УДК 517.95

МАКСИМАЛЬНА ГЛАДКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ОКОЛІ КУТОВОЇ ТОЧКИ

В.З. Чернецький

Chernetskiy V.Z. The maximal smoothness of solutions of a mixed boundary value problem for linear elliptic second order equations in a neighbourhood of an angular boundary point. It has been investigated the behaviour of solutions of a mixed boundary value problem for linear elliptic second order nondivergense equations in a neighbourhood of an angular boundary point in the weight Sobolev spaces and the Hölder spases .

Розглянемо мішану задачу для лінійного еліптичного рівняння:

$$a^{ij}(x)u_{x_ix_j} + a^i(x)u_{x_i} + a(x)u = f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma_2} = 0. \tag{2}$$

Тут і далі вважається, що за індексами, які повторюються, ведеться сумування від 1 до 2; $G \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена ліпшицьова область з межею ∂G такою, що $\partial G \setminus \{\mathcal{O}\}$ – гладка крива, $\partial G = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$, де Γ_1, Γ_2 – зв'язні криві без кінців, $\overline{\Gamma}_1$ та $\overline{\Gamma}_2$ перетинаються в точці $\mathcal{O}$ під кутом ω_0 і в деякому околі цієї точки є кусками прямих; $\mathbf{n}$ – одинична зовнішня нормаль до ∂G. Припускається, що $\mathcal{O}$ – початок декартової системи координат.

Нехай (r, ω) – полярні координати точки (x_1, x_2), а вісь $\mathcal{O}x_1$ збігається з прямою, куском якої є частина Γ_2, що лежить в деякому околі точки $\mathcal{O}$.

Введемо позначення: $G_a^b = G \cap \{(r,\omega)|\ 0 \leqslant a < r < b\}$; $\Gamma_{i,a}^b = \Gamma_i \cap \partial G_a^b$, $i = 1, 2$. Нехай $C^l(\overline{G})$ – банахів простір функцій, що мають неперервні похідні в $\overline{G}$ до порядку $l \geqslant 0$ включно, якщо l – ціле, і до порядку $[l]$, якщо l – неціле, причому похідні порядку $[l]$ задовольняють умову Гельдера з показником $l - [l]$; $W^{k,p}(G)$ – соболєвський простір функцій з $L_p(G)$, які мають узагальнені похідні до порядку k включно, сумовні зі степенем p в області G; $W_0^{k,p}(G;\Gamma)$ – банахів простір функцій, отриманий замиканням простору

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35J25.

$C_0^k(G;\Gamma) = \left\{f : f \in C^k(\overline{G}), f|_\Gamma = 0\right\}$ в метриці $W^{k,p}(G)$, де $\Gamma \subset \partial G$; $V_{p,\alpha}^k(G)$ – ваговий соболєвський простір функцій $u(x)$ з нормою

$$||u||_{V_{p,\alpha}^k(G)} = \left(\iint\limits_G \sum_{|\beta|=0}^{k} r^{p(|\beta|-k+\alpha/p)} |D^\beta u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ p \geqslant 1, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ k \geqslant 0 \text{ – ціле число.}$$

Означення. Під розв'язком задачі (1),(2) ми розумітимемо функцію

$$u \in W^{2,2}(G) \cap W_0^{1,2}(G;\Gamma_1),$$

яка задовольняє рівняння (1) та другу з крайових умов (2).

Зауваження. Згідно з означенням області, існує $d > 0$ таке, що $G_0^d = \{(r,\omega) \mid \ 0 \leqslant r < d, 0 < \omega < \omega_0\}$.

Припустимо, що виконуються такі умови:

a) однорідної еліптичності:
$\nu\xi^2 \leqslant a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \ \forall x \in \overline{G}, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^2$, де $\nu, \mu = const > 0$;

b) $a^{ij}(0) = \delta_j^i, \ i,j = 1,2$;

c) $a^{ij}(x) \in C^0(\overline{G}), \ a^i(x) \in L_p(G) \cap L_2(G), \ i,j = 1,2, \ a(x) \in L_p(G)$ для деякого $p > 1$;

$$\sum_{i,j=1}^{2} |a^{ij}(x) - a^{ij}(0)| + |x| \sum_{i=1}^{2} |a^i(x)| + |x|^2 |a(x)| \leqslant A(|x|), \ x \in G_0^d,$$

де $A(r) \geqslant 0$ – зростаюча та неперервна за Діні в нулі функція, $A(0) = 0$;

d) $f(x) \in L_p(G) \cap L_2(G) \cap V_{2,2}^0(G)$, $p > 1$; існують $k_1, k_2 > 0$ та $s > \frac{\pi}{2\omega_0}$, такі, що

$$||f||_{V_{2,2}^0(G_0^\rho)} \leqslant k_1\rho^s, \quad ||f||_{L_p(G_{\frac{\rho}{2}}^\rho)} \leqslant k_2\rho^{\frac{\pi}{2\omega_0}-2+\frac{2}{p}}, \quad \rho \in (0,d).$$

В [1] (теореми 2,3) доведено, що при виконанні умов $a) - d)$ та, якщо $0 < \omega_0 \leqslant \frac{\pi}{4}$, $p > 1$ або $\frac{\pi}{4} < \omega_0 < 2\pi$, $1 < p < \frac{4\omega_0}{4\omega_0 - \pi}$, то $u \in V_{p,0}^2(G)$ та $||u||_{V_{p,0}^2(G_0^\rho)} \leqslant C\rho^{\frac{\pi}{2\omega_0}-2+\frac{2}{p}}$. Крім того, у цій же праці нами встановлено, що коли $\frac{\pi}{4} < \omega_0 < 2\pi$, $\omega_0 \neq \frac{\pi}{2}$, $p \geqslant \frac{4\omega_0}{4\omega_0-\pi}$, то $u \in C^{\frac{\pi}{2\omega_0}}(\overline{G_0^d})$, а коли $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, $p = 2$, то $u \in C^{1-\varepsilon}(\overline{G_0^d})$, $\forall\varepsilon > 0$.

На прикладі мішаної задачі для рівняння Лапласа в кутовому секторі з однорідними крайовими умовами переконуємось, що навіть при безмежній гладкості даних (коефіцієнтів рівняння, правої частини, крайових умов) ми не маємо безмежної гладкості розв'язку. Максимально можлива гладкість визначається величиною розхилу кута ω_0. Вивчимо це питання у даній праці.

Щодо цієї тематики досліджень, то близькими є роботи [2,3,4,5]. Зокрема в [2] вивчено дане питання для задачі Діріхле. У працях [3,4] при дослідженні вже мішаної задачі та задачі Діріхле в негладких областях (зокрема і в областях з кутовими точками) отримано, що якщо $a^{ij}, a^i, a, f \in C^{k+\alpha}(\overline{G})$, то $u \in C^{k+2+\alpha}(\overline{G})$, але, що дуже важливо, при умові $k + 2 + \alpha < \frac{\pi}{2\omega_0}$ (в наших позначеннях). Вагомою є також праця [5], де достатньо широко досліджено поведінку розв'язків мішаної задачі в просторах $H_a^{(b)}$ (вагових гельдерівських просторах). Зокрема в теоремі 4 ([5], ст.569) доведено, що $u \in C^\lambda(\overline{G})$, проте, знову ж таки, при $2 < \lambda < \frac{\pi}{2\omega_0}$. Тобто у вищезгаданих роботах отримано належність розв'язків мішаної задачі до простору $C^{\frac{\pi}{2\omega_0}-\varepsilon}(\overline{G})$, $\forall\varepsilon > 0$. Ми ж при дещо інших вимогах на гладкість коефіцієнтів рівняння доводимо належність розв'язку u до простору $C^{\frac{\pi}{2\omega_0}}(\overline{G})$ і стверджуємо про максимальність такої гладкості при даному значенні ω_0.

Теорема 1. *Нехай $u \in V^2_{p,0}(G)$ – розв'язок задачі (1),(2). Припустимо, що для деякого цілого $m \geqslant 1$ виконується нерівність*

$$0 < \omega_0 \leqslant \frac{\pi}{2(m+2-\frac{2}{p})}. \tag{3}$$

Припустимо, що виконуються умови a)-d), а також умови:

e) частинні похідні функцій $a^{ij}(x)$, $a^i(x)$, $a(x)$ до порядку m включно існують, та задовольняють умову

$$|x|^m \sum_{i,j=1}^{2} |\nabla^m a^{ij}(x)| + |x|^{m+1} \sum_{i=1}^{2} |\nabla^m a^i(x)| + |x|^{m+2} |\nabla^m a(x)| \leqslant B(|x|),\ \forall x \in \overline{G},$$

де $B(r)$ – неперервна функція, $r \geqslant 0$;

f) $f \in V^m_{p,0}(G)$ та існує $k > 0$ таке, що $||f||_{V^m_{p,0}(G^\rho_{\rho/2})} \leqslant k\rho^{\frac{\pi}{2\omega_0}-m-2+\frac{2}{p}}$, $\rho \in (0,d)$.

Тоді існують числа $d_0 \in (0,d)$ та $C_m > 0$, такі, що $u \in V^{m+2}_{p,0}(G^{d_0}_0)$ і при цьому

$$||u||_{V^{m+2}_{p,0}(G^\rho_0)} \leqslant C_m \rho^{\frac{\pi}{2\omega_0}-m-2+\frac{2}{p}},\ \forall \rho \in (0,d_0), \tag{4}$$

де $C_m > 0$ – деяка стала, яка визначається лише величинами p, ν, μ, s, $M_0 = \max\limits_{\overline{G}} |u|$, k, ω_0 та функціями A та B.

Доведення. Застосуємо метод кілець Кондратьєва для отримання необхідних оцінок в околі кутової точки. Розглянемо дві множини $G^\rho_{\rho/2}$ та $G^{2\rho}_{\rho/4} \supset G^\rho_{\rho/2}$, $\forall \rho > 0$. Після перетворень координат $x = \rho x'$ приходимо до висновку, що функція $w(x') = \rho^{-\frac{\pi}{2\omega_0}} u(\rho x')$ буде розв'язком задачі

$$a^{ij}(\rho x') w_{x'_i x'_j} + \rho a^i(\rho x') w_{x'_i} + \rho^2 a(\rho x') w = \rho^{2-\frac{\pi}{2\omega_0}} f(\rho x'),\ \ x' \in G^2_{1/4}, \tag{5}$$

$$w|_{\Gamma^2_{1,1/4}} = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma^2_{2,1/4}} = 0. \tag{6}$$

Тепер застосовуючи L_p-оцінки Шаудера (теорема 15.3, [6]) всередині області та поблизу гладкого куска межі, дістанемо

$$||w||_{W^{m+2,p}(G^1_{1/2})} \leqslant C'_m \left(||w||_{L_p(G^2_{1/4})} + \rho^{2-\frac{\pi}{2\omega_0}} ||f||_{W^{m,p}(G^2_{1/4})} \right),$$

де C'_m не залежить від w, а визначається лише $\nu, \mu, A(r), B(r)$ та ω_0 (див. доведення теореми 1, [1]). Використання оцінки Шаудера в даній ситуації стало можливим завдяки тому, що в області $G^2_{1/4}$ кусок межі, де задано умову Діріхле, та кусок межі де задано умову Неймана, лежать на деякій додатній відстані один від одного. Повертаючись до старих змінних та використовуючи умови теореми на функцію f а також те, що $|u(x)| \leqslant C_o|x|^{\frac{\pi}{2\omega_0}}$ ([1], теорема 1, п.2), отримаємо

$$||u||_{V^{2+m}_{p,0}(G^\rho_{\rho/2})} \leqslant C_m \rho^{\frac{\pi}{2\omega_0}-2-m+2/p}. \tag{7}$$

Зауважимо, що ми довели оцінку (7), не використовуючи (3). Замінивши ρ на $2^{-k}\rho$ $k = 0, 1, \ldots$ та підсумувавши отримані нерівності за всіма k, дістанемо

$$||u||_{V^{2+m}_{p,0}(G_0^\rho)} \leqslant C_m \rho^{\frac{\pi}{2\omega_0}-2-m+2/p} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(\frac{\pi}{2\omega_0}-2-m+2/p)},$$

що завдяки зробленому припущенню (3), доводить нам твердження теореми 2.

Теорема 2. *Нехай виконуються всі припущення теореми 1, крім умови (3), замість якої виконується умова*

$$\frac{\pi}{2(m+2-\frac{2}{p})} < \omega_0 < \frac{\pi}{2(m+1)}, \;\; p > 2, \, m \geqslant 0. \tag{8}$$

Тоді $u \in C^{\frac{\pi}{2\omega_0}}\left(\overline{G_0^{d_0}}\right)$ *і при цьому існують сталі* C_k, *такі, що*

$$|\nabla^k u(x)| \leqslant C_k |x|^{\frac{\pi}{2\omega_0}-k}, \; x \in \overline{G_0^{r_0}}, \; k = 1, \ldots, m+1. \tag{9}$$

Якщо ж $\omega_0 = \frac{\pi}{2m+2}$, $p \geqslant 2$, *то* $u \in C^{\frac{\pi}{2\omega_0}-\varepsilon}(\overline{G_0^{r_0}})$, $\varepsilon > 0$.

Зауваження. Очевидно, що теорема залишається справедливою і при $p = \infty$. Зокрема, у цьому випадку ми отримуємо максимальну гладкість розв'язку при $0 < \omega_0 < \frac{\pi}{2}$ (виключаються лише значення типу $\omega_0 = \frac{\pi}{2(m+1)}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$).

Доведення. Повернемось ще раз до задачі (5),(6). За теоремою вкладення Соболєва

$$W^{m+2,p}(G^2_{1/4}) \subset C^{m+1+\alpha}(\overline{G^2_{1/4}}), \;\; 0 < \alpha \leqslant 1 - \frac{2}{p}, \;\; p > 2,$$

і при цьому

$$||w||_{C^{m+1+\alpha}(\overline{G^2_{1/4}})} \leqslant ||w||_{W^{m+2,p}(G^2_{1/4})}. \tag{10}$$

Переходячи до старих змінних, та розглядаючи окремо кожен доданок лівої частини (10), отримаємо оцінки

$$|u(x)| \leqslant \tilde{C}_1 \rho^{m+2-\frac{n}{p}} ||u||_{V^{2+m}_{p,0}(G^{\rho/4}_{2\rho})};$$

$$|\nabla u(x)| \leqslant \tilde{C}_2 \rho^{m+1-\frac{n}{p}} ||u||_{V^{2+m}_{p,0}(G^{\rho/4}_{2\rho})};$$

....

....

$$|\nabla^{m+1} u(x)| \leqslant \tilde{C}_{m+1} \rho^{1-\frac{n}{p}} ||u||_{V^{2+m}_{p,0}(G^{\rho/4}_{2\rho})}, \; x \in G^{\rho/4}_{2\rho};$$

$$\sup_{x,y \in G^{\rho/4}_{2\rho}} \frac{|\nabla^{m+1}u(x) - \nabla^{m+1}u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{2}{p}}} \leqslant \tilde{C}_{m+2} ||u||_{V^{2+m}_{p,0}(G^{\rho/4}_{2\rho})}, \;\; x, y \in G^{\rho/4}_{2\rho}.$$

Після застосування (7), дістанемо

$$
\begin{gathered}
|u(x)| \leqslant C_1 \rho^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \\
|\nabla u(x)| \leqslant C_2 \rho^{\frac{\pi}{2\omega_0}-1} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
|\nabla^{m+1} u(x)| \leqslant C_{m+1} \rho^{\frac{\pi}{2\omega_0}-m-1}, \quad \forall x \in G_{2\rho}^{\rho/4};
\end{gathered} \tag{11}
$$

$$
\sup_{x,y \in G_{2\rho}^{\rho/4}} \frac{|\nabla^{m+1} u(x) - \nabla^{m+1} u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{n}{p}}} \leqslant C_{m+2} \rho^{\frac{\pi}{2\omega_0}-2-m+\frac{2}{p}} \ \forall x, y \in G_{2\rho}^{\rho/4}. \tag{12}
$$

Беручи $|x| = \rho$ в (11) отримуємо твердження (9). Далі, враховуючи умову (8), маємо

$$
|x-y|^{\frac{\pi}{2\omega_0}-2-m+\frac{2}{p}} \geqslant (4p)^{\frac{\pi}{2\omega_0}-2-m+\frac{2}{p}} \ \forall x, y \in G_{2\rho}^{\rho/4}.
$$

Використовуючи це, оцінку (12), а також доведені оцінки (9) при $k = m+1$, дістаємо що $u \in C^{\frac{\pi}{2\omega_0}}\left(\overline{G_0^{d_0}}\right)$ (див. доведення теореми 3, [1]). Аналогічно до пророробленого вище, із застосуванням теорем вкладення при дещо інших умовах, отримуємо, що коли $\omega_0 = \frac{\pi}{2(m+1)}$, $p \geqslant 2$, то $u \in C^{\frac{\pi}{2\omega_0}-\varepsilon}\left(\overline{G_0^{r_0}}\right)$, $\varepsilon > 0$. Теорему доведено.

1. Чернецький В.З. *Непокращувальні оцінки розв'язків мішаної задачі для лінійних еліптичних рівнянь другого порядку в околі кутової точки* // Укр. мат. журнал.–1997.–Т.49,N 11.–С.1529-1542.
2. Борсук М.В. Задача Діріхле для еліптичних рівнянь другого порядку в області з конічною точкою на межі. – Київ, 1994. –74с. – (Препринт).
3. Azzam A. *Smootheness properties of solutions of mixed boundary value problems for elliptic equations in sectionally smooth n-dimensional domains.* // Ann.Polon.Math.–1981.–V.40.–P.81-93.
4. Azzam A. and Kreyszig E. *On solution of elliptic equations satisfing mixed boundary conditions* // SIAM J.Math.Anal.–1982.–V.13.–P.254-262.
5. Lieberman G.M. *Optimal Hölder regularity for mixed boundary value problem* // J. Math. Anal. and Appl.–1989.–P.572-586.
6. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – М., ИЛ., 1962. – 202с.

Стаття надійшла до редколегії 23.01.1998