УДК 517.95

СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

М.О.Оліскевич

Oliskevych M.O. Lyapunov's stability for a hyperbolic system with nonlocal boundary conditions. The mixed problem for a hyperbolic system of partial differential equations of the first order with unlocal boundary conditions is considered. The theorem of Liapunov's stability of the trivial solution is proved.

Стійкість розв'язків мішаних задач для гіперболічних ситем розглядалась багатьма авторами. У праці [1] досліджено стійкість тривіального розв'язку задачі Коші спеціального класу напівлінійних і квазілінійних гіперболічних систем. У [2] розглянуто стійкість розв'язку початкової задачі для лінійної гіперболічної системи в класі функцій з $L^2(S)$. У роботі [3] доведено теорему про стійкість за Ляпуновим стаціонарного розв'язку мішаної задачі для лінійної гіперболічної системи. У даній праці досліджено стійкість нульового розв'язку мішаної задачі з нелокальними крайовими умовами. Існування та єдиність розв'язку такої задачі доведено методом характеристик у праці [4].

Розглянемо в смузі $P = \{(x,t) : 0 < x < 1, t > 0\}$ мішану задачу для лінійної гіперболічної системи

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_j(x,t) = 0 \quad (i = \overline{1,n}), \tag{1}$$

де $\lambda_i(x,t)$ – дійсні і не обертаються в нуль, причому

$$\lambda_1(x,t) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_p(x,t) < 0 < \lambda_{p+1}(x,t) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(x,t). \tag{2}$$

Припускатимемо, що квадратична форма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j$ додатна, тобто існує $b_0 \geqslant 0$ таке, що $\forall (x,t) \in P$ виконується нерівність

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant b_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{3}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35B35, 35L50.

Для системи (1) задано початкові

$$u_i(x,0)=\varphi_i(x)\quad (i=\overline{1,n}) \tag{4}$$

і крайові умови

$$u_i(0,t)=\alpha_i(t)\,u_i(1,t)+\int_{x_1}^{x_2} f_i(x,t)u_i(x,t)dx\quad (i=\overline{1,n}), \tag{5}$$

де $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$ і $\int_{x_1}^{x_2} f_i^2(x,t)dx>0$ $(i=\overline{1,n})$. Припускатимемо, що функції φ_i задовольняють умови узгодження

$$\varphi_i(0)=\alpha_i(0)\,\varphi_i(1)+\int_{x_1}^{x_2} f_i(x,0)\varphi_i(x)dx\quad (i=\overline{1,n}).$$

Позначатимемо $L_i(t)=\left|\dfrac{\lambda_i(1,t)}{\lambda_i(0,t)}\right|$, $\quad B_i(x,t)=\dfrac{\partial\lambda_i(x,t)}{\partial x}+2b_0$, $\quad |\lambda_i|=|\lambda_i(x,t)|$,
$\Omega_i(t)=|\lambda_i(0,t)|\int_{x_1}^{x_2} f_i^2(x,t)dx$, $\quad A_{1i}=\sup\limits_{(x,t)\in P}\alpha_i^2(t)$, $\quad A_{2i}=\inf\limits_{(x,t)\in P}\alpha_i^2(t)$,
$K_{1i}(x,t)=\sqrt{\Omega_i^2(t)+4\Omega_i(t)|\lambda_i(x,t)|}-\Omega_i(t)$, $K_{2i}(x,t)=\sqrt{\Omega_i^2(t)+4\Omega_i(t)|\lambda_i(x,t)|}+\Omega_i(t)$,
$K_i(x,t)=\dfrac{K_{1i}(x,t)}{K_{2i}(x,t)}$, $\qquad R_i(x,t)=|\lambda_i(x,t)|\Big(1-\ln\dfrac{|\lambda_i(x,t)|}{\Omega_i(t)}\Big)$,
$P_{ji}(x,t)=\dfrac{2B_i(x,t)-K_{ji}(x,t)}{2|\lambda_i(x,t)|}$, $\quad (j=1,2\,;i=\overline{1,n})$.

Нехай при $i\leqslant p$ виконується умова $\inf\limits_{(x,t)\in P}B_i(x,t)>\sup\limits_{(x,t)\in P}R_i(x,t)$ і для довільного $(x,t)\in P$,

$$\text{якщо}\quad B_i\geqslant\frac{1}{2}K_{2i}\,,\quad\text{то}\quad A_{1i}\leqslant\inf_{(x,t)\in P}L_iK_ie^{P_{2i}(x,t)}, \tag{6}$$

$$\text{якщо}\quad \frac{1}{2}K_{2i}>B_i>\Omega_i\,,\quad\text{то}\quad A_{1i}\leqslant\inf_{(x,t)\in P}L_i\frac{B_i-\Omega_i}{B_i}, \tag{7}$$

$$\text{якщо}\ |\lambda_i|>\Omega_i\ \text{і}\ \Omega_i\geqslant B_i>R_i,\quad\text{то}\quad A_{1i}<\inf_{(x,t)\in P}\Big(L_i\sup_{\delta_i\geqslant\delta_{1i}}\frac{e^{-T_{1i}(x,t,\delta_i)}}{1+\delta_i}\Big), \tag{8}$$

$$\text{де}\quad \delta_{1i}=\max\left(\sup_{(x,t)\in P}\frac{\Omega_i(t)}{|\lambda_i|-\Omega_i}\,;\ \sup_{(x,t)\in P}\frac{\Omega_i(t)}{|\lambda_i|\exp\Big(\frac{B_i-|\lambda_i|}{|\lambda_i|}\Big)-\Omega_i}\right),$$

$$T_{1i}(x,t,\delta_i)=\min_{z\geqslant 0}\Big(B_i(x,t)+z|\lambda_i|=\big(1+\frac{1}{\delta_i(x,t)}\big)\Omega_i(t)e^z\Big);$$

а при $i>p$

$$\text{якщо}\ B_i(x,t)>0\,,\quad\text{то}\quad A_{2i}>\sup_{(x,t)\in P}\Big(L_i\inf_{\delta_i\geqslant\delta_{2i}}\frac{\exp(-T_{2i}(x,t,\delta_i))}{1-\delta_i}\Big), \tag{9}$$

$$\text{де}\quad \delta_{2i}=\sup_{(x,t)\in P}\frac{\Omega_i(t)}{B_i(x,t)+\Omega_i(t)},$$

$$T_{2i}(x,t,\delta_i)=\big\{z\geqslant 0: B_i(x,t)-z|\lambda_i|=\big(\frac{1}{\delta_i(x,t)}-1\big)\Omega_i(t)e^z\big\},$$

$$\text{якщо}\ B_i(x,t)\leqslant 0\,,\quad\text{то}\quad A_{2i}>\sup_{(x,t)\in P}L_iK_i^{-1}e^{-P_{1i}(x,t)}. \tag{10}$$

Теорема. *Нехай функції* λ_i, $\dfrac{\partial \lambda_i}{\partial x}$, b_{ij}, f_i *неперервні і обмежені в* $\overline{P}$, *функція* $\varphi_i \in C[0,1]$ *і виконуються умови (6), (7), (8), (9), (10).*

Тоді узагальнений [4] (непереріний в $\overline{P}$*) розв'язок задачі (1), (4), (5) експоненціально стійкий, тобто виконується нерівність*

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^n u_i^2(x,t)\,dx \leqslant Ce^{-\beta t} \int_0^1 \sum_{i=1}^n \varphi_i^2(x)\,dx\,, \tag{11}$$

де $0<\beta<\beta_0$; $\beta_0\,, C$ *– додатні сталі, які залежать від коефіцієнтів системи і крайових умов.*

Доведення. Домножимо i-те рівняння системи (1) на $2e^{\gamma_i x}e^{\beta t}u_i(x,t)$ і проінтегруємо по $P_t=\{(x,\tau): 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant \tau\leqslant t\}$. Матимемо

$$\begin{gathered}
\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}e^{\gamma_i x}\frac{\partial u_i^2(x,\tau)}{\partial \tau}dxd\tau - \int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}e^{\gamma_i x}\lambda_i(x,\tau)\frac{\partial u_i^2(x,\tau)}{\partial x}dxd\tau +\\
+2\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}e^{\gamma_i x}\sum_{j=1}^n b_{ij}(x,\tau)u_j(x,\tau)u_i(x,\tau)dxd\tau = 0 \quad (i=\overline{1,n})\,,\\
\int_0^t\int_0^1 e^{\gamma_i x}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(e^{\beta\tau}u_i^2(x,\tau)\right)dxd\tau - \int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\gamma_i x}\lambda_i(x,\tau)u_i^2(x,\tau)\right)dxd\tau +\\
+\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}\Big(\frac{\partial\lambda_i(x,\tau)}{\partial x}-\beta+\gamma_i\lambda_i(x,\tau)\Big)e^{\gamma_i x}u_i^2(x,\tau)dxd\tau +\\
+2\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}e^{\gamma_i x}\sum_{j=1}^n b_{ij}(x,\tau)u_j(x,\tau)u_i(x,\tau)dxd\tau = 0 \quad (i=\overline{1,n})\,,\\
\int_0^1 e^{\beta t}e^{\gamma_i x}u_i^2(x,t)dx - \int_0^1 e^{\gamma_i x}u_i^2(x,0)dx + \int_0^t e^{\beta\tau}\big[\lambda_i(0,\tau)u_i^2(0,\tau)-\lambda_i(1,\tau)e^{\gamma_i}u_i^2(1,\tau)\big]d\tau +\\
+\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}\Big(\frac{\partial\lambda_i(x,\tau)}{\partial x}-\beta+\gamma_i\lambda_i(x,\tau)\Big)e^{\gamma_i x}u_i^2(x,\tau)dxd\tau +\\
+2\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}e^{\gamma_i x}\sum_{j=1}^n b_{ij}(x,\tau)u_j(x,\tau)u_i(x,\tau)dxd\tau = 0 \quad (i=\overline{1,n})\,.
\end{gathered}$$

Додавши і віднявши від лівої частини рівності $\int_0^t\int_0^1 2b_0 e^{\beta\tau}e^{\gamma_i x}u_i^2 dxd\tau$, отримаємо

$$\begin{gathered}
\int_0^1 e^{\beta t}e^{\gamma_i x}u_i^2(x,t)dx - \int_0^1 e^{\gamma_i x}\varphi_i^2(x)dx + \int_0^t e^{\beta\tau}\big[\lambda_i(0,\tau)u_i^2(0,\tau)-\lambda_i(1,\tau)e^{\gamma_i}u_i^2(1,\tau)\big]d\tau +\\
+\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}\Big(B_i(x,\tau)-\beta+\gamma_i\lambda_i(x,\tau)\Big)e^{\gamma_i x}u_i^2(x,\tau)dxd\tau +\\
+2\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}e^{\gamma_i x}\Big(\sum_{j=1}^n b_{ij}(x,\tau)u_i(x,\tau)u_j(x,\tau)-b_0u_i^2(x,\tau)\Big)dxd\tau \equiv \qquad (12)\\
\equiv \int_0^1 e^{\beta t}e^{\gamma_i x}u_i^2(x,t)dx - \int_0^1 e^{\gamma_i x}\varphi_i^2(x)dx + D_i +
\end{gathered}$$

$$+2\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}e^{\gamma_i x}\Big(\sum_{j=1}^n b_{ij}(x,\tau)u_i(x,\tau)u_j(x,\tau)-b_0u_i^2(x,\tau)\Big)dxd\tau=0 \quad (i=\overline{1,n}).$$

Якщо $D_i\geqslant 0$ для кожного $i=\overline{1,n}$, то будемо мати:

$$e^{\beta t}\int_0^1 u_i^2(x,t)dx-e^{|\gamma_i|}\int_0^1\varphi_i^2(x)dx+$$
$$+2\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}\Big(\sum_{j=1}^n b_{ij}(x,\tau)u_i(x,\tau)u_j(x,\tau)-b_0u_i^2(x,\tau)\Big)dxd\tau\leqslant 0 \quad (i=\overline{1,n}).$$

Підсумувавши ці нерівності від 1 до n, отримаємо

$$e^{\beta t}\int_0^1\sum_{i=1}^n u_i^2(x,t)dx-\exp\big(\max_i|\gamma_i|\big)\int_0^1\sum_{i=1}^n\varphi_i^2(x)dx+$$
$$+2\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}\Big(\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,\tau)u_i(x,\tau)u_j(x,\tau)-b_0\sum_{i=1}^n u_i^2(x,\tau)\Big)dxd\tau\leqslant 0.$$

Оскільки виконується умова (3), то для $0<\beta<\beta_0$ матимемо

$$\int_0^1\sum_{i=1}^n u_i^2(x,t)dx\leqslant Ce^{-\beta t}\int_0^1\sum_{i=1}^n\varphi_i^2(x)dx,$$

що і треба було довести.

Отже, нерівність (11) виконуватиметься, якщо в (12) $D_i\geqslant 0$. Розглянемо доданок D_i і виберемо γ_i,β так, щоб $D_i\geqslant 0$. Врахувавши умови (4), для кожного $i=\overline{1,n}$ матимемо

$$\pm u_i^2(0,t)=\pm\alpha_i^2(t)u_i^2(1,t)\pm\Big(\int_{x_1}^{x_2}f_i(x,t)u_i(x,t)dx\Big)^2\pm 2\alpha_iu_i(1,t)\int_{x_1}^{x_2}f_i(x,t)u_i(x,t)dx\geqslant$$
$$\geqslant\pm\alpha_i^2(t)u_i^2(1,t)\pm\Big(\int_{x_1}^{x_2}f_i(x,t)u_i(x,t)dx\Big)^2-\delta_i(x,t)\alpha_i^2(t)u_i^2(1,t)-$$
$$-\frac{1}{\delta_i(x,t)}\Big(\int_{x_1}^{x_2}f_i(x,t)u_i(x,t)dx\Big)^2\geqslant(\pm1-\delta_i(x,t))\alpha_i^2(t)u_i^2(1,t)-$$
$$-\big(\frac{1}{\delta_i(x,t)}\mp 1\big)\Big(\int_{x_1}^{x_2}f_i(x,t)u_i(x,t)dx\Big)^2\geqslant(\pm1-\delta_i(x,t))\alpha_i^2(t)u_i^2(1,t)-$$
$$-\big(\frac{1}{\delta_i(x,t)}\mp 1\big)\int_{x_1}^{x_2}f_i^2(\theta,t)d\theta\int_{x_1}^{x_2}u_i^2(x,t)dx,$$

якщо $\dfrac{1}{\delta_i(x,t)}\pm 1>0,\ \delta_i(x,t)>0\ (i=\overline{1,n})$.

Згідно з цими оцінками і умовами (2) отримаємо для виразів D_i такі нерівності: для $i\leqslant p$

$$D_i\geqslant\int_0^t\big(-(1+\delta_i(x,\tau))|\lambda_i(0,\tau)|\alpha_i^2(\tau)+|\lambda_i(1,\tau)|e^{\gamma_i}\big)u_i^2(1,\tau)d\tau-$$
$$-\int_0^t\Big(\big(\frac{1}{\delta_i(x,\tau)}+1\big)|\lambda_i(0,\tau)|\int_{x_1}^{x_2}f_i^2(\theta,t)d\theta\int_{x_1}^{x_2}u_i^2(x,t)dx\Big)d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}\big(B_i(x,\tau)-\beta+\gamma_i\lambda_i(x,\tau)\big)e^{\gamma_ix}u_i^2(x,\tau)dxd\tau$$

і для $i > p$

$$D_i \geqslant \int_0^t \big((1-\delta_i(x,\tau))|\lambda_i(0,\tau)|\alpha_i^2(\tau) - |\lambda_i(1,\tau)|e^{\gamma_i}\big)u_i^2(1,\tau)d\tau -$$
$$-\int_0^t \Big(\big(\frac{1}{\delta_i(x,\tau)}-1\big)|\lambda_i(1,\tau)|\int_{x_1}^{x_2} f_i^2(\theta,t)d\theta \int_{x_1}^{x_2} u_i^2(x,t)dx\Big)d\tau +$$
$$+\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}\big(B_i(x,\tau)-\beta+\gamma_i\lambda_i(x,\tau)\big)e^{\gamma_i x}u_i^2(x,\tau)dxd\tau\,.$$

Позначивши $\Delta_i(x,t) = \begin{cases} 1+\dfrac{1}{\delta_i(x,t)}, & \text{якщо } i \leqslant p, \\ \dfrac{1}{\delta_i(x,t)}-1, & \text{якщо } i > p, \end{cases}$ отримаємо: для $i \leqslant p$

$$D_i \geqslant \int_0^t \big(-(1+\delta_i(x,\tau))|\lambda_i(0,\tau)|\alpha_i^2(\tau) + |\lambda_i(1,\tau)|e^{\gamma_i}\big)u_i^2(1,\tau)d\tau -$$
$$+\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}\big((B_i(x,\tau)-\beta+\gamma_i\lambda_i)e^{\gamma_i x} - \Delta_i(x,\tau)\Omega_i(\tau)\big)u_i^2(x,\tau)dxd\tau$$

і для $i > p$

$$D_i \geqslant \int_0^t \big((1-\delta_i(x,\tau))|\lambda_i(0,\tau)|\alpha_i^2(\tau) - |\lambda_i(1,\tau)|e^{\gamma_i}\big)u_i^2(1,\tau)d\tau -$$
$$+\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}\big((B_i(x,\tau)-\beta+\gamma_i\lambda_i)e^{\gamma_i x} - \Delta_i(x,\tau)\Omega_i(\tau)\big)u_i^2(x,\tau)dxd\tau\,,$$

причому $0 < \delta_i(x,t) < 1$.

Отже, $D_i \geqslant 0$, якщо $\forall (x,t) \in P$ виконуються умови

$$(1+\delta_i(x,t))\alpha_i^2(t) \leqslant L_i(t)e^{\gamma_i} \quad \text{для } i \leqslant p\,, \tag{13}$$

$$(1-\delta_i(x,t))\alpha_i^2(t) \geqslant L_i(t)e^{\gamma_i} \quad \text{для } i > p\,, \tag{14}$$

$$(B_i(x,t)-\beta+\gamma_i\lambda_i(x,t))e^{\gamma_i x} \geqslant \Delta_i(x,t)\Omega_i(t) \quad \text{для } i=\overline{1,n}\,. \tag{15}$$

Розглянемо спочатку умову (15).

Якщо $i \leqslant p$, то $\lambda_i(x,t) < 0$ і умова (15) буде мати вигляд

$$(B_i-\beta-\gamma_i|\lambda_i|)e^{\gamma_i x} \geqslant \Delta_i\Omega_i(t) \quad \text{для } i=\overline{1,n}\,.$$

Якщо $\forall (x,t) \in P$

$$B_i(x,t) - \Delta_i(x,t)\Omega_i(t) \geqslant 0\,, \ \text{для}\, 0 \leqslant \beta \leqslant \inf_{(x,t)\in P}(B_i(x,t)-\Delta_i(x,t)\Omega_i(t)) \tag{16}$$

то γ_i можна вибрати:

1) невід'ємним, а саме

$$0 \leqslant \gamma_i \leqslant \inf_{(x,t)\in P} \left(\frac{B_i(x,t) - \Delta_i(x,t)\Omega_i(t) - \beta}{|\lambda_i(x,t)|} \right), \tag{17}$$

оскільки у цьому випадку маємо

$$(B_i(x,t) - \beta - \gamma_i|\lambda_i|)e^{\gamma_i x} \geqslant B_i(x,t) - \beta - \gamma_i|\lambda_i| \geqslant \Delta_i\Omega_i(t)$$

або

2) від'ємним

$$\sup_{(x,t)\in P} (-T_i(x,t,\delta_i)) \leqslant \gamma_i < 0\,, \tag{18}$$

де $T_i(x,t,\delta_i)$ – точка перетину графіків функцій $y(z) = B_i(x,t) - \beta + z|\lambda_i(x,t)|$ і $y(z) = \Delta_i(x,t)\Omega_i(t)e^z$, $z \geqslant 0$, оскільки у цьому випадку умова (15) набуде вигляду

$$(B_i(x,t) - \beta - \gamma_i|\lambda_i|)e^{\gamma_i} \geqslant \Delta_i\Omega_i(t)\,.$$

Якщо

$$\Delta_i(x,t)\Omega_i(t) \geqslant B_i(x,t) \geqslant R_i(x,t) + \frac{\ln \Delta_i(x,t)}{|\lambda_i(x,t)|} \tag{19}$$

$$\text{і} \qquad |\lambda_i(x,t)| > \Delta_i(x,t)\Omega_i(t)\,, \tag{20}$$

то для

$$0 \leqslant \beta \leqslant \inf_{(x,t)\in P} \left(B_i(x,t) - R_i(x,t) - \frac{\ln \Delta_i(x,t)}{|\lambda_i(x,t)|} \right) \tag{21}$$

γ_i можна вибрати лише недодатним, а саме

$$\sup_{(x,t)\in P} (-T_{2i}(x,t,\delta_i)) \leqslant \gamma_i \leqslant \inf_{(x,t)\in P} (-T_{1i}(x,t,\delta_i))\,, \tag{22}$$

де $T_{1i}(x,t,\delta_i)$, $T_{2i}(x,t,\delta_i)$ — точки перетину графіків функцій $y(z) = \Delta_i(x,t)\Omega_i(t)e^z$ і $y(z) = B_i(x,t) - \beta + z|\lambda_i(x,t)|$, $z \geqslant 0$, причому $T_{2i}(x,t,\delta_i) > T_{1i}(x,t,\delta_i)$.

Для вказаного β умови (19), (20) є необхідними умовами того, що ці графіки перетинаються.

Якщо $i > p$, то $\lambda_i(x,t) > 0$ і умова (15) набуде вигляду

$$(B_i(x,t) - \beta + \gamma_i|\lambda_i(x,t)|)\, e^{\gamma_i x} \geqslant \Delta_i(x,t)\Omega_i(t)\,.$$

У цьому випадку γ_i можна вибрати невід'ємним, а саме

$$\gamma_i \geqslant \max\Big(0; \sup_{(x,t)\in P}\Big(-\frac{B_i(x,t) - \beta - \Delta_i\Omega_i(t)}{\lambda_i}\Big)\Big)\,, \tag{23}$$

оскільки

$$(B_i(x,t) - \beta + \gamma_i|\lambda_i|)e^{\gamma_i x} \geqslant B_i(x,t) - \beta + \gamma_i|\lambda_i| \geqslant \Delta_i\Omega_i(t)\,.$$

Якщо ж $B_i(x,t) \geqslant \Delta_i(x,t)\Omega_i(t)$ $\forall(x,t) \in P$, то γ_i можна вибрати недодатним для $0 \leqslant \beta \leqslant \inf\limits_{(x,t)\in P}(B_i(x,t) - \Delta_i\Omega_i(t))$:

$$\sup_{(x,t)\in P}(-T_{2i}(x,t,\delta_i)) \leqslant \gamma_i \leqslant 0\,, \tag{24}$$

де $T_{2i}(x,t,\delta_i)$ — точка перетину графіків функцій $y(z) = B_i(x,t) - \beta - z\lambda_i$ і $y(z) = \Delta_i\Omega_i(t)e^z$, причому $T_{2i}(x,t,\delta_i) \leqslant B_i(x,t)/|\lambda_i(x,t)|$.

Розглянемо умову (13).

1) Якщо $B_i(x,t) > \Omega_i(t)$, то вибираємо $\delta_i(x,t)$ так, щоб

$$B_i(x,t) > \left(1 + \frac{1}{\delta_i(x,t)}\right)\Omega_i(t)\,,$$

тобто $\delta_i(x,t) > \dfrac{\Omega_i(t)}{B_i(x,t) - \Omega_i(t)}$. Тоді γ_i можна вибрати невід'ємним для $0 < \beta < \inf\limits_{(x,t)\in P}(B_i - \Delta_i\Omega_i)$. Згідно з (17) виберемо $\gamma_i = \inf\limits_{(x,t)\in P}\left(\dfrac{1}{|\lambda_i|}(B_i(x,t) - \beta - \Delta_i\Omega_i(t))\right)$ і отримаємо умову (13) у вигляді

$$A_{1i} < \inf_{(x,t)\in P} L_i(t)\frac{\exp\left(\dfrac{1}{|\lambda_i|}\left(B_i(x,t) - \Omega_i - \dfrac{\Omega_i}{\delta_i}\right)\right)}{1+\delta_i}\exp\Big(\frac{-\beta}{\lambda_i(x,t)}\Big)\,.$$

Знайдемо максимум функції $f(\delta_i) = \dfrac{\exp\left(\dfrac{1}{|\lambda_i|}(B_i(x,t) - \Omega_i) - \dfrac{\Omega_i(t)}{|\lambda_i|\delta_i}\right)}{1+\delta_i}$ для $\delta_i(x,t) > \dfrac{\Omega_i(t)}{B_i(x,t) - \Omega_i(t)}$:

$$f'(\delta_i) = \frac{1}{1+\delta_i}\exp\Big(\frac{B_i(x,t) - \Omega_i(t)}{|\lambda_i(x,t)|} - \frac{\Omega_i(t)}{|\lambda_i|\delta_i}\Big)\Big(\frac{\Omega_i(t)}{|\lambda_i|\delta_i^2} - \frac{1}{1+\delta_i}\Big) = 0\,,$$

якщо $\delta_i(x,t) = \dfrac{\Omega_i(t) \pm \sqrt{\Omega_i^2(t) + 4\Omega_i(t)|\lambda_i|}}{2|\lambda_i(x,t)|}$.

Оскільки ми вибираємо $\delta_i(x,t) > 0$, то $f(\delta_i(x,t))$ досягає максимуму в точці $\delta_i(x,t) = \dfrac{K_{2i}}{2|\lambda_i|}$, якщо $\dfrac{K_{2i}}{2|\lambda_i|} > \dfrac{\Omega_i(t)}{B_i(x,t) - \Omega_i(t)}$, тобто якщо

$$B_i(x,t) > \frac{1}{2}K_{2i}(x,t) > \Omega_i(t)\,. \tag{25}$$

Отже, при виконанні умови (25) вибираємо $\delta_i = \dfrac{K_{2i}}{2|\lambda_i|}$, і $D_i \geqslant 0$ для $0 < \beta < \beta_{1i}$ при

$$A_{1i} < \inf_{(x,t)\in P} L_i(t)K_i(x,t)\exp(P_{2i}(x,t))\,,$$

де $\beta_{1i} = \min\Big(\inf\limits_{(x,t)\in P}\Big(B_i - \dfrac{K_{2i}}{2}\Big); \inf\limits_{(x,t)\in P}\Big(|\lambda_i|\ln\Big(L_i\dfrac{K_i}{\alpha_i^2}\exp(P_{2i}(x,t))\Big)\Big)\Big)$.

Якщо ж $\dfrac{K_{2i}(x,t)}{2} \geqslant B_i(x,t) > \Omega_i(t)$, то вибираємо $\delta_i > \dfrac{\Omega_i(t)}{B_i(x,t)-\Omega_i(t)-\varepsilon}$, де ε — достатньо мале додатне число , і якщо

$$A_{1i} \leqslant \inf_{(x,t)\in P} L_i(t)\frac{B_i(x,t)-\Omega_i(t)}{B_i(x,t)}\,,\ \text{то } D_i \geqslant 0 \text{ для } 0<\beta<\varepsilon.$$

2) Якщо

$$|\lambda_i(x,t)| > \Omega_i(t) \quad \text{і} \quad \Omega_i(t) \geqslant B_i(x,t) > R_i(x,t)\,,$$

то згідно з (22) вибираємо $\gamma_i = \inf\limits_{(x,t)\in P} T_{1i}(x,t,\delta_i)$ і вимагаємо, щоб

$$A_{1i} < \inf_{(x,t)\in P}\Big(L_i(t)\frac{\exp(-T_{1i}(x,t,\delta_i))}{1+\delta_i(x,t)}\Big)\,.$$

Вибираємо $\delta_i(x,t)$ з умов:

$$B_i(x,t) > \Big(R_i(x,t) + \frac{1}{|\lambda_i(x,t)|}\ln\big(1+\frac{1}{\delta_i(x,t)}\big)\Big);\quad |\lambda_i(x,t)| > \big(1+\frac{1}{\delta_i(x,t)}\big)\Omega_i(t)\,;$$

значення функції $f(\delta_i(x,t)) = \dfrac{\exp(-T_{1i})}{1+\delta_i}$ максимальне. У цьому випадку $0<\beta<\beta_{2i}$, де $\beta_{2i} = \inf\limits_{(x,t)\in P}\Big(B_i(x,t) - |\lambda_i(x,t)|\Big(1-\ln\dfrac{|\lambda_i(x,t)|}{\Delta_i(x,t)\Omega_i(t)}\Big)\Big)$. Зауважимо, що оскільки $T_{1i}(x,t,\delta_i) < |z^0(x,t)|$, то $D_i \geqslant 0$ при

$$A_{1i} < \inf_{(x,t)\in P} L_i(t)\frac{\exp(-z^0(x,t)|)}{1+\delta_i(x,t)} < \inf_{(x,t)\in P} L_i(t)\frac{\Omega_i(t)}{|\lambda_i(x,t)|\delta_{1i}}\,.$$

Якщо $B_i(x,t) < R_i(x,t)$, то $\beta \geqslant 0$ вибрати не вдається.
Розглянемо тепер умову (14).

1) Якщо $B_i(x,t) > 0$, то для $0<\beta<\beta_{3i}$, де $\beta_{3i} = \inf\limits_{(x,t)\in P} B_i(x,t)$, враховуючи (24) вибираємо $\gamma_i = \sup\limits_{(x,t)\in P}(-T_{2i}(x,t,\delta_i))$ і отримаємо $A_{2i} > \sup\limits_{(x,t)\in P}\Big(L_i(t)\dfrac{\exp(-T_{2i}(x,t,\delta_i))}{1-\delta_i(x,t)}\Big)$. Вибираємо $\delta_i(x,t) \geqslant \dfrac{\Omega_i(t)}{B_i(x,t)-\beta+\Omega_i(t)}$ і так, щоб значення функції $f(\delta_i(x,t)) = \dfrac{\exp(-T_{2i}(x,t,\delta_i))}{1-\delta_i(x,t)}$ було найменшим.

Зауважимо, що оскільки $\dfrac{\exp(-T_{2i}(x,t,\delta_i))}{1-\delta_i(x,t)} \leqslant \dfrac{B_i(x,t)+\Omega_i(t)}{B_i(x,t)}$, то $D_i \geqslant 0$ при

$$A_{2i} > \sup_{(x,t)\in P} L_i(t)\frac{B_i(x,t)+\Omega_i(t)}{B_i(x,t)}\,.$$

2) Якщо $B_i(x,t) \leqslant 0$, то згідно з (23) вибираємо $\gamma_i = \sup\limits_{(x,t)\in P} \dfrac{\Omega_i(t) - (B_i(x,t) - \beta)}{|\lambda_i|}$ і маємо

$$A_{2i} > \inf_{(x,t)\in P}\left(L_i(t)\frac{1}{1-\delta_i}\exp\left(\frac{-\Omega_i(t) - B_i(x,t)}{|\lambda_i|} + \frac{\Omega_i(t)}{|\lambda_i|\delta_i}\right) e^{\beta/|\lambda_i|}\right).$$

Вибираємо $\delta_i(x,t)$ так, щоб значення функції $f(\delta_i) = \dfrac{1}{1-\delta_i}\exp\Big(\dfrac{-\Omega_i(t) - B_i(x,t)}{|\lambda_i|} + \dfrac{\Omega_i(t)}{|\lambda_i|\delta_i}\Big)$ було найменшим. Функція $f(\delta_i(x,t))$ досягає свого мінімуму в точці $\delta_i^{min} = \dfrac{K_{1i}}{2|\lambda_i|}$. Отже, якщо

$$A_{2i} > \inf_{(x,t)\in P} L_i(t)K_i^{-1}(x,t)\exp(-P_{1i}(x,t)), \text{ то } D_i \geqslant 0 \text{ для } 0 < \beta < \beta_{4i},$$

де $\beta_{4i} = \inf\limits_{(x,t)\in P} |\lambda_i(x,t)| \ln\Big(\dfrac{\alpha_i^2(t)}{L_i(t)K_i(x,t)\exp(-P_{1i}(x,t))}\Big)$. Тому нерівність (11) виконується для $0 < \beta < \min\big(\inf\limits_{i\leqslant p}(\delta_{1i}, \delta_{2i})\,;\, \inf\limits_{i>p}\delta_{3i}, \beta_{4i}\big)$. Теорему доведено.

Приклад . Розглянемо мішану задачу для рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - b\frac{\partial u}{\partial x} + u = 0, \quad -1 < b < 0, \tag{26}$$

з крайовою умовою

$$u(0,t) = \alpha\, u(1,t) + \int_0^1 u(x,t)dx, \qquad \alpha > 1.$$

Функція

$$u(x,t) = \exp(C_0x + (C_0b - 1)t) \tag{27}$$

є розв'язком даної задачі, де C_0 є розв'язком рівняння

$$1 + 1/C = e^C(\alpha + 1/C). \tag{28}$$

Розвязок задачі стійкий, якщо згідно з теоремою виконується умова (6), тобто

$$\alpha^2 \leqslant \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}\exp\left(\frac{4 - |b|(1+\sqrt{5})}{2|b|}\right).$$

Ця нерівність рівносильна умові

$$|b| \leqslant b_1 = \frac{4}{1 + \sqrt{5} + 2\ln\left(\alpha^2\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}\right)}.$$

Якщо $\alpha = 100000$, то $b_1 = 0.08$, тобто за теоремою розв'язок стійкий, якщо $|b| < 0,08$.

Виходячи з вигляду розв'язку (27), отримуємо, що розв'язок не є стійким, якщо $C_0b - 1 > 0$. Оскільки корінь рівняння (29) від'ємний, а саме $C_0 < -1$, то отримаємо $|b| > b_2 = \dfrac{1}{|C_0|}$.

Якщо $\alpha = 100000$, то $C_0 = -11.606$ і $b_2 = 0.08$. Отже, з вигляду розв'язку (27) отримуємо, що розв'язок не є стійкий, якщо $|b| > 0,08$.

Приклад показує, що умова (6) в теоремі є близька до непокращуваної.

1. A.Jeffrey, J.Kato. *Liapunov's direct method in stability problems for semilinear and quasilinear hyperbolic systems*// Journal of mathematics and mechanics. – 1969. – Vol. 18, N 7. – P. 659–682.

2. Knut S. Eckhoff. *On stability for symmetryc hyperbolic systems*// Journal of Differential equations. – 1981. – Vol. 40, P. 94–115.

3. Елтышева Н.А. *О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости*// Матем. сб. – 1988. – Т. 135, N (177):2. – С. 186–209.

4. Мельник З.О., Кирилич В.М. *Задачи без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем на прямой*// Укр.мат.журн. – 1983. – Т.40, N1. – С. 121–123.

Стаття надійшла до редколегії 10.10.1997