta'(x)/\beta^2(x) \geqslant 1$ при $x \geqslant x_0$.

Для $\beta \in L$, $\lambda \in \Lambda$ і додатної послідовності $\gamma = (\gamma_n)$ через $A_1(\beta, \lambda, \gamma)$ позначимо клас комплексних послідовностей $a = (a_n)$ таких, що $|a_n| \leqslant \gamma_n \exp\{-\lambda_n\beta(\lambda_n)\}$ при $n \geqslant n_0$, а через $A_2(\beta, \lambda, \gamma)$ — клас послідовностей $a = (a_n)$ таких, що $|a_n| \leqslant \gamma_n \exp\{\lambda_n/\beta(\lambda_n)\}$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50.

Нехай, нарешті, B — функція, обернена до β, $\Pi(\infty, B)$ — клас цілих рядів Діріхле (1), для яких виконується співвідношення $S_1(\sigma, F) \leqslant (1 + o(1))B(\sigma)$ при $\sigma \to +\infty$, а $\Pi(0, B)$ — клас рядів Діріхле (1), абсциса абсолютної збіжності яких дорівнює нулю і для яких $S_1(\sigma, F) \leqslant (1 + o(1))B\left(\dfrac{1}{|\sigma|}\right)$, $\sigma \to -0$.

Теорема 1. *Для того щоб $F \in \Pi(\infty, B)$ для кожних $\beta \in L_1, \lambda \in \Lambda$ і $a \in A_1(\beta, \lambda, \gamma)$, необхідно і досить, щоб $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$.*

Доведення. Припустимо, що $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$, і покладемо $R(s) = \sum\limits_{\lambda_n > B(\sigma)} a_n \exp(s\lambda_n)$. Тоді з умови $a \in A_1(\beta, \lambda, \gamma)$ для всіх досить великих σ маємо

$$|R(s)| \leqslant \sum_{\lambda_n > B(\sigma)} \gamma_n \exp\{-\lambda_n(\beta(\lambda_n) - \sigma)\} \leqslant \sum_{\lambda_n > B(\sigma)} \gamma_n = o(1) \tag{2}$$

при $\sigma \to +\infty$, звідки, зокрема, випливає, що ряд Діріхле (1) є цілим. Далі, оскільки при $\lambda_n > B(\sigma)$, завдяки умові $\beta \in L_1$, виконується

$$h(n, \sigma) \overset{\mathrm{def}}{=} \beta(\lambda_n) - \sigma - \frac{1}{\lambda_n}(\ln \lambda_n - \ln B(\sigma)) \geqslant \int_{B(\sigma)}^{\lambda_n} (\beta'(t) - \frac{1}{t^2})\, dt \geqslant 0,$$

то для всіх досить великих σ маємо

$$\begin{aligned} |R'(s)| &\leqslant \sum_{\lambda_n > B(\sigma)} \gamma_n \lambda_n \exp\{-\lambda_n(\beta(\lambda_n) - \sigma)\} = \\ &= \sum_{\lambda_n > B(\sigma)} \gamma_n B(\sigma) \exp\{-\lambda_n h(n, \sigma)\} \leqslant \\ &\leqslant B(\sigma) \sum_{\lambda_n > B(\sigma)} \gamma_n = o(B(\sigma)),\ \sigma \to +\infty. \end{aligned} \tag{3}$$

У [4] показано, що якщо $P(s) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant B(\sigma)} a_n \exp(s\lambda_n)$, то для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, $M(\sigma, P') \leqslant B(\sigma)M(\sigma, P)$. Зауважимо, що ця нерівність доведена в [4] для додатних зростаючих до $+\infty$ послідовностей λ, але доведення аналогічне і для випадку $\lambda \in \Lambda$.

Тому з (2) і (3) випливає, що

$$\begin{aligned} M(\sigma, F') &\leqslant M(\sigma, P') + M(\sigma, R') \leqslant B(\sigma)M(\sigma, P) + o(B(\sigma)) \leqslant \\ &\leqslant B(\sigma)\{M(\sigma, F) + M(\sigma, R) + o(1)\} \leqslant B(\sigma)\{M(\sigma, F) + o(1)\} \end{aligned}$$

при $\sigma \to +\infty$, звідки випливає, що $F \in \Pi(\infty, B)$.

Нехай тепер $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = +\infty$, а $\alpha_n = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_j\right)^{-1/2}$. Тоді $\alpha_n \downarrow 0$ $(n \to \infty)$ і $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \gamma_j \geqslant \alpha_n \sum_{j=1}^{n} \gamma_j = \alpha_n^{-1} \to +\infty$ $(n \to \infty)$, тобто, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_n = +\infty$. Виберемо довільну функцію $\beta \in L_1$. Оскільки $x\beta(x) \uparrow +\infty$ $(x \to +\infty)$, то ми можемо вибрати послідовність $\lambda \in \Lambda$ так, щоб $\alpha_n = \exp\{-\lambda_n \beta(\lambda_n)\}$. Тоді, якщо $a_n = \gamma_n \exp\{-\lambda_n \beta(\lambda_n)\}$, то ряд Діріхле з такими коефіцієнтами є розбіжним для кожного $\sigma \geqslant 0$. Отже, якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n = +\infty$, то існують $\beta \in L_1, \lambda \in \Lambda$ і $a \in A_1(\beta, \lambda, \gamma)$, такі, що $F \notin \Pi(\infty, B)$. Теорему 1 доведено.

Перейдемо до рядів Діріхле, збіжних у деякій лівій півплощині. Можемо, не зменшуючи загальності, вважати, що такою півплощиною є $\{s : \operatorname{Re} s < 0\}$. Аналогом теореми 1 є така теорема.

Теорема 2. *Для того щоб $F \in \Pi(0, B)$ для кожних $\beta \in L_2, \lambda \in \Lambda$ і $a \in A_2(\beta, \lambda, \gamma)$, необхідно і досить, щоб $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$.*

Доведення цієї теореми таке ж, як і доведення теореми 1. Треба тільки при доведенні достатності в означенні $R(s)$ замість $\lambda_n > B(\sigma)$ взяти $\lambda_n > B(1/|\sigma|)$, а при доведенні необхідності вибрати $\beta(x) = \sqrt{x}$ і λ так, щоб $\alpha_n = \exp\{\sqrt{\lambda_n} - \lambda_n\}$. Тоді ряд з коефіцієнтами $a_n = \gamma_n \exp\{\lambda_n / \beta(\lambda_n)\}$ буде розбіжним для всіх $\sigma \geqslant -1$.

1. Стрелиц Ш.И. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. – Вильнюс: Минтис. – 1972. – 468 с.
2. Шеремета М.Н. *О производной целого ряда Дирихле* // Мат. сб. – 1988. – Т.137, N 1. – С.128–139.
3. Скасків О.Б. *Асимптотичні властивості аналітичних функцій, представлених степеневими рядами і рядами Діріхле.* – Автореф. докт. дис. – Львів. –1996. – 29 с.
4. Фединяк С.І. *Про похідну ряду Діріхле* // Мат. студії. – 1996. – Вип.6. – С. 53–58.

Стаття надійшла до редколегії 24.10.1997