УДК 517.95

ДЕЯКІ ПАРАБОЛІЧНІ ВАРІАЦІЙНІ НЕРІВНОСТІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

О.М. Бугрій

Buhrii O.M. Some parabolic variational inequalities without initial conditions. Some nonlinear parabolic variational inequalities without initial condition in an unbounded (with respect to a time variable) domain were studied. The existence and uniqueness condition of the solution of these inequalities was obtained.

Задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь та систем досліджувалися раніше багатьма авторами [1] – [8]. Зокрема, варіаційні нерівності без початкових умов у класах обмежених, періодичних або майже періодичних за часом функцій розглянуто у [9], [10]. У даній праці досліджено деякі параболічні варіаційні нерівності без початкових умов у необмеженій за часом циліндричній області. Отримано умови існування та єдиності розв'язку нерівності у класі функцій, які можуть експоненціально зростати, якщо час прямує до мінус нескінченності. Зазначимо, що аналогічні дослідження для інших параболічних нерівностей та їх систем проведено раніше у [11], [12].

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$, $Q_T = \Omega \times (-\infty, T)$, $T \leqslant \infty$; $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$; V – замкнений підпростір, $\overset{o}{H}{}^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$; K – опукла замкнена множина в V, яка містить нульовий елемент;
$W = \{w(x,t) | w \in L^2_{\rm loc}((-\infty, T); V), w_t \in L^2_{\rm loc}((-\infty, T); V^*)\}$.

Розглянемо задачу про знаходження функції $u(x,t)$, яка задовольняє включенням $u(x,t) \in L^\infty_{\rm loc}((-\infty, T); L^2(\Omega)) \cap W$, $u(x,t) \in K$ майже для усіх $t \in (-\infty, T]$ і яка справджує варіаційну нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1 t_2}} \Big[v_t(v-u) + \sum_{i=1}^n a_i(x, |u_{x_i}|) u_{x_i}(v_{x_i} - u_{x_i}) + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) u_{x_i}(v-u) + c(x,t)u(v-u) +$$
$$+ g(x,t,u)(v-u) - f_0(x,t)(v-u) - \sum_{i=1}^n f_i(x,t)(v_{x_i} - u_{x_i})\Big]\, dx\, dt \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_\Omega [v(x,t_2) - u(x,t_2)]^2\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega [v(x,t_1) - u(x,t_1)]^2\, dx \qquad (1)$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35K85.

для довільної функції $v \in W$, $v \in K$ майже для усіх $t \in (-\infty, T]$ і для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$.

Будемо вважати, що функції a_i, b_i, $(i = \overline{1,n})$, c, g в нерівності (1) справджують такі умови:

(A): майже для усіх $x \in \Omega$ функція $\tau \to a(x,\tau)$ неперервна на $\mathbb{R}_+$, а функція $x \to a_i(x,\tau)$ вимірна для усіх $\tau \in \mathbb{R}_+$;
для усіх $\tau, s \in \mathbb{R}_+$, $\tau \geqslant s$, і майже усіх $x \in \Omega$ $a_i(x,\tau)\tau - a_i(x,\tau)s \geqslant a_0(\tau - s)$, $a_0 = \text{const}$, $a_0 > 0$, $(i = \overline{1,n})$ для майже усіх $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$, $|a_i(x,\tau)| \leqslant a_1$, $a_1 = \text{const}$;

(B): $b_i \in L^\infty(Q_T)$, $(i = \overline{1,n})$; $b_0 = \sup\limits_{Q_T} \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2(x,t)$;

(C): $c \in L^\infty(Q_T)$, $c(x,t) \geqslant c_0 > 0$ майже скрізь в Q_T;

(D): майже для усіх $(x,t) \in Q_T$ функція $\tau \to g(x,t,\tau)$ неперервна на $\mathbb{R}$, а функція $(x,t) \to g(x,t,\tau)$ вимірна для усіх $\tau \in \mathbb{R}$;
для усіх $\tau \in \mathbb{R}$ і майже усіх $(x,t) \in Q_T$ $|g(x,t,\tau)| \leqslant g_0|\tau|^{p-1}$,
$g_0 = \text{const}$, $1 < p \leqslant 2$;
$\int\limits_\Omega [g(x,t,v_1) - g(x,t,v_2)](v_1 - v_2)\,dx \geqslant 0$ для довільних $v_1, v_2 \in L^p(\Omega)$.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів нерівності (1) справджуться умови* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)** *і* $b_0 < 4a_0c_0$. *Тоді нерівність (1) не може мати більше одного розв'язку* $u(x,t)$, *який справджує умову* $\lim\limits_{t \to -\infty} \int\limits_\Omega u^2(x,t)e^{\alpha_0 t}\,dx = 0$, *де* $\alpha_0 = (4a_0c_0 - b_0)/(2a_0)$.

Доведення. Нехай існує два розв'язки $u^{(1)}(x,t)$, $u^{(2)}(x,t)$ нерівності (1). Оскільки $u_1, u_2 \in W$, то з теореми 1.17 [13] випливає, що $u^{(i)} \in C((-\infty,T]; L^2(\Omega))$ і мають сенс інтеграли

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} u^{(i)} u_t^{(i)}\,dx\,dt, \quad (i = 1,2).$$

Розглянемо оператор A, який майже для усіх $t \in (-\infty, T]$ визначається рівністю

$$\langle Au, v\rangle(t) = \int\limits_\Omega \left[\sum_{i=1}^{n} a(x,|u_{x_i}|)u_{x_i}v_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b(x,t)u_{x_i}v + c(x,t)uv + g(x,t,u)v\right] dx$$

де $u, v \in W$. Оператор A є обмеженим і монотонним. Справді,

$$\langle Au - Av, u - v\rangle(t) = \int\limits_\Omega \Big[\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,|u_{x_i}|)u_{x_i} - a_i(x,|v_{x_i}|)v_{x_i})(u_{x_i} - v_{x_i}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)(u_{x_i} - v_{x_i})(u - v) + c(x,t)(u-v)^2 + (g(x,t,u) - g(x,t,v))(u - v)\Big]\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_\Omega \Big[\left(a_0 - \frac{b_0\delta_0}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}(u_{x_i} - v_{x_i})^2 + \left(c_0 - \frac{1}{2\delta_0}\right)(u-v)^2\Big]\,dx \geqslant \frac{\alpha_0}{2}\int\limits_\Omega (u-v)^2\,dx. \qquad (2)$$

Легко показати, що для функцій $u_1, u_2 \in L^2_{\text{loc}}((-\infty,T]; V) \cap C((-\infty,T]; L^2(\Omega))$, які справджують нерівності

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (v_t - F_i)(v - u_i)\,dx\,dt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_\Omega [v(x,t_2) - u_i(x,t_2)]^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega [v(x,t_1) - u_i(x,t_1)]^2\,dx \quad (3)$$

$(i = 1, 2)$ виконується оцінка:

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (F_1(x,t) - F_2(x,t))(u_1 - u_2)\,dx\,dt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[u_1(x,t_2) - u_2(x,t_2)]^2\,dx - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[u_1(x,t_1) - u_2(x,t_1)]^2\,dx. \tag{4}$$

Зокрема, нерівності (3), (4) виконуються для функцій

$$F_i(x,t) = f_0(x,t) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(x,t)}{\partial x_i} - Au^{(i)},\ (i = 1, 2),$$

оскільки $u^{(i)}(x,t)$ – розв'язки нерівності (1). Тоді з (4) отримаємо, що

$$\frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}y(t)\,dt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\langle Au^{(1)} - Au^{(2)}, u^{(1)} - u^{(2)}\rangle(t)\,dt \leqslant 0$$

для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$, де $y(t) = \int\limits_{\Omega}[u^{(1)}(x,t) - u^{(2)}(x,t)]^2\,dx$.

Врахувавши (2), з останньоі нерівності отримаємо, що

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}(y'(t) + \alpha_0 y(t))\,dt \leqslant 0$$

для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$. Отже, $y'(t) + \alpha_0 y(t) \leqslant 0$ майже скрізь на $(-\infty, T]$. Тому $y(t_2)e^{\alpha_0 t_2} \leqslant y(t_1)e^{\alpha_0 t_1}$ для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$.
Оскільки $\lim\limits_{t_1\to-\infty} y(t_1)e^{\alpha_0 t_1} = 0$, то $y(t) \leqslant 0$. Але $y(t) \geqslant 0$. Отже, $y(t) = 0$ майже для усіх $t \in (-\infty, T]$, тому $u^{(1)}(x,t) = u^{(2)}(x,t)$ майже скрізь у Q_T.

Теорема 2. *Нехай виконуються всі умови теореми 1 і разом з тим функції $t \to b_i(x,t)$, $t \to c(x,t)$, $t \to f_k(x,t)$, $(i = \overline{1,n})$, $(k = \overline{0,n})$ неперервні на $(-\infty, T]$ майже для усіх $x \in \Omega$; для довільного $\varepsilon_0 > 0$ існує таке $\delta > 0$, що*

$$|g(x, t+\delta, \tau) - g(x,t,\tau)| \leqslant \varepsilon_0|\tau|^{p-1}$$

для довільних $t \in (-\infty, T]$; існує таке дійсне число $\lambda \in (0, \alpha_0/2)$, що $f_k(x,t)e^{\lambda t} \in L^2(Q_T)$, $(k = \overline{0,n})$. Тоді існує розв'язок $u(x,t)$ нерівності (1), який справджує умову

$$\lim_{t\to-\infty}\int\limits_{\Omega}u^2(x,t)e^{2\lambda t}\,dx = 0.$$

Доведення. Розглянемо в $Q_{t_0,T}$ задачу

$$u_t + A(t)u + \frac{1}{\varepsilon}B(ue^{2\lambda t}) = f_{0,t_0}(x,t) - \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_{i,t_0}(x,t)}{\partial x_i}, \tag{5}$$

$$u(x,t_0) = 0, \quad t_0 \in (-\infty, T], \tag{6}$$

де $\varepsilon > 0$, $B(w) = J(w - P_k(w))$, J – оператор двоїстості між V і V^*, P_K – оператор проектування на K,

$$f_{k,t_0}(x,t) = \begin{cases} f_k(x,t), & (x,t) \in Q_{t_0,T}, \\ 0, & (x,t) \in Q_{t_0}, (k = \overline{0,n}). \end{cases}$$

Зазначимо, що оператор B є обмеженим, монотонним і ліпшиць-неперервним оператором ([9], стор. 384). За теоремою 1.2 ([9], стор. 173) існує функція $u(x,t)$, яка є розв'язком задачі (5), (6) в $Q_{t_0,T}$ і яка справджує включення $u \in L^2((t_0,T);V)$, $u_t \in L^2((t_0,T);V^*)$. Вибираючи тепер $t_0 = T-1, T-2, \ldots, T-k, \ldots$, отримаємо послідовність функцій $\{u^{k,\varepsilon}(x,t)\}$, які є розв'язками задачі (5), (6). Продовжимо кожну функцію $u^{k,\varepsilon}(x,t)$ нулем в область Q_{T-k}. Тоді для довільних k і довільних $v \in L^2((-\infty,T];V)$, $\tau \in (-\infty,T]$ справджується рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg[u_t^{k,\varepsilon} v + \sum_{i=1}^{n} a_i(x, |u_{x_i}^{k,\varepsilon}|) u_{x_i}^{k,\varepsilon} v_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) u_{x_i}^{k,\varepsilon} v + c(x,t) u^{k,\varepsilon} v +$$

$$+ g(x,t,u^{k,\varepsilon}) v + \frac{1}{\varepsilon} B(u^{k,\varepsilon} e^{2\lambda t}) v - f_0(x,t) v - \sum_{i=1}^{n} f_i(x,t) v_{x_i} \Bigg] \, dx\, dt = 0. \tag{7}$$

Провівши в (7) заміну $u^{k,\varepsilon}(x,t) = w^{k,\varepsilon}(x,t) e^{-\lambda t}$ і вибравши $v(x,t) = w^{k,\varepsilon}(x,t) e^{\lambda t}$, одержимо таку оцінку:

$$\int\limits_{\Omega} |w^{k,\varepsilon}(x,\tau)|^2 \, dx + \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[\left(a_0 - \frac{\delta_1 b_0}{2} - \delta_2 \right) \sum_{i=1}^{n} |w_{x_i}^{k,\varepsilon}|^2 +$$

$$+ \left(c_0 - \frac{1}{2\delta_1} - \lambda - \delta_3 \right) |w^{k,\varepsilon}|^2 + \frac{1}{\varepsilon} B(w^{k,\varepsilon} e^{\lambda t}) w^{k,\varepsilon} e^{\lambda t} \Bigg] \, dx\, dt \leqslant \mu_1 F_\lambda.$$

Тут $F_\lambda = \int\limits_{Q_\tau} \sum\limits_{i=1}^{\infty} f_k^2(x,t) e^{2\lambda t} \, dx\, dt$, δ_1, δ_2, δ_3 – додатні числа, які виберемо так, щоб справджувалися нерівності $a_0 - \dfrac{\delta_1 b_0}{2} - \delta_2 > 0$, $c_0 - \dfrac{1}{2\delta_1} - \lambda - \delta_3 > 0$. Це легко зробити завдяки умові $b_0 < 4a_0 c_0$. Тоді, оскільки $w^{k,\varepsilon}(x,t) = u^{k,\varepsilon}(x,t) e^{\lambda t}$, одержимо, що

$$\int\limits_{\Omega} |u^{k,\varepsilon}(x,\tau)|^2 e^{2\lambda\tau} \, dx \leqslant \mu_2 F_\lambda, \quad \int\limits_{Q_\tau} \left[|u^{k,\varepsilon}(x,\tau)|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^{k,\varepsilon}(x,t)|^2 \right] e^{2\lambda t} \, dx\, dt \leqslant \mu_2 F_\lambda,$$

$$\int\limits_{Q_\tau} B(u^{k,\varepsilon} e^{2\lambda t}) u^{k,\varepsilon} e^{2\lambda t} \, dx\, dt \leqslant \mu_2 \varepsilon F_\lambda, \ \tau \in (-\infty, T], \tag{8}$$

де стала μ_2 не залежить від k і ε. Поряд з тим на підставі умови **(D)** стосовно коефіцієнтів нерівності (1)

$$\int\limits_{Q_\tau} |g(x,t,u^{k,\varepsilon})|^2 e^{2\lambda t}\,dx\,dt \leqslant \mu_4(F_\lambda + 1), \tag{9}$$

де стала μ_4 не залежить від k і ε. Отже, існує підпослідовність послідовності $\{u^{k,\varepsilon}(x,t)\}$ (збережемо для цієї підпослідовності позначення $\{u^{k,\varepsilon}(x,t)\}$) , для якої $e^{\lambda t}u^{k,\varepsilon}(x,t) \to e^{\lambda t}u^{\varepsilon}(x,t)$ $\ast$ – слабко в $L^\infty((-\infty,T];L^2(\Omega))$; $e^{\lambda t}u^{k,\varepsilon}(x,t) \to e^{\lambda t}u^\varepsilon(x,t)$ слабко в $L^2((-\infty,T];V)$; $e^{\lambda t}g(x,t,u^{k,\varepsilon}) \to e^{\lambda t}z(x,t)$ слабко в $L^2(Q_T)$ при $k\to\infty$.

Оскільки оператор $g(x,t,u)$ – монотонний, то $z(x,t) = g(x,t,u^\varepsilon)$. Тоді функція $u^\varepsilon(x,t)$ є розв'язком рівняння

$$u_t + A(t)u + \frac{1}{\varepsilon}B(ue^{2\lambda t}) = f_0(x,t) - \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial f_i(x,t)}{\partial x_i}, \tag{10}$$

і ця функція справджує включення

$$e^{\lambda t}u^\varepsilon \in L^\infty((-\infty,T];L^2(\Omega)) \cap L^2((-\infty,T];V); e^{\lambda t}u_t^\varepsilon \in L^2((-\infty,T];V^*).$$

Крім того функція $u^\varepsilon(x,t)$ справджує оцінки (8), (9).

Нехай $v\in W$, $v \in K$ майже для усіх $t\in(-\infty,T]$. Оскільки $B(ve^{2\lambda t}) = 0$, то з (10) і монотонності оператора B отримаємо, що

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[v_t(v-u^\varepsilon) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,|u^\varepsilon_{x_i}|)u^\varepsilon_{x_i}(v_{x_i} - u^\varepsilon_{x_i}) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u^\varepsilon_{x_i}(v-u^\varepsilon) + \\
&+c(x,t)u^\varepsilon(v-u^\varepsilon) + g(x,t,u^\varepsilon)(v-u^\varepsilon) - f_0(x,t)(v-u^\varepsilon) - \\
&-\sum_{i=1}^{n} f_i(x,t)(v_{x_i} - u^\varepsilon_{x_i})\Bigg]\,dx\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q_{t_1t_2}} \left[B(ve^{2\lambda t}) - B(u^\varepsilon e^{2\lambda t})\right] \times \\
&\times(v-u^\varepsilon)\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega [v(x,t_2) - u^\varepsilon(x,t_2)]^2\,dx - \\
&-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega [v(x,t_1) - u^\varepsilon(x,t_1)]^2\,dx \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_\Omega [v(x,t_2) - u^\varepsilon(x,t_2)]^2\,dx - \\
&-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega [v(x,t_1) - u^\varepsilon(x,t_1)]^2\,dx
\end{aligned} \tag{11}$$

для довільних $t_1,t_2 \in (-\infty,T]$, $t_1<t_2$.

Покажемо, що на $(-\infty,T]$ існує послідовність $\{e^{\lambda t}u^{\varepsilon_m}(x,t)\} \subset \{e^{\lambda t}u^\varepsilon(x,t)\}$ зі значеннями в $L^2(\Omega)$, одностайно неперервна на кожному відрізку $[T_1,T_2]\subset(-\infty,T]$. Справді, за лемою Фату і оцінкою (8_2) для послідовності $\{e^{\lambda t}u^\varepsilon(x,t)\}$ справедлива нерівність

$$\int\limits_{T_1-1}^{T_2} e^{2\lambda t}\liminf ||u^\varepsilon(x,t)||_V^2\,dt \leqslant \liminf \int\limits_{T_1-1}^{T_2} e^{2\lambda t}||u^\varepsilon(x,t)||_V^2\,dt \leqslant \mu_2 F_\lambda.$$

Отже, $e^{2\lambda t}\liminf ||u^\varepsilon(x,t)||_V^2 < \infty$ майже для усіх $t \in [T_1-1, T_2]$. Тоді існує таке $\hat{T} \in [T_1-1, T_2]$, що $e^{2\lambda\hat{T}}\liminf ||u^\varepsilon(x,\hat{T})||_V^2 \leqslant \mu_5$.

Нехай $\hat{T} = T_1$ і $\{u^{\varepsilon_m}(x,t)\}$ – підпослідовність, на якій справджується рівність

$$\liminf ||u^{\varepsilon_m}(x,T_1)||_V^2 = \lim_{m\to\infty} ||u^{\varepsilon_m}(x,T_1)||_V^2$$

. Тоді

$$||u^{\varepsilon_m}(x,T_1)||_V^2 \leqslant \mu_6 \tag{12}$$

для усіх m. Візьмемо в (11) $t_1 = T_1$, $t_2 = T_1+\delta$, $v(x,t) = u^{\varepsilon_m}(x,T_1)$. Тоді

$$\int\limits_\Omega |u^{\varepsilon_m}(x,T_1+\delta) - u^{\varepsilon_m}(x,T_1)|^2\,dx \leqslant 2 \int\limits_{Q_{T_1,T_1+\delta}} \Bigg[\sum_{i=1}^n a_i(x,|u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,t)|)u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,t)[u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,T_1)-$$

$$- u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,t)] + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,t)[u^{\varepsilon_m}(x,T_1) - u^{\varepsilon_m}(x,t)] + c(x,t)u^{\varepsilon_m}(x,t)[u^{\varepsilon_m}(x,T_1)-$$

$$- u^{\varepsilon_m}(x,t)] + g(x,t,u^{\varepsilon_m}(x,t))[u^{\varepsilon_m}(x,T_1) - u^{\varepsilon_m}(x,t)] - f_0(x,t)[u^{\varepsilon_m}(x,T_1)-$$

$$- u^{\varepsilon_m}(x,t)] - \sum_{i=1}^n f_i(x,t)[u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,T_1) - u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,t)]\Bigg]\,dx\,dt \leqslant \mu_7\Bigg[\delta||u^{\varepsilon_m}(x,T_1)||_V^2+$$

$$+ e^{-2\lambda T_1}\int\limits_{Q_{T_1,T_1+\delta}} \Bigg[|u^{\varepsilon_m}|^2 + \sum_{i=1}^n |u^{\varepsilon_m}_{x_i}|^2 + |g(x,t,u^{\varepsilon_m}(x,t))|^2 + \sum_{k=0}^n f_k^2(x,t)\Bigg] e^{2\lambda t}\,dx\,dt\Bigg].$$

З цієї нерівності на підставі (8), (9), (12) отримаємо

$$\int\limits_\Omega |u^{\varepsilon_m}(x,T_1+\delta) - u^{\varepsilon_m}(x,T_1)|^2\,dx \leqslant \mu_8\delta, \tag{13}$$

де стала μ_8 залежить від T_1, але не залежить від m.

Використаємо тепер оцінку (4), в якій візьмемо

$$t_1 = T_1,\ \ t_2 = t,\ \ u_1(x,t) = u^{\varepsilon_m}(x,t),\ \ u_2(x,t) = u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta),$$

$$F_1(x,t) = f_0(x,t) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x,t)}{\partial x_i} - A(t)u^{\varepsilon_m}(x,t),$$

$$F_2(x,t) = f_0(x,t+\delta) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x,t+\delta)}{\partial x_i} - A(t+\delta)u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta).$$

Тоді

$$\int\limits_\Omega |u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta) - u^{\varepsilon_m}(x,t)|^2\,dx \leqslant \int\limits_\Omega |u^{\varepsilon_m}(x,T_1+\delta) - u^{\varepsilon_m}(x,T_1)|^2\,dx+$$

$$+ 2\int\limits_{Q_{T_1,t}} [f_0(x,t) - f_0(x,t+\delta)][u^{\varepsilon_m}(x,t) - u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)]\,dx\,dt+$$

$$+2\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_{T_1,t}}[f_i(x,t)-f_i(x,t+\delta)]\,[u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,t)-u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,t+\delta)]\,dx\,dt-$$

$$-2\int\limits_{T_1}^{t}d\tau\int\limits_{\Omega}[A(\tau+\delta)u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)-A(\tau)u^{\varepsilon_m}(x,\tau)][u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)-u^{\varepsilon_m}(x,\tau)]\,dx.$$

Звідси, використавши нерівність Гельдера, оцінки (8), (9), (13) і врахувавши монотонність оператора A та умови теореми, матимемо, що послідовність $\{e^{\lambda t}u^{\varepsilon_m}(x,t)\}$ одностайно неперервна на довільному відрізку $[T_1,T_2]\in(-\infty,T]$. Оскільки функції $\{e^{\lambda t}u^{\varepsilon_m}(x,t)\}$ справджують умови (8), (9) і оператор g монотонний, то з цієї послідовності можна вибрати таку збіжну підпослідовність (нехай це буде $\{e^{\lambda t}u^{\varepsilon_m}(x,t)\}$), що $e^{\lambda t}u^{\varepsilon_m}(x,t)\to e^{\lambda t}\tilde u(x,t)$ $*$ – слабко в $L^\infty((-\infty,T];L^2(\Omega))$; $e^{\lambda t}u^{\varepsilon_m}(x,t)\to e^{\lambda t}\tilde u(x,t)$ слабко в $L^2((-\infty,T];V)$; $e^{\lambda t}u^{\varepsilon_m}\to e^{\lambda t}\tilde u$ рівномірно в $C([T_1,T_2];L^2(\Omega))$; $e^{\lambda t}g(x,t,u^{\varepsilon_m}(x,t))\to e^{\lambda t}g(x,t,\tilde u(x,t))$ слабко в $L^2(\mathbb{Q}_T)$ при $\varepsilon_m\to 0$. Розглянувши тепер відрізки $[T-1,T]$, $[T-2,T],\dots$ $\dots$, $[T-m,T]$, ..., можна виділити таку діагональну послідовність $\{e^{\lambda t}u^{m,m}(x,t)\}$, що $e^{\lambda t}u^{m,m}(x,t)\to e^{\lambda t}u(x,t)$ $*$ – слабко в $L^\infty((-\infty,T];L^2(\Omega))$; $e^{\lambda t}u^{m,m}(x,t)\to e^{\lambda t}u(x,t)$ слабко в $L^2((-\infty,T];V)$; $e^{\lambda t}u^{m,m}(x,t)\to e^{\lambda t}u(x,t)$ рівномірно в $C([T_1,T_2];L^2(\Omega))$; $e^{\lambda t}g(x,t,u^{m,m}(x,t))\to e^{\lambda t}g(x,t,u(x,t))$ слабко в $L^2(Q_T)$ при $m\to\infty$ для довільного $T_1\in(-\infty,T)$. Поряд з цим функції $\{u^{m,m}(x,t)\}$ справджують нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\Bigg[v_t(v-u^{m,m})+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,|u^{m,m}_{x_i}|)u^{m,m}_{x_i}(v_{x_i}-u^{m,m}_{x_i})+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)u^{m,m}_{x_i}(v-u^{m,m})+c(x,t)u^{m,m}(v-u^{m,m})+g(x,t,u^{m,m})(v-$$
$$-u^{m,m})-f_0(x,t)(v-u^{m,m})-\sum_{i=1}^{n}f_i(x,t)(v_{x_i}-u^{m,m}_{x_i})\Bigg]\,dx\,dt\geqslant$$
$$\geqslant\frac12\int\limits_{\Omega}[v(x,t_2)-u^{m,m}(x,t_2)]^2\,dx-\frac12\int\limits_{\Omega}[v(x,t_1)-u^{m,m}(x,t_1)]^2\,dx$$

для довільних $t_1,t_2\in(-\infty,T]$, $t_1<t_2$; $v\in W$, $v\in K$ майже для усіх $t\in(-\infty,T]$. З нерівності (8_3) випливає, що $B(ue^{2\lambda t})=0$, тому $u\in K$ майже для усіх $t\in(-\infty,T]$. Тоді, аналогічно як в [9], стор. 407, отримуємо, що функція $u(x,t)$ є розв'язком нерівності (1) і $\lim\limits_{t\to-\infty}\int\limits_{\Omega}u^2(x,t)e^{2\lambda t}\,dx=0$.

Аналогічно можна довести теореми існування та єдиності розв'язку варіаційної нерівності

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\Bigg[v_t(v-u)+\sum_{i=1}^{n}a(x,|u_x|^{q-1})|u_x|^{q-2}u_{x_i}(v_{x_i}-u_{x_i})+c(x,t)u(v-u)+$$
$$+g(x,t,u)(v-u)+\lambda(v-u)^2-f(x,t)(v-u)\Bigg]\,e^{2\lambda t}\,dx\,dt\geqslant$$
$$\geqslant\frac12\int\limits_{\Omega}[v(x,t_2)-u(x,t_2)]^2e^{2\lambda t_2}\,dx-\frac12\int\limits_{\Omega}[v(x,t_1)-u(x,t_1)]^2e^{2\lambda t_1}\,dx \qquad (14)$$

стосовно функції $u(x,t) \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}((-\infty,T];L^2(\Omega)) \cap X$, $u \in K_1$ майже для усіх $t \in (-\infty,T]$, де $t_1, t_2 \in (-\infty,T]$, $t_1 < t_2$; $v \in X$, $v \in K_1$ майже для усіх $t \in (-\infty,T]$;

$$X = \{w(x,t) | w \in L^q_{\mathrm{loc}}((-\infty,T];W^{1,q}(\Omega)), w_t \in L^r_{\mathrm{loc}}((-\infty,T];W^{1,r}(\Omega))\},$$

де $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$, K_1 – опукла замкнена множина у $W^{1,q}(\Omega)$, яка містить нульовий елемент; $\lambda \geqslant \lambda_0 \in \mathbb{R}_+$. Сформулюємо лише ці теореми.

Теорема 3. *Нехай для коефіцієнтів a, c, g нерівності (14) справджуються умови* **(A)**, **(C)**, **(D)**. *Тоді нерівність (14) не може мати більше одного розв'язку $u(x,t)$, який справджує умову*

$$\lim_{t \to -\infty} \int_{\Omega} u^2(x,t) e^{2c_0 t}\, dx = 0.$$

Теорема 4. *Нехай виконуються всі умови теореми 3 і поряд з цим функції $t \to c(x,t)$, $t \to f(x,t)$ неперервні на $(-\infty,T]$ майже для усіх $x \in \Omega$; для довільного $\varepsilon_0 > 0$ існує таке $\delta > 0$, що $|g(x,t+\delta,\tau) - g(x,t,\tau)| \leqslant \varepsilon_0 |\tau|^{p-1}$ для довільних $t \in (-\infty,T]$; існує таке додатне число $\lambda_0 \in (0,c_0)$, що $f(x,t)e^{\lambda_0 t} \in L^2(Q_T)$. Тоді існує розв'язок $u(x,t)$ нерівності (14), який справджує умову*

$$\lim_{t \to -\infty} \int_{\Omega} u^2(x,t) e^{2\lambda_0 t}\, dx = 0.$$

1. Олейник О. А., Иосифьян Г. А. *Аналог принципа Сен–Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений*// Успехи математ. наук. – 1976. – Т. 31, N6. – С. 142–166.

2. Олейник О.А. *О поведении решений линейных параболических систем дифференциальных уравнений в неограниченных областях*// Успехи математических наук. – 1975. – Т. 30, вып. 2. – С. 219–220.

3. Олейник О.А., Радкевич Е.В. *Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена–Линделефа для общих параболических систем дифференциальных уравнений* // Функциональный анализ и его приложения. – 1974. – Т. 8, вып. 4. – С. 59–70.

4. Бокало Н.М. *О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений* // Труды семинара им. И.Г.Петровского. – 1989. Вып.14. – С. 3–44.

5. Бокало Н.М. *Об однозначной разрешимости краевых задач для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности*// Сибирский математический журнал. – 1993. – Т. 34, N 4. – С. 33–40.

6. Ивасишен С.Д. *О параболических граничных задачах без начальных условий* // Укр. математ. журнал. – 1982. – Т. 34, N5. – С. 547–552.

7. Ивасишен С.Д. *О корректной разрешимости некоторых параболических граничных задач без начальных условий* // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14, N 2. – С. 361–363.

8. Лавренюк С.П. *Задача без начальных условий для одной эволюционной системы. Условия единственности* // Нелинейные граничные задачи. – 1993. вып. 5. – С. 53–58.

9. Лионс Ж.- Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. – 607 с.

10. Панков А. А. Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наукова думка, 1985. 184 с.

11. Лавренюк С.П. *Параболические вариационные неравенства без начальных условий* // Диференциальные уравнения. – 1996. 32, N10. – С. 1–5.

12. Лавренюк С.П.*Системи параболічних варіаційних нерівності без початкових умов* // Укр. математ. журнал. – 1997. – bf 49, N4. – С. 540–547.

13. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997