УДК 517.956

РОЗВ'ЯЗОК ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРАМИ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Л. С. Баб'як

Babjak L.S. Solution of one problem in the Banach space for an evolutionary equation. We consider the evolutionary equation $\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + a_0 + a_1 \cos t + a_2 \sin t$, $t \in [0,\infty)$, $y(t_1) = y_1$, $y(t_2) = y_2$, $0 < t_1 < t_2 < \infty$, $(c,1)\lim_{t\to\infty} y(t) = y_n$ (the Cesaro limit) where the linear operator A is a infinitesimal generator of a bounded C_0 semigroup, a_0, a_1, a_2 are unknown parameters. We described the solution of this equation.

Для еволюційного рівняння першого порядку

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + a_0 + a_1 \cos t + a_2 \sin t, \qquad t \in [0,\infty),$$

де A – лінійний замкнений оператор у банаховому просторі B і a_0, a_1, a_2 – невідомі параметри з простору B, розглядається чотирьохточкова задача Коші:

$$y(0) = y_0; \quad y(t_1) = y_1; \quad y(t_2) = y_2; \quad (c,1)\lim_{t\to\infty} y(t) = y_\infty,$$

де $t_1, t_2 \in (0,\infty), t_1 \neq t_2$, а $y_0, y_1, y_2, y_\infty \in B$.

Встановлено умови існування розв'язку цієї задачі за умови, що банаховий простір B є рефлексивним і оператор A є генератором (твірним оператором) обмеженої півгрупи класу c_0.

У роботах Ейдельмана Ю.С. [1], [2] розглядалось еволюційне рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + p, \qquad t \in [0,\infty), \tag{1}$$

де p – невідомий параметр з рефлексивного банахового простору B, A – генератор півгрупи класу c_0. У них розв'язувалась двохточкова задача: за заданими $y(0)$ і $y(t_1)$, $t_1 > 0$, знайти пару $(y(t), p)$ таку, щоб $y(t)$ задовольняла рівняння (1) і в точках 0 та t_1 набувала відповідних значень $y(0)$ та $y(t_1)$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 34G10, 58D25.

У роботі Горбачука О.Л. [3] розглянуто те ж еволюційне рівняння (1) з параметрами p, але з іншими умовами:

$$y(0) = y_0; \quad (c,1) \lim_{t\to\infty} y(t) = y_\infty,$$

де $(c,1)\lim_{t\to\infty} y(t)$ – границя за Чезаро на нескінченності функції $y(t)$. Принагідно нагадаємо, що

$$(c,1) \lim_{t\to\infty} y(t) \stackrel{df}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(\xi)d\xi.$$

У праці [6] розглянуто еволюційне рівняння першого порядку у банаховому просторі з генератором обмеженої півгрупи класу c_0 з неоднорідною частиною у вигляді многочлена та досліджено пряму і обернену асимптотичні задачі.

У даній статті ми розглядаємо для неоднорідного еволюційного рівняння першого порядку

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + a_0 + a_1 \cos t + a_2 \sin t, \qquad t \in [0,\infty) \tag{2}$$

у рефлексивному банаховому просторі B, де a_0, a_1, a_2 – невідомі параметри з простору B, чотирьохточкову задачу Коші:

$$y(0) = y_0; \quad y(t_1) = y_1; \quad t(t_2) = y_2; \quad (c,1) \lim_{t\to\infty} y(t) = y_\infty, \tag{3}$$

де $t_1, t_2 \in (0,\infty), t_1 \neq t_2, y_0, y_1, y_2, y_\infty \in B$.

Потрібно, маючи фіксовані чотири елементи y_0, y_1, y_2, y_∞ з простору B, знайти параметри $a_0, a_1, a_2 \in B$ такі, щоб функція вигляду

$$y(t) = u(t) + x_0 + x_1 \cos t + x_2 \sin t,$$

де $x_0, x_1, x_2 \in B$, $u(t)$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння до рівняння (2) з умовою $(c,1)\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$, була розв'язком задачі Коші (2), (3).

Відомо, що коли A – генератор обмеженої півгрупи класу c_0 (див. [4], с. 50), то банаховий простір B розкладається на пряму суму замикання образу $\overline{R(A)}$ і ядра $\mathrm{Ker}A$ оператора A, тобто $B = \overline{R(A)} \dotplus \mathrm{Ker}A$ (див. [5], т. 18.6.2). Через P позначимо проектор на ядро оператора A.

Теорема. *Нехай A – генератор обмеженої півгрупи класу c_0 у рефлексивному банаховому просторі B. Задача Коші (2), (3) має розв'язок*

$$y(t) = u(t) + x_0 + x_1 \cos t + x_2 \sin t,$$

де $x_0, x_1, x_2 \in B$, $u(t)$ - розв'язок відповідного однорідного рівняння для рівняння (2) з умовою $(c,1)\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ тоді, коли $y_0, y_1, y_2, y_\infty \in D(A)$ і

$$P\Big(y_0 - y_\infty - \frac{(y_1 - y_\infty - u(t_1))\sin t_2 - (y_2 - y_\infty - u(t_2))\sin t_1}{\sin(t_2 - t_1)}\Big) = 0,$$

$$t_2 - t_1 \neq \pi n, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

причому $a_0 = -Ay_\infty$;

$$a_1 = -A\Big[\frac{(y_1 - y_\infty - u(t_1))\sin t_2 - (y_2 - y_\infty - u(t_2))\sin t_1}{\sin(t_2 - t_1)}\Big] +$$

$$+\frac{(y_2 - y_\infty - u(t_2))\cos t_1 - (y_1 - y_\infty - u(t_1))\cos t_2}{\sin(t_2 - t_1)};$$

$$a_2 = -A\Big[\frac{(y_2 - y_\infty - u(t_2))\cos t_1 - (y_1 - y_\infty - u(t_1))\cos t_2}{\sin(t_2 - t_1)}\Big] -$$

$$-\frac{(y_1 - y_\infty - u(t_1))\sin t_2 - (y_2 - y_\infty - u(t_2))\sin t_1}{\sin(t_2 - t_1)};$$

$$y(t) = u(t) + y_\infty + \frac{(y_1 - y_\infty - u(t_1))\sin t_2 - (y_2 - y_\infty - u(t_2))\sin t_1}{\sin(t_2 - t_1)}\cos t +$$

$$+\frac{(y_2 - y_\infty - u(t_2))\cos t_1 - (y_1 - y_\infty - u(t_1))\cos t_2}{\sin(t_2 - t_1)}\sin t.$$

Доведення. Нехай існує подання розв'язку задачі Коші (2), (3) у вигляді

$$y(t) = u(t) + x_0 + x_1\cos t + x_2 \sin t, \tag{4}$$

де $u(t)$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння для рівняння (2) з умовою

$$(c, 1) \lim_{t\to\infty} u(t) = 0,$$

коефіцієнти x_0, x_1, x_2 є елементами банахового простору B. Тоді, підставивши (4) у еволюційне рівняння (2), отримаємо рівність:

$$-x_1 \sin t + x_2\cos t = A(x_o + x_1 \cos t + x_2 \sin t) + a_0 + a_1 \cos t + a_2 \sin t. \tag{5}$$

Покажемо, що коефіцієнти x_0, x_1, x_2 повинні належати області визначення $D(A)$ оператора A. Оскільки частковий розв'язок рівняння (2) ми шукаємо у вигляді $x_0 + x_1 \cos t + x_2 \sin t$, то маємо, що $(x_0 + x_1\cos t + x_2 \sin t) \in D(A)$ при $t \geqslant 0$. Отже, при $t = 0$ отримаємо, що $(x_0 + x_1) \in D(A)$, при $t = \pi$ отримаємо, що $(x_0 - x_1) \in D(A)$, а тому $x_0 \in D(A)$ (як їх сума) і $x_1 \in D(A)$ (як їх різниця).

Тепер, при $t = \frac{\pi}{2}$ маємо, що $(x_0 + x_2) \in D(A)$, при $t = \frac{3\pi}{2}$ маємо, що $(x_0 - x_2) \in D(A)$, а тому $x_2 \in D(A)$ (як їх різниця). Отже, x_0, x_1, x_2 належать $D(A)$.

Тому рівність (5) можна записати:

$$-x_1 \sin t + x_2 \cos t = Ax_0 + Ax_1 \cos t + Ax_2 \sin t + a_0 + a_1 \cos t + a_2 \sin t$$

або

$$x_2 \cos t - x_1 \sin t = (Ax_0 + a_0) + (Ax_1 + a_1)\cos t + (Ax_2 + a_2)\sin t. \tag{6}$$

Прирівнюючи відповідні коефіцієнти лівої та правої частин у рівності (6), отримаємо такі співвідношення між коефіцієнтами-параметрами a_0, a_1, a_2 та елементами x_0, x_1, x_2 :

$$\begin{cases} Ax_0 + a_0 = 0; \\ Ax_1 + a_1 = x_2; \\ Ax_2 + a_2 = -x_1. \end{cases} \tag{7}$$

Співвідношення (7) є системою трьох рівнянь. Знайдемо із (7) $a_0, a_1,\ a_2$:

$$\begin{cases} a_0 = -Ax_0; \\ a_1 = -Ax_1 + x_2; \\ a_2 = -Ax_2 - x_1. \end{cases} \tag{8}$$

Оскільки x_0, x_1, x_2 належать області визначення $D(A)$ оператора A, то співвідношення (8) визначають параметри a_0, a_1, a_2.

Для того, щоб розв'язок вигляду (4) був розв'язком задачі Коші (2), (3), повинні виконуватись для функції $y(t)$ умови (3), тобто функція $y(t)$ повинна задовольняти рівняння (2), а в заданих точках $0, t_1, t_2$ повинна набувати заданих фіксованих значень y_0, y_1, y_2 відповідно, а границя за Чезаро функції $y(t)$ на нескінченності повинна бути рівною y_∞. Отже,

$$\begin{gathered} y(0) = u(0) + x_0 + x_1 = y_0; \\ y(t_1) = u(t_1) + x_0 + x_1 \cos t_1 + x_2 \sin t_1 = y_1; \\ y(t_2) = u(t_2) + x_0 + x_1 \cos t_2 + x_2 \sin t_2 = y_2; \\ (c,1) \lim_{t\to\infty} (u(t) + x_0 + x_1 \cos t + x_2 \sin t) = x_0 = y_\infty \end{gathered} \tag{9}$$

(границя за Чезаро функцій $\cos t$ і $\sin t$ при $t \to \infty$ рівна нулю, а $(c,1)\lim_{t\to\infty} u(t) = 0.$) Звідси отримуємо, що

$$\begin{cases} x_0 = y_\infty; \\ x_1 \cos t_1 + x_2 \sin t_1 = y_1 - u(t_1) - x_0; \\ x_1 \cos t_2 + x_2 \sin t_2 = y_2 - u(t_2) - x_0; \\ u(0) + x_0 + x_1 = y_0, \end{cases}$$

де $u(0), u(t_1), u(t_2)$ – значення розв'язку $u(t)$ однорідного рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t), \qquad t \in [0, \infty)$$

відповідно у точках $0, t_1, t_2$. З другого рівняння системи виразимо x_1 і підставимо у третє рівняння:

$$\begin{cases} x_0 = y_\infty; \\ x_1 = \frac{y_1 - u(t_1) - y_\infty - x_2 \sin t_1}{\cos t_1}; \\ \frac{y_1 - u(t_1) - y_\infty - x_2 \sin t_1}{\cos t_1} \cos t_2 + x_2 \sin t_2 = y_2 - u(t_2) - y_\infty; \\ u(0) + y_\infty + x_1 = y_0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_0 = y_\infty; \\ x_1 = \dfrac{y_1 - u(t_1) - y_\infty - x_2 \sin t_1}{\cos t_1}; \\ x_2 = \dfrac{y_2 - y_\infty - u(t_2)) \cos t_1 - (y_1 - y_\infty - u(t_1)) \cos t_2}{\sin(t_2 - t_1)}; \\ u(0) + y_\infty + x_1 = y_0 \end{cases}$$

Отже, x_0, x_1, x_2 визначаються так:

$$\begin{cases} x_0 = y_\infty; \\ x_1 = \dfrac{(y_1 - y_\infty - u(t_1))\sin t_2 - (y_2 - y_\infty - u(t_2))\sin t_1}{\sin(t_2 - t_1)}; \\ x_2 = \dfrac{(y_2 - y_\infty - u(t_2))\cos t_1 - (y_1 - y_\infty - u(t_1))\cos t_2}{\sin(t_2 - t_1)}; \\ u(0) + y_\infty + x_1 = y_0. \end{cases} \tag{10}$$

Для того, щоб у (10) коефіцієнти x_1 і x_2 визначались потрібно, щоб $\sin(t_2 - t_1 \neq 0$, тобто $t_2 - t_1 \neq \pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$.

Слід зазначити, що $u(0)$ пов'язується з елементами y_0, y_1, y_2, y_∞ за допомогою рівності:

$$u(0) = y_0 - x_0 - x_1$$

або, враховуючи (10),

$$u(0) = y_0 - y_\infty - \frac{(y_1 - y_\infty - u(t_1))\sin t_2 - (y_2 - y_\infty - u(t_2))\sin t_1}{\sin(t_2 - t_1)}.$$

Щоб узгодити між собою частковий розв'язок неоднорідного еволюційного рівняння (2) із загальним розв'язком цього рівняння потрібно, щоб $P(y_0 - x_0 - x_1) = 0$, або за співвідношеннями (10)

$$P\Big(y_0 - y_\infty - \frac{(y_1 - y_\infty - u(t_1))\sin t_2 - (y_2 - y_\infty - u(t_2))\sin t_1}{\sin(t_2 - t_1)}\Big) = 0$$

(див. [3]).

Отже, розв'язок задачі Коші (2), (3) функція $y(t)$ визначається так:

$$y(t) = u(t) + x_0 + x_1 \cos t + x_2 \sin t =$$

$$= u(t) + y_\infty + \frac{(y_1 - y_\infty - u(t_1))\sin t_2 - (y_2 - y_\infty - u(t_2))\sin t_1}{\sin(t_2 - t_1)} \cos t +$$

$$+ \frac{(y_2 - y_\infty - u(t_2))\cos t_1 - (y_1 - y_\infty - u(t_1))\cos t_2}{\sin(t_2 - t_1)} \sin t =$$

$$u(t) + y_\infty + \frac{(y_1 - y_\infty - u(t_1))\sin(t_2 - t) - (y_2 - y_\infty - u(t_2))\sin(t_1 - t)}{\sin(t_2 - t_1)}, \tag{11}$$

де $t_2 - t_1 \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$, $u(t)$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння до рівняння (2) з умовою $(c, 1) \lim_{t \to \infty} u(t) = 0$.

Враховуючи (10) у співвідношеннях (8), визначимо параметри a_0, a_1, a_2:

$$\begin{aligned} a_0 &= -Ay_\infty; \\ a_1 &= -A\Big[\frac{(y_1 - y_\infty - u(t_1))\sin t_2 - (y_2 - y_\infty - u(t_2))\sin t_1}{\sin(t_2 - t_1)}\Big] + \\ &\quad + \frac{(y_2 - y_\infty - u(t_2))\cos t_1 - (y_1 - y_\infty - u(t_1))\cos t_2}{\sin(t_2 - t_1)}; \\ a_2 &= -A\Big[+ \frac{(y_2 - y_\infty - u(t_2))\cos t_1 - (y_1 - y_\infty - u(t_1))\cos t_2}{\sin(t_2 - t_1)}\Big] - \\ &\quad - \frac{(y_1 - y_\infty - u(t_1))\sin t_2 - (y_2 - y_\infty - u(t_2))\sin t_1}{\sin(t_2 - t_1)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Із співвідношень (12) бачимо, що всі елементи y_0, y_1, y_2, y_∞ з простору B повинні належати області визначення $D(A)$ оператора A.

Отже, для чотирьох фіксованих елементів y_0, y_1, y_2, y_∞ банахового простору B, які належать $D(A)$ оператора A, визначаються параметри a_0, a_1, a_2 співвідношеннями (12) такі, що функція $y(t)$ у представленні (11), де $u(t)$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння до рівняння (2) з умовою $(c, 1) \lim_{t\to\infty} u(t) = 0$, є розв'язком задачі Коші для рівняння (2) з умовами (3).

Розв'язок задачі Коші (2), (3) єдиний, бо оператор A є генератором обмеженої півгрупи класу c_0.

Задача вимагає подальшого дослідження, коли $t_1 - t_2 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

1. Ейдельман Ю.С. *Двоточкова крайова задача для диференціального рівняння з параметром*// Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1983. – N4. – С.16 – 19.

2. Эйдельман Ю.С. *Естественность решения обратной задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве*// Дифференц. уравнения. – 1987. – Т.23, N9. – С.1674 – 1676.

3. Горбачук Е.Л. *Решение одной обратной задачи для эволюционального уравнения в банаховом пространстве* // Укр. мат. журн. – 1990. – Т.42, N9 – С.1262 – 1265.

4. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы.-М.:Изд-во иностр.лит. – 1962. – 830 с.

5. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.- М.: Наука, 1967. – 464 с.

6. Баб'як Л.С., Горбачук О.Л. *Пряма і обернена асимптотична задача для диференціального рівняння першого порядку у банаховому просторі* // "Алгебра і топологія".-К., 1993. – С.13 – 16.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997