УДК 517.956.27

# ПРО ОДНУ ОБЕРНЕНУ УЗАГАЛЬНЕНУ ЕЛІПТИЧНУ ЗАДАЧУ

Г.П. Лопушанська

**Lopushanska H.P. On the inverse generalized elliptic boundary value problem.** By means of an generalized functions Fourier expansion in the orthonormal system or the elliptic operators fundamental functions one approximate method to determination of the equations right-hand side of the generalized elliptic boundary value problem is suggested.

Використовуючи одержане у [3] зображення розв'язків рівняння $Au = F$ у $D'(\mathbb{R}^n)$, можна розв'язувати деякі обернені узагальнені граничні задачі.

Нехай $\Omega$ – область в $\mathbb{R}^n$, обмежена поверхнею $S$ класу $C^\infty$, $\Omega_e = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, $A(x, D)$ – еліптичний диференціальний оператор порядку $2m$ в $\mathbb{R}^n$ з нескінченно диференційовними коефіцієнтами, система граничних диференціальних операторів $\{B_j, T_j\}_{j=1}^m$ на $S$ порядків $m_j, 2m-1-m_j$ відповідно є системою Діріхле порядку $2m$ (коефіцієнти цих операторів вважаємо також нескінченно диференційовними на $S$). Припускаємо існування нормальної фундаментальної функції $\omega(x,y)$ в $\mathbb{R}^n$.

Нехай $D(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega}), D(S) = C^\infty(S)$, $D'(\overline{\Omega}), D'(S)$ – простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) на $D'(\overline{\Omega}), D'(S)$ відповідно. Через $(\varphi, F)$ позначаємо дію узагальненої функції $F \in D'(\overline{\Omega})$ на основну функцію $\varphi \in D(\overline{\Omega})$, а також дію $F \in D'(\mathbb{R}^n)$ на $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, через $< \varphi, F >$ – дію $F \in D'(S)$ на $\varphi \in D(S)$, через $\hat{B}_j, \hat{T}_j$ – такі граничні диференціальні оператори, для яких справджується формула Гріна

$$\int_\Omega (Au \cdot v - u \cdot A^* v)dx = \sum_{j=1}^m \int_S (T_j u \cdot \hat{B}_j v - B_j u \cdot \hat{T}_j v)ds, \; u, v \in \mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega}).$$

Нехай $F_{1j}, F_{2j} (j = \overline{1,m})$ – задані узагальнені функції із $D'(S)$. Розглянемо задачу знаходження пари таких узагальнених функцій $u \in D'(\overline{\Omega})$, $F_0 \in D'(\overline{\Omega})$, що

$$Au(x) = F_0, \quad x \in \Omega, \quad B_j u\,|_S = F_{1j}, \quad T_j u\,|_S = F_{2j}, \quad j = \overline{1,m}. \qquad (1)$$

Задача (1) є прикладом оберненої еліптичної граничної задачі. Задачі про відновлення правої частини рівняння при різних додаткових даних вивчались, наприклад, у [1,6,9]. У [9] показано, що існує безліч мір в $\Omega$, для яких потенціали еліптичних операторів поза $\Omega$ рівні. Ми покажемо, що додаткові умови на межі області дають можливість однозначно визначити значення $Au$ із деякого простору $D'_*(\overline{\Omega})$, а також доведемо збіжність наближень $Au$ та $u$ у вигляді розвинень Фур'є за певною системою лінійних комбінацій фундаментальних функцій оператора $A^*$. Питанню наближення у просторах, типу соболевських,

---

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35R30, 35J99.

гладких розв'язків еліптичних рівнянь та їх граничних значень присвячені праці [7.8,10], а у просторах $D'$ – [4].

Розв'язком задачі (1) назвемо такі $u, F_0 \in D'(\overline{\Omega})$, що $\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \Omega_e \end{cases}$ та $\tilde{F}_0(x)$ задовольняють у $D'(\mathbb{R}^n)$ рівнянню

$$A\tilde{u} = \tilde{F}_0 + \sum_{j=1}^{m} (\hat{T}_j^* F_{1j} - \hat{B}_j^* F_{2j}). \tag{2}$$

У [3] показано, що тоді $F_0, F_{1j}, F_{2j}, j = \overline{1,m}$ задовольняють співвідношенню

$$(\omega(x,y), F_0(y)) + \sum_{j=1}^{m} < \hat{T}_j(y,D)\omega(x,y), F_{1j}(y) > - \tag{3}$$

$$- \sum_{j=1}^{m} < \hat{B}_j(y,D)\omega(x,y), F_{2j}(y) > = 0, \quad x \in \Omega_e.$$

При відомих $F_0, F_{1j}, F_{2j}, j = \overline{1,m}$ функція $\tilde{u}(x)$ визначається формулою

$$\tilde{u}(x) = \omega(x,y) \circledast F, \tag{4}$$

де $F = \tilde{F}_0 + \sum\limits_{j=1}^{m} (\hat{T}_j^* F_{1j} - \hat{B}_j^* F_{2j})$, тобто $(\varphi, \tilde{u}) = ((\varphi(x), \omega(x,y)), F)$.

а $u(x)$ – формулою

$$(\varphi, u) = \left( \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\, \omega(x,y)\, dx,\ F_0 \right) + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\ < \hat{T}_j(y,D)\, \omega(x,y),\ F_{1j} > dx - \tag{5}$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\ < \hat{B}_j(y,D)\, \omega(x,y),\ F_{2j} > dx, \quad \varphi \in D(\overline{\Omega}),$$

однозначно у $D'(\overline{\Omega})$. Покажемо, що із (3) можна однозначно знайти невідому узагальнену функцію $F_0 \in D'_*(\overline{\Omega})$, де $D_*(\overline{\Omega}) = \{\psi \in D(\overline{\Omega}) : A^*\psi(x) = 0, x \in \Omega\}$. Розглянемо оператор $(K\varphi)(x) = \int\limits_{\Omega} \omega(x,y)\varphi(y)dy$ з областю визначення $D(\overline{\Omega})$ для $x \in \Omega_e$. Множину значень оператора $K$ позначеємо через $D(\Omega_e)$, $D(\Omega_e) \subset C^\infty(\Omega_e)$. Тоді

$$K^* D' = (K^* D')(\overline{\Omega}) = \{K^* e : e \in D'(\Omega_e)\}.$$

Зокрема, $\int\limits_{\Omega_e} \varphi(x)\omega(x,y)dx \in K^*D'$ для довільної $\varphi \in D(\Omega_e)$, $\int\limits_{S_1} \varphi(x)\left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i \omega(x,y)dS_1 \in K^*D', i = \overline{0, 2m-1}$ для довільної $\varphi \in D(S_1) = C^\infty(S_1)$, де $S_1$ – довільна замкнена поверхня класу $C^\infty$, розміщена в області $\Omega_e$ на додатній відстані від поверхні $S$. Також $(\omega(x,y), f(x))_0 \in K^*D'$ для довільної $f \in D'(\Omega_e)$.

Якщо $\psi \in D_*(\overline{\Omega})$, то $A^*\psi(x) = f(x)$ у $D'(\mathbb{R}^n)$ при $\operatorname{supp} f \subset \Omega_e$. Тоді, згідно з [3], $\psi(x) = \omega(y,x) \circledast f(y)$ є єдиним розв'язком цього рівняння у класі фінітних узагальнених функцій $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. А для $x \in \overline{\Omega}$ функція $\psi(x) = (\omega(y,x), f(y)) \in D(\overline{\Omega})$ і також належить $\overline{(K^*D')(\overline{\Omega})}$. Отже, $D_*(\overline{\Omega}) \subset \overline{(K^*D')(\overline{\Omega})}$.

Очевидно, що для довільної $f \in D'(\Omega_e)$ при $x \in \overline{\Omega}$

$$A^*(x,D)(\omega(y,x), f(y)) = (A^*(x,D)\omega(y,x), f(y)) = 0.$$

Отже, $D_*(\overline{\Omega}) = \overline{(K^*D')(\overline{\Omega})}$.

**Теорема 1.** *При довільних* $F_{1j}, F_{2j} \in D'(S)(j = \overline{1,m})$ *співвідношення (3) однозначно визначає* $F_0 \in D'_*(\overline{\Omega})$.

*Доведення.* Якщо є дві узагальнені функції $F_0^1, F_0^2 \in D'_*(\overline{\Omega})$, які задовольняють (3), то для $F_0 = F_0^1 - F_0^2$ маємо

$$(\omega(x,y), F_0(y)) = 0,\ x \in \Omega_e. \tag{6}$$

Рівність (6) можна ще записати у вигляді $\Big(\int\limits_{S_1} \varphi(x)\omega(x,y)dS, F_0(y)\Big) = 0, \varphi \in C(S_1), S_1 \subset \Omega_e$, звідки $F_0 = 0$ у $D'_*(\overline{\Omega})$.

Позначаємо далі через $S_1$ деяку замкнену поверхню класу $C^\infty$, розміщену в області $\Omega_e$ на додатній відстані від поверхні $S$, через $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ – злічену, всюди щільну на $S_1$, множину точок, а через $\Omega_1$ – область, обмежену поверхнями $S$ та $S_1$.

**Теорема 2.** *Система функцій*

$$\Big(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\Big)^i \omega(x_k, y), \quad i = \overline{0, m-1},\ k = 1, 2, \dots \tag{7}$$

*є лінійно незалежною і повною у* $D_*(\overline{\Omega}) \subset L_2(\Omega)$.

*Доведення.* Нехай $M$ – довільне натуральне число,

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=1}^{M} C_{ik}\Big(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\Big)^i \omega(x_k, y) = 0,\ y \in \Omega. \tag{8}$$

Функція $v(y) = \sum\limits_{i=0}^{m-1}\sum\limits_{k=1}^{M} C_{ik}\Big(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\Big)^i \omega(x_k, y)$ є розв'язком рівняння $A^*v(y) = 0$ всередині області $\Omega_1$, який, згідно з припущенням (8), дорівнює нулеві в $\Omega$. З існування нормальної фундаментальної функції $\omega(x,y)$ в $\overline{\Omega}_1$ випливає [5] єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння $A^*v(y) = 0$ в $\Omega_1$, а отже $v(y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}_1$. Але з вигляду $v(y)$ маємо $\lim\limits_{y \to x_{k_0}} v(y) = \infty$. Отже, усі $C_{ik_0} = 0$.

Нехай тепер $\lambda(y) \in D_*(\overline{\Omega})$ і

$$\int\limits_{\Omega} \Big(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\Big)^i \omega(x_k, y)\lambda(y)dy = 0, \quad i = \overline{0, m-1},\ k = 1, 2, \dots, \tag{9}$$

$v(y) = \int\limits_{\Omega} \lambda(y)\omega(x,y)dy$. Тоді

$$Av(x) = \begin{cases} \lambda(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \overline{\Omega} \end{cases}, \quad \Big(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\Big)^i v(x_k) = 0, \quad i = \overline{0, m-1},\ k = 1, 2, \dots.$$

Із щільності множини точок $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ на $S_1$ випливає, що $\Big(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\Big)^i v\,|_S = 0$, $i = \overline{0, m-1}$, а із єдиності розв'язку задачі Коші для $A$, що $v(x) \equiv 0$ в $\Omega_1 \setminus \overline{\Omega}$ (а тоді також $B_j v\,|_S = T_j v\,|_S = 0$, $j = \overline{1,m}$).

Отже, $\lambda(x)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$\int\limits_{\Omega} \lambda(y)\omega(x,y)dy = 0, x \in \Omega_1 \setminus \overline{\Omega}.$$

Розглянемо оператор $(K\lambda)(x)$ із $D_*(\overline{\Omega})$ у $D(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega})$. Оскільки $\lambda \in \mathrm{Ker}K$, то $\lambda(y)$ є ортогональною до $\overline{K^*D'} = \{\overline{K^*e}, e \in D'(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega})\}$. Тому при $\lambda \in \overline{K^*D'}$ одержуємо $\lambda(y) = 0, y \in \overline{\Omega}$.

Отже, система (7) є повною у підпросторі $\overline{K^*D'}$ простору $L_2(\Omega)$, а отже у $D_*(\overline{\Omega})$.

Перенумеруємо систему функцій (7): $\left(\frac{\partial}{\partial\nu_x}\right)^i \omega(x_k, y) = \psi_l(y)$, де $l = (k-1)m + i + 1$, $i = \overline{0, m-1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Ортонормуємо систему $\{\psi_l(y)\}_{l=1}^{\infty}$. Одержану систему функцій позначаємо через $\{\psi_{(l)}(y)\}_{l=1}^{\infty}$, $\psi_{(l)}(y) = \sum\limits_{j=1}^{l} a_{lj}\psi_j(y), l = 1, 2, \ldots$.

Співвідношення (3) однозначно визначає коефіцієнти Фур'є $F_{0l}$ узагальненої функції $F_0 \in D'_*(\overline{\Omega}) : F_{0l} = (\psi_{(l)}(y), F_0(y))$.

Справді, рівняння (6) рівносильне системі

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial\nu_x}\right)^i \omega(x, y), F_0\right) = 0, \quad x \in S_1,\ i = \overline{0, m-1}. \tag{10}$$

Очевидно, що з (6) випливає (10). Обереные твердження випливає з єдиності розв'язку задачі Коші для оператора $A$. Якщо $v(x) = (\omega(x, y), F_0(y))$, $x \in \Omega_e$, то $Av(x) \equiv 0, x \in \Omega_e$, $v(x)$ має порядок $\omega(x, 0)$ при $|x| \to 0$, а з (10) випливає $\left(\frac{\partial}{\partial\nu_x}\right)^i v(x)\ |_{x\in S} = 0$, $i = \overline{0, m-1}$. Отже, за єдиністю розв'язку задачі Коші $v(x) \equiv 0$, $x \in \Omega_e$, тобто одержуємо (6).

Покладаючи у (10) $x = x_k$, $k = 0, 1, \ldots$, домножуючи на коефіцієнти ортогоналізації та підсумовуючи одержані рівності, матимемо $F_{0l} = (\psi_{(l)}, F_0(y)) = 0$, $l = 1, 2, \ldots$.

Нехай $\Gamma(x, y, t, \tau)$ – фундаментальна функція оператора $D_t - A$, $\Gamma(x, y, t) = \Gamma(x, y, t, 0)$, $\gamma \in (0, 1)$,

$$\omega_\gamma(x, y, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int\limits_0^\infty t^{\gamma-1} e^{-\lambda t} \Gamma(x, y, t) dt.$$

Визначимо оператор $(\lambda - A)^{-\gamma}\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\gamma(x, y, \lambda)\varphi(y)dy$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

Для $\gamma \in (1, 2)$ маємо $(\lambda - A)^{-\gamma}\varphi = (\lambda - A)^{-(\gamma-1)}(\lambda - A)^{-1}\varphi$. Можна показати, що $\omega_\gamma(x, y, \lambda)$ має такий же вигляд, як і при $\gamma \in (0, 1)$.

**Теорема 3.** *Для довільної узагальненої функції $F \in D'(\overline{\Omega})$ існує ціле невід'ємне число $k$ і така функція $f \in L_2(\Omega)$, що*

$$(\varphi, F) = \int\limits_\Omega (\lambda - A)^{k/2m} \varphi(y) f(y)\, dy, \quad \varphi \in D(\overline{\Omega}), \quad (k = 0 \text{ при } F \in L_2(\Omega)) \tag{11}$$

*Доведення.* На підставі рівності $(\lambda - A)^\gamma \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\gamma(x, y, \lambda)\varphi(y)dy = \varphi(x)$ ($\omega_\gamma$ є фундаментальною функцією оператора $(\lambda - A)^\gamma$), використовуючи оцінки для $\Gamma(x, y, t)$ [2], одержуємо оцінки для похідних $\omega_\gamma(x, y, \lambda)$. Зокрема, при $\gamma = \frac{k}{2m}, 0 < k < 2m$, маємо

$$|D_x^\alpha \omega_{k/2m}(x, y, \lambda)| \leqslant C\Psi_k(|x-y|, \lambda)\lambda^{(n-k+|\alpha|)/2m} \exp^{-c_1\lambda^{1/2m}|x-y|},$$

де

$$c_1 > 0,\ \Psi_k(z, \lambda) = \begin{cases} 1, & n-k+|\alpha| < 0 \\ 1 + \ln|\lambda^{1/2m} z|, & n-k+|\alpha| = 0\,. \\ (\lambda^{1/2m} z)^{-(n-k+|\alpha|)}, & n-k+|\alpha| > 0 \end{cases}$$

Зауважимо, що застосовуючи лему про ітеровані ядра, можна показати, що така ж оцінка правильна для довільного натурального числа $k$.

Нехай $\psi(x) = (\lambda - A)^{\frac{k}{2m}}\varphi(x), \varphi \in D(\overline{\Omega})$. Тоді $\psi \in D(\overline{\Omega})$. Справді, для $k = 2mq$ ($q$–натуральне число) це очевидно, а при $k = 2mq - l, 0 < l < 2m$, $\psi(x) = (\lambda - A)^{-l/2m}(\lambda - A)^q\varphi(x) = \int\limits_\Omega \omega_{l/2m}(x,y,\lambda)(\lambda - A)^q\varphi(y)dy$. Із наведених вище оцінок виводимо, що $\psi(x) \in D(\overline{\Omega})$.

Тепер

$$\varphi(x) = \int\limits_\Omega \omega_{k/2m}(x,y,\lambda)\psi(y)dy, \qquad |D^\alpha\varphi(x)| \leqslant \int\limits_\Omega |D_x^\alpha\omega_{k/2m}(x,y,\lambda)||\psi(y)|dy \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_\Omega |D_x^\alpha\omega_{k/2m}(x,y,\lambda)|^2dy)^{1/2}||\psi(y)||_{L_2(\Omega)} \leqslant C||\psi(y)||_{L_2(\Omega)},$$

якщо $n - k + |\alpha| < \frac{n}{2}$, тобто $k > \frac{n}{2} + |\alpha|$.

Отже, для довільного цілого невід'ємного числа $q$, довільних $\delta > 0, \varphi \in D(\overline{\Omega})$, існує таке натуральне число $k$ і таке $\tau > 0$, що коли $||(\lambda - A)^{k/2m}\varphi(x)||_{L_2(\Omega)} \leqslant \tau$, то $|D^\alpha\varphi(x)| \leqslant \delta$ для всіх $\alpha, |\alpha| \leqslant q$. Ми бачимо, що досить взяти $k > \frac{n}{2} + q$.

Якщо $F \in D'(\overline{\Omega})$, то $F$ – фінітна узагальнена функція, а тому існує таке ціле невід'ємне число $q = q(F)$, що для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta = \delta(\varepsilon, F) > 0$, що коли $\varphi \in D(\overline{\Omega})$ і $|D^\alpha\varphi(x)| \leqslant \delta$ для всіх $\alpha, |\alpha| \leqslant q$, то $|(\varphi, F)| < \varepsilon$. За доведеним вище, знаходимо таке натуральне число $k$ і таке $\tau$, що при $||\psi(y)||_{L_2(\Omega)} = ||(\lambda - A)^{k/2m}\varphi(y)||_{L_2(\Omega)} \leqslant \tau$ маємо $|D^\alpha\varphi(x)| \leqslant \delta$ для всіх $\alpha, |\alpha| \leqslant q$.

Визначаємо узагальнену функцію $T \in D'(\overline{\Omega}) : (\psi, T) = (\varphi, F)$ для довільної $\psi \in D(\overline{\Omega})$, де $\varphi = (\lambda - A)^{-k/2m}\psi$. Маємо $|(\psi, T)| = |(\varphi, F)| < \varepsilon$, якщо $||\psi||_{L_2(\Omega)} < \tau$. Отже, $T$ – лінійний неперервний функціонал на $L_2(\Omega)$ і за теоремою Фішера-Ріса існує така $f \in L_2(\Omega)$, що $(\psi, T) = \int\limits_\Omega \psi f dy$.

**Теорема 4.** *Розвинення Фур'є* $F_0(y) = \sum\limits_{j=1}^\infty F_{0j}\psi_j(y)$ *узагальненої функції* $F_0 \in D'(\overline{\Omega})$ *за повною ортонормованою у* $L_2(\Omega)$ *системою* $\{\psi_j(y)\}_{j=1}^\infty$ *розв'язків із* $D(\overline{\Omega})$ *рівняння* $A^*u(x) = 0, x \in \Omega$, *збіжне у* $L_2(\Omega)$.

*Доведення.* Нехай $\varphi_j = \int\limits_\Omega \varphi\psi_j dx$, $\varphi \in D(\overline{\Omega}) \cup L_2(\Omega)$.

$$F_{0j} = (\psi_j(y), F_0(y)) = \int\limits_\Omega (\lambda - A^*)^{k/2m}\,\psi_j(y)\,f(y)\,dy, f \in L_2(\Omega).$$

Для довільної $\varphi \in D(\overline{\Omega})$ функція $(\lambda - A^*)^{-k/2m}\varphi(y) = \int\limits_\Omega \omega_{l/2m}(z,y,\lambda)\varphi(z)dz \in L_2(\Omega)$, а функція $\tilde{f}(z) = \lambda^q \int\limits_\Omega \omega_{l/2m}(z,y,\lambda)f(y)dy \in C(\overline{\Omega}) \subset L_2(\Omega)$, якщо $n - l < \frac{n}{2}$, тобто $l > \frac{n}{2}$, згідно з оцінками для $\omega_{k/2m}(y,z,\lambda)$.

Нехай $q, l$ – такі цілі невід'ємні числа, що $k = 2mq - l, l > \frac{n}{2}$. Тоді для $\psi \in D_*(\overline{\Omega})$,

$$(\lambda - A^*)^{k/2m}\psi(y) = (\lambda - A^*)^{-l/2m}(\lambda - A^*)^q\psi(y) = \lambda^q(\lambda - A^*)^{-l/2m}\psi(y) \in C(\overline{\Omega}) \subset L_2(\Omega),$$

а

$$F_{0j} = (\psi_j, F_0) = \int_\Omega \Big(\lambda^q \int_\Omega \omega_{l/2m}(z,y,\lambda)\psi_j(z)dz\Big) f(y)dy = \int_\Omega \tilde{f}(z)\psi_j(z)dz = (\psi_j, \tilde{f}).$$

Ми бачимо, що $F_{0j} = \tilde{f}_j$, де $\tilde{f} \in L_2(\Omega)$. Тому розвинення $\sum\limits_{j=1}^{\infty} F_{0j}\psi_j(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \tilde{f}_j\psi_j(x)$ збіжне в $L_2(\Omega)$.

Із теореми випливає збіжність у $L_2(\Omega)$, а отже у $D'_*(\overline{\Omega})$, розвинення $F_0$ за системою $\{\psi_{(l)}(y)\}_{l=1}^{\infty}$ до деякої $\tilde{f}_0 \in L_2(\Omega)$, яка є проекцією $\tilde{f}$ на $D_*(\overline{\Omega})$. При цьому для довільної $\varphi \in D_*(\overline{\Omega})$ маємо

$$\Big|(\varphi, F_0) - \sum_{l=1}^{N} F_{0l}\varphi_l\Big| = \Big|\int_\Omega \varphi(y)\tilde{f}(y)dy - \sum_{l=1}^{N}\int_\Omega \psi_{(l)}(y)\tilde{f}(y)dy\varphi_l\Big| =$$
$$= \Big|\int_\Omega \tilde{f}(y)[\varphi(y) - \sum_{l=1}^{N}\varphi_l\psi_{(l)}(y)]dy\Big| \leqslant ||\tilde{f}(y)||||\varphi(y) - \sum_{l=1}^{N}\varphi_l\psi_{(l)}(y)||,$$

тобто $(\varphi, F_0) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} F_{0l}\varphi_l$.

Використовуючи зображення довільної узагальненої функції із $D'(\overline{\Omega})$, побудуємо продовження $F_0 \in D'(\overline{\Omega})$ функції $\tilde{f}_0 : (\varphi, F_0) = \int\limits_\Omega \tilde{f}_0(y)\lambda^{-p}(\lambda - A^*)^p\varphi(y)dy, \varphi \in D(\overline{\Omega})$, де $p$ – певне ціле невід'ємне число.

Справді, для довільної $F \in D'(\overline{\Omega})$ існує така $f \in L_2(\Omega)$, що

$$(\varphi, F) = \int_\Omega (\lambda - A^*)^{-l/2m}(\lambda - A^*)^p\varphi f dy = \int_\Omega \Big(\int_\Omega \omega_{l/2m}(y,z,\lambda)(\lambda - A^*)^p\varphi(z)\Big) f(y)dy =$$
$$= \int_\Omega \tilde{f}(y)\lambda^{-p}(\lambda - A^*)^p\varphi(y)dy.$$

Взагалі кажучи, таке продовження функції $\tilde{f}_0$ неоднозначне. Якщо ж $F_0 \in D'(\overline{\Omega}) \cap D'_*(\overline{\Omega})$, то $(\varphi, F_0) = \int\limits_\Omega \varphi\tilde{f}_0 dy$ для довільної $\varphi \in D_*(\overline{\Omega})$. При $F_0 \in L_2(\Omega)$ маємо $(\varphi, F_0) = \int\limits_\Omega \varphi F_0 dy$ також для довільної $\varphi \in D(\overline{\Omega})$. Отже, $F_0 = \tilde{f}_0 \in L_2(\Omega) \subset D'(\overline{\Omega})$.

**Теорема 5.** *Нехай $F_{1j}, F_{2j} \in D'(S)$. Тоді існує єдиний розв'язок $(u, F_0) \in (D'(\overline{\Omega}), L_2(\Omega))$ задачі (1) і функція $u(x)$ визначається формулою (5),*

$$F_0(x) = \sum_{l=1}^{\infty} F_{0l}\psi_{(l)}(x),\ x \in \Omega, \tag{12}$$

*де*

$$F_{0l} = \sum_{j=1}^{m} [\, < \hat{B}_j(y,D)\psi_{(l)}(y), F_{2j} > - < \hat{T}_j(y,D)\psi_{(l)}(y), F_{1j} > ], l = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

*Якщо $n < 4m$, то послідовність*

$$u^N(x) = \sum_{l=1}^{N} F_{0l} \int\limits_{\Omega} \omega(x,y)\psi_{(l)}(y)dy + \tag{14}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \left[ - < \hat{B}_j(y,D)\omega(x,y), F_{2j} > + < \hat{T}_j(y,D)\omega(x,y), F_{1j} > \right]$$

*збігається у кожній точці $x$ області $\Omega$ до функції $u(x)$.*

*Доведення.* Нехай $(u^1, F_0^1), (u^2, F_0^2)$ – два розв'язки задачі, $u = u^1 - u^2, F_0 = F_0^1 - F_0^2$. Тоді $\tilde{u}, \tilde{F}_0$ задовольняють у $\mathbb{R}^n$ рівнянню $A\tilde{u} = \tilde{F}_0$ та співвідношенню (6). За теоремою 1 $\tilde{F}_0 = 0$ у $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, а тоді за теоремою 1 [3] $\tilde{u} = 0$ у $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, а отже $u = 0$ у $D'(\overline{\Omega})$, $u(x) = 0$ в області $\Omega$.

Замінюючи у (3) $x$ введеною вище системою точок $\{x_k\}, k = 1, 2, \ldots,$ домножуючи одержані тотожності на відповідні коефіцієнти ортогоналізації, знаходимо коефіцієнти Фур'є $F_{0l}$ невідомої узагальненої функції $F_0$ у вигляді (13). З теореми 4 випливає збіжність у $L_2(\Omega)$ розвинення (12). За теоремою 1 [3] при відомих $F_0 \in D'(\overline{\Omega}), F_{1j}, F_{2j}, j = \overline{1,m}$ узагальнена функція $u$ визначається формулою (5). Оскільки $F_0 \in L_2(\Omega)$, то при $n < 4m$ функція $\int\limits_{\Omega} \omega(x,y)F_0(y)dy \in C(\Omega)$ і $\Big(\int\limits_{\Omega} \varphi(x)\omega(x,y)dx, F_0(y)\Big) = (\varphi(x), \int\limits_{\Omega} \omega(x,y)F_0(y)dy) = \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\Big(\int\limits_{\Omega} \omega(x,y)F_0(y)dy\Big)dx$. Крім того,

$$\sum_{l=1}^{N} F_{0l} \int\limits_{\Omega} \omega(x,y)\psi_{(l)}(y)dy \leqslant \sum_{l=1}^{N} F_{0l}^2 \sum_{l=1}^{N} \Big(\int\limits_{\Omega} \omega(x,y)\psi_{(l)}(y)dy\Big)^2 < \infty,$$

оскільки $\omega(x,y) \in L_2(\Omega)$ для кожної точки $x \in \overline{\Omega}$ при $n < 4m$. А тоді $\int\limits_{\Omega} \omega(x,y)F_0(y)dy = \sum_{l=1}^{N} F_{0l} \int\limits_{\Omega} \omega(x,y)\psi_{(l)}(y)dy$.


1. Атоходжаев М.А. *К теории $2m$-потенциалов* // Краевые задачи дифференциальных уравнений. – 1971. – Т. 1. – С. 3–11.

2. Ивасишен С.Д. Матрицы Грина параболических граничных задач.-Киев:Выща школа, 1990. – 200 с.

3. Лопушанська Г.П. *Про один підхід до вивчення крайових задач у просторах розподілів і граничні інтегральні рівняння* // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43, N5. – С. 632–639.

4. Лопушанська Г.П. *Про один наближений метод розв'язування узагальненої задачі Діріхле* // Укр. мат. журн. – 1994. – Т. 46, N10. – С. 1417–1420.

5. Мех И.Я. *О фундаментальных решениях эллиптических операторов* // Докл. АН УССР. – 1991. – N5. – С. 14–18.

6. Прилепко А.И. *Обратные задачи теории потенциала* // Мат. заметки. – 1973. – Т.14, в.5. – С. 755–765.

7. Ройтберг Я.А.,Шефтель З.Г. *О плотности решений граничных задач с локализованными правыми частями в функциональных просторанствах на многообразиях* // Докл. АН СССР. – 1989. – Т. 305, N6. – С. 1317–1320.

8. Ройтберг И.Я.,Ройтберг Я.А.*Об аппроксимации решений эллиптических граничных задач линейными комбинациями фундаментальбных решений*// Докл. АН Украины. – 1992. – N12. – С. 15–20.

9. Шульце Б.В.*О потенциалах для эллиптических уравнений высшего порядка и обратных задачах*// Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, N1. – С. 148–158.

10. Hamann V.,Wildenhain G.*Approximation by solutions of general boundary value problems for ellipticequations of arbitrary order*// Partial diff. equations, Banach center publications. – 1987. – Vol. 19. – P. 113–119.

11. Алексидзе М.А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач.-М.:Наука, 1991. – 351 с.

12. Бакушинский А.Б.*Замечания о методе Купрадзе-Алексидзе*// Дифференц. уравнения. – 1970. – Т. 6, N7. – С. 1298–1301.

*Стаття надійшла до редколегії 03.04.1997*