УДК 517.95

ЗАДАЧА ФУР'Є ДЛЯ ОДНІЄЇ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

Г.П.ДОМАНСЬКА

Domanska G.P. The Fourier problem for one pseudoparabolic system. The Fourier problem for a pseudoparabolic system in unbounded (respect to space variables) domain is considered. The condition of existence and uniqueness of a generalized solution of the problem was obtained.

Добре відомо, що питання фільтрації рідини в середовищах з подвійною пористістю [1], передачі тепла в гетерогенному середовищі [2], перенесення вологи в грунті [3] приводять до крайових задач для псевдопараболічного рівняння. Псевдопараболічні рівняння з частинними похідними третього порядку також описують дифузію у тріщинуватому середовищі з поглинанням або частковим насиченням, процес застигання клею, а також з'являються у слабкому формулюванні 2-фазної задачі Стефана, у механіці флюїдів,в механіці суцільного середовища та в інших задачах [4].

Коректність формулювання різних задач для псевдопараболічних рівнянь досліджено у працях багатьох авторів. Зокрема, у праці [5] встановлено умови єдиності розв'язку без початкових умов (задачі Фур'є) для лінійного псевдопараболічного рівняння в обмеженій (за просторовими змінними) області. У праці [6] показано, що задача Коші для псевдопараболічного рівняння має єдиний розв'язок у класі функцій, які зростають не швидше, ніж $e^{-a|x|}$, при $|x| \to \infty$.

У даній праці розглянуто задачу Фур'є для псевдопараболічної системи в необмеженій (за просторовими змінними) області. Доведено існування та єдиність розв'язку в класі функцій, які експоненціально зростають при $t \to -\infty$ та при $|x| \to \infty$ зі швидкістю, що визначається коефіцієнтами системи.

Нехай $Q \subset \mathbb{R}^n \times (-\infty, T), T < \infty$; $Q \cap \{t = \tau\} = \Omega_\tau$; $\partial Q \cap \{t = \tau\} = S_\tau, S = \bigcup\limits_{\tau \in (-\infty, T]} S_\tau$. Припускатимемо, що для всіх $\tau \in (-\infty, T]$ $\Omega_0 \subset \Omega^*_\tau \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, де Ω^*_τ є доповненням проекції Ω_τ на площину $\{t = 0\}$ до цієї площини, mes $\Omega_0 > 0$, а Ω - обмежена множина.

Розглянемо в області Q систему рівнянь вигляду

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D^\alpha(A_{\alpha\beta} D^\beta u_t) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D^\alpha(B_{\alpha\beta} D^\beta u) + \sum_{|\alpha|=1} C_\alpha D^\alpha u +$$
$$+ A(x,t)u - u_t + f(x,t) = 0 \qquad (1)$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35K70.

з крайовими умовами

$$u|_S = 0. \tag{2}$$

Тут $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$, C_α, A квадратні матриці розміру $n \times n$; $u = (u_1, ..., u_n)^T$; $f(x,t) = (f_1(x,t), ..., f_n(x,t))^T$; $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \alpha_i \geqslant 0$;

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n.$$

Говоритимемо, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються відповідно умови (A_0), (A_1), (A_2), (B_0), (B_1), якщо:

$$(A_0) : a_0(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 \, dx \leqslant \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (A_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha u) \, dx \leqslant a^0(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 \, dx,$$
$$\forall t \in (-\infty, T], \forall u \in (H_0(\Omega_t))^n; \quad a_0(t) \geqslant a > 0, t \in (-\infty, T];$$
$$a_0(t), a^0(t) \in L^\infty((-\infty, T)); \quad A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}(x,t); \quad A_{\alpha\beta} = A^*_{\alpha\beta}(x,t), \forall (x,t) \in Q;$$
$$(A_1) : \quad \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (A_{\alpha\beta t}(x,t) D^\beta u, D^\alpha u) \, dx \leqslant a^1(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 \, dx,$$
$$\forall t \in (-\infty, T], \forall u \in (H_0(\Omega_t))^n; \quad a^1(t) \in L^\infty((-\infty, T));$$
$$(A_2) : \quad (-A(x,t)u, u) \geqslant M|u|^2, \quad M > 0, \forall (x,t) \in Q; \quad A(x,t) = A^*(x,t), \forall (x,t) \in Q;$$
$$(B_0) : \quad b_0(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 \, dx \leqslant \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (B_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha u) \, dx \leqslant b^0(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 \, dx,$$
$$\forall t \in (-\infty, T], \forall u \in (H_0(\Omega_t))^n; \quad b_0(t) \geqslant b > 0, \ t \in (-\infty, T];$$
$$b_0(t), b^0(t) \in L^\infty((-\infty, T)); \quad B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}(x,t), \quad B_{\alpha\beta} = B^*_{\alpha\beta}(x,t), \forall (x,t) \in Q;$$
$$(B_1) : \quad \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (B_{\alpha\beta t}(x,t) D^\beta u, D^\alpha u) \, dx \leqslant b^1(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 \, dx,$$
$$\forall t \in (-\infty, T], \forall u \in (H_0(\Omega_t))^n; \quad b^1(t) \in L^\infty((-\infty, T)).$$

Множину вимірних в Q функцій, квадрат модуля яких інтегровний в замиканні довільної обмеженої підобласті Q^* області Q, позначимо через $L^2_{\text{loc}}(Q)$.

Означення. *Функцію $u(x,t)$, яка задовольняє включення*

$$u, u_t \in L^2_{\text{loc}}((-\infty, T], (H_0(\Omega_t))^n)$$

і рівність

$$\int\limits_Q \left[(u_t, v) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (A_{\alpha\beta} D^\beta u_t, D^\alpha v) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (B_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha v) - \right.$$
$$\left. - \sum_{|\alpha|=1} (C_\alpha D^\alpha u, v) - (A(x,t)u, v) - (f(x,t), v) \right] dxdt = 0 \tag{3}$$

для довільної функції $v \in C_0^\infty(Q)$, називатимемо узагальненим розв'язком задачі (1), (2).

Введемо такі позначення:

$$a(t) = \max_{|\beta|=1} \sup_{Q_{t,T}} \sum_{|\alpha|=1} \|A_{\alpha\beta}(x,\tau)\|^2, \quad \hat{a} = \sup_{(-\infty,T]} a(t); \quad b(t) = \max_{|\beta|=1} \sup_{Q_{t,T}} \sum_{|\alpha|=1} \|B_{\alpha\beta}(x,\tau)\|^2,$$

$$\hat{b} = \sup_{(-\infty,T]} b(t); \quad c(t) = \sup_{Q_{t,T}} \sum_{|\alpha|=1} \|C_\alpha(x,\tau)\|^2, \quad \hat{c} = \sup_{(-\infty,T]} c(t);$$

$$A_0(t) = \max\left\{ \frac{a^0(t)+b^0(t)}{2}, \sup_{x\in\Omega_t}\left[\frac{\|I - A(x,t)\|}{2}\right]\right\},$$

де $Q_{t_1,t_2} = Q \cap \{t_1 < t < t_2\}, t_1, t_2 \in (-\infty, T]$; $I-$ одинична матриця розміру $n \times n$.

Розглянемо систему нерівностей:

$$\begin{aligned}
&2 - \lambda\varepsilon_2 - \varepsilon_3 > \frac{\lambda^2\hat{a}}{2a},\\
&\inf_Q \left[M - \frac{\|A_t(x,t)\|}{2}\right] - \frac{\lambda\delta_2 + \delta_3}{2} - \frac{\lambda^2\hat{a}(2-\lambda\varepsilon_2-\varepsilon_3)}{4a(2-\lambda\varepsilon_2-\varepsilon_3) - 2\lambda^2\hat{a}} > 0,\\
&b - \frac{1}{2}\inf_{(-\infty,T]}\sup_{(-\infty,\tau]}\left(a^1(t)+b^1(t)\right) - \frac{\lambda\hat{b}}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{1}{\delta_2}\right) - \frac{\hat{c}}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_3}+\frac{1}{\delta_3}\right) > 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Називатимемо набір чисел $\{\delta_2, \delta_3, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}(\delta_i > 0, \varepsilon_i > 0, i \in \{2,3\})$ допустимим для системи (4), якщо вона для цього набору має додатний розв'язок λ.

Позначимо через Δ_1 множину допустимих наборів для системи (4) і через Λ_1 - множину додатних розв'язків цієї системи для всіх $\{\delta_2, \delta_3, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} \subset \Delta_1$.

Нехай

$$\rho(t,\lambda,\Delta_1) = \min\left\{ \frac{\inf_{Q_{t,T}}[2M - \|A_\tau(x,\tau)\|] - \lambda\delta_2 - \delta_3}{2} - \frac{\lambda^2\hat{a}(2-\lambda\varepsilon_2-\varepsilon_3)}{4a(2-\lambda\varepsilon_2-\varepsilon_3)-2\lambda^2\hat{a}}, \right.$$

$$\left. b_0(t) - \frac{a^1(t)+b^1(t)}{2} - \frac{\lambda b(t)}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{1}{\delta_2}\right) - \frac{c(t)}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_3}+\frac{1}{\delta_3}\right)\right\}; \quad \rho_1(t,\lambda,\Delta_1) = \frac{\rho(t,\lambda,\Delta_1)}{A_0(t)}.$$

Лема. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови $(A_0), (A_1), (A_2), (B_0), (B_1)$; $A_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta t}, B_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta t}, C_\alpha, A \in L^\infty(Q)$; $\Delta_1 \neq \oslash$; $f \in L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty,T]\,;(L^2(\Omega_t))^n)$; $S-$ гладка поверхня; тоді існує таке $\delta > 0$, що справджується нерівність:*

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_{t_2,T}} \rho(t,\lambda,\Delta_1)\sum_{|\alpha|\leqslant 1}|D^\alpha u|^2 e^{-\lambda|x|}dxdt \leqslant A_0(t_1)\int\limits_{\Omega_{t_1}}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}|D^\alpha u|^2 \times\\
&\times e^{-\lambda|x|}dx\exp\left(-\int\limits_{t_1}^{t_2}\rho_1(\theta,\lambda,\Delta_1)d\theta\right) +\\
&+\frac{1}{\delta}\int\limits_{t_1}^{t_2}\exp\left(-\int\limits_{t}^{t_2}\rho_1(\theta,\lambda,\Delta_1)d\theta\right)\rho_1(t,\lambda,\Delta_1)\int\limits_{Q_{t,T}}|f(x,\theta)|^2 e^{-\lambda|x|}dxd\theta dt,
\end{aligned} \tag{5}$$

$\forall t_1, t_2,\ (t_1 < t_2 \leqslant T),\ де\ |x| = \left(\sum\limits_{|\alpha|=1} x_i^2\right)^{1/2}.$

Доведення. Нехай $u(x,t)$ - узагальнений розв'язок задачі (1), (2). Введемо функцію

$$v(x,t) = (u(x,t) + u_t(x,t))e^{-\lambda|x|}.$$

Підставимо функцію $v(x,t)$ у рівність (3) і оцінимо кожен доданок окремо:

$$I_1 = \int\limits_{Q_{\tau,T}} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}D^\beta u_t, D^\alpha\left((u+u_t)e^{-\lambda|x|}\right)\right) dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}a_0(T)\int\limits_{\Omega_T}\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u|^2 e^{-\lambda|x|}dx - \frac{1}{2}a^0(\tau)\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u|^2e^{-\lambda|x|}dx +$$

$$+\int\limits_{Q_{\tau,T}}\left(a_0(t) - \frac{\lambda a(t)}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\delta_1}\right)\right)\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u_t|^2e^{-\lambda|x|}dxdt -$$

$$-\frac{\lambda\delta_1}{2}\int\limits_{Q_{\tau,T}}|u|^2e^{-\lambda|x|}dxdt - \frac{\lambda\varepsilon_1}{2}\int\limits_{Q_{\tau,T}}|u_t|^2e^{-\lambda|x|}dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\tau,T}}a^1(t)\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u|^2e^{-\lambda|x|}dxdt;$$

$$I_2 = \int\limits_{Q_{\tau,T}} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(B_{\alpha\beta}D^\beta u, D^\alpha\left((u+u_t)e^{-\lambda|x|}\right)\right) dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}b_0(T)\int\limits_{\Omega_T}\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u|^2 e^{-\lambda|x|}dx - \frac{1}{2}b^0(\tau)\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u|^2e^{-\lambda|x|}dx +$$

$$+\int\limits_{Q_{\tau,T}}\left(b_0(t) - \frac{\lambda b(t)}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{1}{\delta_2}\right) - \frac{b^1(t)}{2}\right)\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u|^2e^{-\lambda|x|}dxdt -$$

$$-\frac{\lambda\delta_2}{2}\int\limits_{Q_{\tau,T}}|u|^2e^{-\lambda|x|}dxdt - \frac{\lambda\varepsilon_2}{2}\int\limits_{Q_{\tau,T}}|u_t|^2e^{-\lambda|x|}dxdt;$$

$$I_3 = \int\limits_{Q_{\tau,T}}\sum_{|\alpha|=1}\left(C_\alpha D^\alpha u, (u+u_t)e^{-\lambda|x|}\right)dxdt \leqslant \frac{\delta_3}{2}\int\limits_{Q_{\tau,T}}|u|^2e^{-\lambda|x|}dxdt +$$

$$+\frac{\varepsilon_3}{2}\int\limits_{Q_{\tau,T}}|u_t|^2e^{-\lambda|x|}dxdt + \left(\frac{1}{2\varepsilon_3}+\frac{1}{2\delta_3}\right)\int\limits_{Q_{\tau,T}}c(t)\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u|^2e^{-\lambda|x|}dxdt;$$

$$I_4 = \int\limits_{Q_{\tau,T}}\left(f(x,t), (u+u_t)e^{-\lambda|x|}\right)dxdt \leqslant \frac{1}{\delta}\int\limits_{Q_{\tau,T}}|f(x,t)|^2e^{-\lambda|x|}dxdt +$$

$$+\frac{\delta}{2}\int\limits_{Q_{\tau,T}}|u|^2e^{-\lambda|x|}dxdt + \frac{\delta}{2}\int\limits_{Q_{\tau,T}}|u_t|^2e^{-\lambda|x|}dxdt;$$

$$I_5 = \int\limits_{Q_{\tau,T}}\left(u_t - A(x,t)u, (u+u_t)e^{-\lambda|x|}\right)dxdt \geqslant -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\|I - A(x,\tau)\||u|^2e^{-\lambda|x|}dx +$$

$$+\int\limits_{Q_{\tau,T}}|u_t|^2e^{-\lambda|x|}dxdt-\int\limits_{Q_{\tau,T}}\left(\frac{\|A_t(x,t)\|}{2}-M\right)|u|^2e^{-\lambda|x|}dxdt.$$

Покладемо

$$\varepsilon_1=\frac{2-\lambda\varepsilon_2-\varepsilon_3}{\lambda},\quad \delta_1=\frac{\lambda\hat{a}(2-\lambda\varepsilon_2-\varepsilon_3)}{2a(2-\lambda\varepsilon_2-\varepsilon_3)-\lambda^2\hat{a}}.$$

Тоді з оцінок інтегралів I_1,I_2,I_3,I_4,I_5 випливає нерівність:

$$\int\limits_{Q_{\tau,T}}\rho(t,\lambda,\Delta_1)\sum_{|\alpha|\leqslant1}|D^\alpha u|^2e^{-\lambda|x|}dxdt\leqslant$$
$$\leqslant A_0(\tau)\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{|\alpha|\leqslant1}|D^\alpha u|^2e^{-\lambda|x|}dx+\frac{1}{\delta}\int\limits_{Q_{\tau,T}}|f(x,t)|^2e^{-\lambda|x|}dxdt. \tag{6}$$

Введемо функцію

$$y(\tau)=\int\limits_{Q_{\tau,T}}\rho(t,\lambda,\Delta_1)\sum_{|\alpha|\leqslant1}|D^\alpha u|^2e^{-\lambda|x|}dxdt.$$

Тоді нерівність (6) можна переписати у вигляді:

$$y'(\tau)+\rho_1(t,\lambda,\Delta_1)y(\tau)\leqslant\frac{\rho_1(t,\lambda,\Delta_1)}{\delta}\int\limits_{Q_{\tau,T}}|f(x,t)|^2e^{-\lambda|x|}dxdt. \tag{7}$$

Домноживши (7) на $\exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t_2}\rho_1(\theta,\lambda,\Delta_1)d\theta\right)$ і проінтегрувавши по відрізку $[t_1,t_2]$, отримаємо нерівність (5). Лему доведено.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови леми. Тоді задача (1), (2) не може мати більше, ніж один розв'язок в класі функцій u таких, що*

$$\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|\leqslant1}|D^\alpha u|^2e^{-\lambda|x|}dx=o(1)\exp\left(\int\limits_t^T\rho_1(\theta,\lambda,\Delta_1)d\theta\right), \tag{8}$$

коли $t\to-\infty$ *і* $\lambda\in\Lambda_1$.

Доведення. Нехай задача (1), (2) має два розв'язки u^1 і u^2, які задовольняють умову (8). Функція $u=u^1-u^2$ теж задовольняє умову (8) і, крім того, є розв'язком (1), (2) при $f(x,t)\equiv0$. За попередньою лемою

$$\int\limits_{Q_{t_2,T}}\rho(t,\lambda,\Delta_1)\sum_{|\alpha|\leqslant1}|D^\alpha u|^2e^{-\lambda|x|}dxdt\leqslant A_0(t_1)\int\limits_{\Omega_{t_1}}\sum_{|\alpha|\leqslant1}|D^\alpha u|^2e^{-\lambda|x|}dx\times$$
$$\times\exp\left(-\int\limits_{t_1}^{t_2}\rho_1(\theta,\lambda,\Delta_1)d\theta\right)=o(1)A_0(t_1)\exp\left(\int\limits_{t_2}^{T}\rho_1(\theta,\lambda,\Delta_1)d\theta\right),$$

коли $t_1\to-\infty$. Тоді спрямовуючи $t_1\to-\infty$ і врахувавши довільність t_2, отримуємо, що $u(x,t)=0$ в Q. Отже $u^1=u^2$. Теорему доведено.

Розглянемо тепер умови існування розв'язку задачі (1),(2).

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови* $(A_0), (A_1)$, (A_2), $(B_0), (B_1)$. *Якщо* $A_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta t}, B_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta t}, C_\alpha, A \in \in L^\infty(Q)$; $S-$ *гладка поверхня;* $\Delta_1 \neq \oslash, \lambda \in \Lambda_1$ *і, крім того,* $0 < \lambda < \sqrt{\dfrac{2a}{\hat{a}}}$ *та*

$$\int\limits_{-\infty}^{T} \int\limits_{Q_{t,T}} \exp\left(-\int\limits_{\theta}^{T} \rho_1(\tau, \lambda, \Delta_1) d\tau\right) |f(x,t)|^2 e^{-\lambda|x|} dx d\theta dt < \infty,$$

то існує узагальнений розв'язок задачі (1), (2) такий, що

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} |D^\alpha u|^2 e^{-\lambda|x|} dx dt \leqslant M_1 \exp\left(\int\limits_{t_0}^{T} \rho_1(\theta, \lambda, \Delta_1) d\theta\right), \tag{9}$$

$M_1 = \mathrm{const}, t_1 \in (-\infty, T]$.

Доведення. Оскільки множина Ω - обмежена, то існує таке $R > 0$, що Ω міститься в кулі $O(R)$ радіуса R, $O(R) \subset \mathbb{R}^n$. Позначимо $Q_k = (O(R+k) \times (T-k, T]) \cap Q, k = 1, 2, \ldots$. Розглянемо допоміжну задачу

$$Lu = f^k(x,t), \qquad (x,t) \in Q_k; \tag{10}$$

$$u|_{\partial Q_k} = 0; \tag{11}$$

$$u(x, T-k) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

де

$$f^k(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & (x,t) \in Q_k; \\ 0, & (x,t) \in Q \setminus Q_k. \end{cases}$$

Нехай $u^k(x,t)$ - узагальнений розв'язок задачі (1), (2), продовжений нулем на $Q \setminus Q_k$. Тоді за лемою для $u^k(x,t)$ виконується нерівність (5).

Розглянемо функцію $\varphi(t)$ з такими властивостями: $\varphi(t) \in C^1(\mathbb{R}^1)$; $\varphi'(t) \geqslant 0$ на $\mathbb{R}^1$; $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1$; $\varphi(t) \equiv 1, t \in [t_2 + 1, \infty)$; $\varphi(t) \equiv 0, t \in (-\infty, t_2]$. Покладемо в тотожності (3) $v(x,t) = u_t^k(x,t)\varphi(t)e^{-\lambda|x|}$. Отримаємо:

$$\int\limits_{Q_{t_2,T}} \Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta} D^\beta u_t^k, D^\alpha \left(u_t^k e^{-\lambda|x|}\right)\right) + |u_t^k|^2 e^{-\lambda|x|} +$$
$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(B_{\alpha\beta} D^\beta u^k, D^\alpha \left(u_t^k e^{-\lambda|x|}\right)\right) - \left(A(x,t) u^k, u_t^k e^{-\lambda|x|}\right) -$$
$$- \sum_{|\alpha|=1} \left(C_\alpha D^\alpha u^k, u_t^k e^{-\lambda|x|}\right) - \left(f^k(x,t), u_t^k e^{-\lambda|x|}\right) \Bigg] \varphi(t) dx dt = 0, \tag{13}$$

Оцінимо кожен доданок (13) окремо:

$$I_6 = \int\limits_{Q_{t_2,T}} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}D^\beta u_t^k, D^\alpha\left(u_t^k e^{-\lambda|x|}\varphi(t)\right)\right) dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{Q_{t_2,T}} \left(a_0(t) - \frac{\lambda a(t)}{2\varepsilon_6}\right) \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_t^k|^2 e^{-\lambda|x|}\varphi(t)dxdt - \frac{\lambda\varepsilon_6}{2} \int\limits_{Q_{t_2,T}} |u_t^k|^2 e^{-\lambda|x|}\varphi(t)dxdt;$$

$$I_7 = \int\limits_{Q_{t_2,T}} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(B_{\alpha\beta}D^\beta u^k, D^\alpha\left(u_t^k e^{-\lambda|x|}\varphi(t)\right)\right) dxdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_2,T}} \left[\varphi'(t)b^0(t) + \varphi(t)b^1(t) + \frac{\lambda b(t)}{\varepsilon_7}\right] \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u^k|^2 e^{-\lambda|x|}dxdt -$$

$$- \frac{\lambda\varepsilon_7}{2} \int\limits_{Q_{t_2,T}} |u_t^k|^2 e^{-\lambda|x|}\varphi(t)dxdt;$$

$$I_8 = \int\limits_{Q_{t_2,T}} \sum_{|\alpha|=1} \left(C_\alpha D^\alpha u^k, u_t^k e^{-\lambda|x|}\varphi(t)\right) dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\varepsilon_8} \int\limits_{Q_{t_2,T}} c(t) \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u^k|^2 e^{-\lambda|x|}\varphi(t)dxdt + \frac{\varepsilon_8}{2} \int\limits_{Q_{t_2,T}} |u_t^k|^2 e^{-\lambda|x|}\varphi(t)dxdt;$$

$$I_9 = \int\limits_{Q_{t_2,T}} \left(A(x,t)u^k, u_t^k e^{-\lambda|x|}\varphi(t)\right) dxdt \leqslant \frac{\varepsilon_9}{2} \int\limits_{Q_{t_2,T}} |u_t^k|^2 e^{-\lambda|x|}\varphi(t)dxdt +$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon_9} \int\limits_{Q_{t_2,T}} \|A(x,t)\|^2 |u^k|^2 e^{-\lambda|x|}\varphi(t)dxdt;$$

$$I_{10} = \int\limits_{Q_{t_2,T}} \left(f^k(x,t), u_t^k e^{-\lambda|x|}\varphi(t)\right) dxdt \leqslant \frac{\varepsilon_{10}}{2} \int\limits_{Q_{t_2,T}} |u_t^k|^2 e^{-\lambda|x|}\varphi(t)dxdt +$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon_{10}} \int\limits_{Q_{t_2,T}} |f^k(x,t)|^2 e^{-\lambda|x|}\varphi(t)dxdt.$$

Виберемо ε_6 таким чином, щоб справджувалася нерівність:

$$\frac{\lambda\hat{a}}{a} < \varepsilon_6 < \frac{2}{\lambda}.$$

Тоді з довільності вибору $\varepsilon_7, \varepsilon_8, \varepsilon_9, \varepsilon_{10}$ і з оцінок інтегралів $I_6, I_7, I_8, I_9, I_{10}$ випливає нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_2+1,T}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} |D^\alpha u_t^k|^2 e^{-\lambda|x|}dxdt \leqslant \frac{M_2(\varepsilon_6)}{\delta} \left[\int\limits_{Q_{t_2,T}} |f^k(x,t)|^2 e^{-\lambda|x|}dxdt + \right.$$

$$+\int\limits_{Q}\exp\left(-\int\limits_{t}^{T}\rho_1(\theta,\lambda,\Delta_1)d\theta\right)|f^k(x,t)|^2e^{-\lambda|x|}dxdt\exp\left(\int\limits_{t_2}^{T}\rho_1(\theta,\lambda,\Delta_1)d\theta\right)+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{T}\rho_1(\theta,\lambda,\Delta_1)\int\limits_{Q_{t,T}}\exp\left(-\int\limits_{\theta}^{T}\rho_1(\tau,\lambda,\Delta_1)d\tau\right)|f^k(x,\theta)|^2e^{-\lambda|x|}dxd\theta dt\times$$

$$\times\exp\left(\int\limits_{t_2}^{T}\rho_1(\theta,\lambda,\Delta_1)d\theta\right)\Bigg]\leqslant M_3(\Delta_1,\varepsilon_6,t_2). \tag{14}$$

Нерівність (5) для функцій $u^k(x,t)$ може бути записана у формі:

$$\int\limits_{Q_{t_2+1,T}}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}|D^\alpha u^k|^2e^{-\lambda|x|}dxdt\leqslant M_4(\Delta_1,\varepsilon_6,t_2). \tag{15}$$

Отже, для функцій $u^k(x,t)$ справедливі оцінки:

$$\|u_t^k\|_{L^2_{\rm loc}((t_2+1,T);(H_0(\Omega_t))^n)}\leqslant M_3;\quad \|u^k\|_{L^2_{\rm loc}((t_2+1,T);(H_0(\Omega_t))^n)}\leqslant M_4, \tag{16}$$

де $t_2<(T-1)$ - довільне фіксоване, а сталі M_3 та M_4 не залежать від k.

Розглянемо область $Q_{t_1,T}$, де $t_1=T-1$. Тоді з $\{u^k(x,t)\}$ можна виділити підпослідовність $\{u^{k,1}(x,t)\}$ таку, що: $\{u^{k,1}(x,t)\}\to u^1(x,t)$ слабко в $L^2_{\rm loc}((t_1,T);(H_0(\Omega_t))^n)$; $\{u_t^{k,1}(x,t)\}\to u_t^1(x,t)$ слабко в $L^2_{\rm loc}((t_1,T);(H_0(\Omega_t))^n)$, коли $k\to\infty$, причому для u^1 справедливі оцінки (16).

Далі розглядаємо послідовність $\{u^{k,1}(x,t)\}$ в області $Q_{t_2,T}$, де $t_2=T-2$, і виділяємо підпослідовність $\{u^{k,2}(x,t)\}$ таку, що: $\{u^{k,2}(x,t)\}\to u^2(x,t)$ слабко в $L^2_{\rm loc}((t_2,T);(H_0(\Omega_t))^n)$; $\{u_t^{k,2}(x,t)\}\to u_t^2(x,t)$ слабко в $L^2_{\rm loc}((t_2,T);(H_0(\Omega_t))^n)$, коли $k\to\infty$.

Продовжуючи цей процес далі, тобто, покладаючи $t_i=T-i$, ми отримаємо діагональну послідовність $\{u^{k,k}(x,t)\}$. Зауважимо, що

$$u^k(x,t)=u^s(x,t),\qquad (x,t)\in Q_{t_s,T},$$

якщо $k>s$. Побудуємо тепер функцію $u(x,t)$ за формулою:

$$u(x,t)=u^k(x,t),\qquad (x,t)\in Q_{t_k,T},\quad k=1,2,\ldots$$

Тоді $\{u^{k,k}(x,t)\}\to u(x,t)$ слабко в $L^2_{\rm loc}((\tau_0,T);(H_0(\Omega_t))^n)$; $\{u_t^{k,k}(x,t)\}\to u_t(x,t)$ слабко в $L^2_{\rm loc}((\tau_0,T);(H_0(\Omega_t))^n)$, коли $k\to\infty$, для будь-якого фіксованого $\tau_0<T$. Крім того

$$\|u_t\|_{L^2_{\rm loc}((-\infty,T);(H_0(\Omega_t))^n)}\leqslant M_3;\quad \|u\|_{L^2_{\rm loc}((-\infty,T);(H_0(\Omega_t))^n)}\leqslant M_4.$$

Легко бачити, що $u(x,t)$ є узагальненим розв'язком задачі (1),(2) і нерівність (9) для нього виконується. Теорему доведено.

1. Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.it Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. матем. и мех. – 1960. – Т.24, Вып.5. – С.852–864.

2. Рубинштейн Л.И. *К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах* // Изв. АН СССР. Сер. география и геофизика. – 1948. – Т.12, N.1. – С.27–45.

3. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв.- Москва: Наука, 1976. – 352с.

4. Majchrowski M. *On inverse problems with nonlocal condition for parabolic systems of partial differential equations and pseudoparabolic equations* // Demonstr. math. – 1993. – Vol.26, N.1. – P.255–275.

5. Бас М.О., Лавренюк С.П. *Про єдиність розв'язку задачі Фур'є для однієї системи типу Соболева-Галперна* // Укр. матем. журнал – 1996. – Т.48, N1. – С.124– 128.

6. Rundell W. *The uniqueness class for the cauchy problem for pseudoparabolic equations* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1979. – Vol.76, N.2. – P.253–257.

Стаття надійшла до редколегії 10.09.1997