УДК 539.3

КОМПЛЕКСНІ ПОТЕНЦІАЛИ ПЕРІОДИЧНОЇ ЗАДАЧІ КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН

В.К. Опанасович

Opanasovych V.K. Complex potentials of colinear cracks periodic problem. An expression for Kolosov-Muskhelishvili complex potentials for the first and the second mathematical elasticity main problems for a plane with periodic system of colinear cracks is obtained by using of limit transition from the solution of elasticity plane problem for a body with a system of cracks. Expressions for stress intencity factors are presented. It is shown that the main stresses in opposite located points at infinity can take various values. The known results are obtained in special cases of the problem.

Формулювання . Дослідимо задачу про пружну рівновагу ізотропноі пластинки, яка послаблена періодичною системою колінеарних тріщин, центри яких перебувають на осі Ox і мають координати dk $(k \in Z)$. Довжини тріщин дорівнюють $2l$. Пластинка перебуває під дією зовнішніх зусиль N_1 і N_2 на нескінченності, які діють у двох взаємно перпендикулярних напрямках, причому напруження N_1 утворює кут α з віссю Ox. Будемо вважати, що до берегів тріщини прикладені зовнішні зусилля або ж відомі переміщення точок цих берегів. Комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі для сформульованих задач отримаємо шляхом граничного переходу в розв'язках, наведених у монографії [1] для системи колінеарних тріщин, і будемо дотримуватись тих же позначень.

Перша основна задача. Нехай на дійсній осі є $n = 2m + 1$ $(m \in N)$ тріщин, береги яких завантажені заданими зусиллями. Тоді згідно з [1] комплексні потенціали $\Phi(z), \Omega(z)$ мають вигляд

$$\Phi(z) = \frac{X^{-1}(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{X(t)P(t)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{q(t)}{t-z}\,dt + \frac{P_n(z)}{X(z)} - \frac{1}{2}\bar{\Gamma}',$$

$$\Omega(z) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{q(t)}{t-z}\,dt + \bar{\Gamma}', \tag{1}$$

де

$$X(z) = \prod_{k=-m}^{m} (z-a_k)^{1/2}(z-b_k)^{1/2}, \qquad a_k = -l + dk, \qquad b_k = l + dk,$$

$$L = \cup_{k=-m}^{m}[a_k, b_k], \qquad \Gamma = \frac{1}{4}(N_1+N_2) + iC, \qquad \Gamma' = -\frac{1}{2}(N_1-N_2)e^{-2i\alpha},$$

$$P(t) = \frac{1}{2}(Y_y^+ + Y_y^-) - \frac{i}{2}(X_y^+ + X_y^-), \; q(t) = \frac{1}{2}(Y_y^+ - Y_y^-) - \frac{i}{2}(X_y^+ - X_y^-);$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 73B50.

тут знаками "+" і "-" позначено граничне значення функцій при $y \to \pm 0$; Y_y, X_y – компоненти зусиль, прикладених до берегів тріщини; $P_n(z)$ – невідомий многочлен степені n; C – невідома стала, яку у випадку першої основної задачі приймемо рівною нулю; $z = x + iy$ – комплексна змінна; $i = \sqrt{-1}$.

У формулах (1) зробимо граничний перехід, коли $m \to \infty$, враховуючи при цьому залежності [2]

$$\frac{1}{\pi z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{z}{\pi(z-k)k} = \operatorname{ctg} \pi z, \qquad \sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right),$$

і періодичність задачі. Тому

$$\lim_{m\to\infty} \int_L \frac{q(t)}{t-z}\, dt = \int_{-l}^{l} \left[\frac{1}{v-z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{v-dk-z} + \frac{1}{dk}\right)\right] q(v)\, dv =$$

$$= \frac{\pi}{d} \int_{-l}^{l} \operatorname{ctg} \frac{\pi(v-z)}{d} q(v)\, dv, \quad \lim_{m\to\infty} \frac{X(t)}{X(z)} = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=-m}^{m} \sqrt{\frac{(t+l-dk)(t-l-dk)}{(z+l-dk)(z-l-dk)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{t^2-a^2}{z^2-a^2}} \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \sqrt{\frac{\left(1-\left(\frac{t+a}{dk}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{t-a}{dk}\right)^2\right)}{\left(1-\left(\frac{z+a}{dk}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{z-a}{dk}\right)^2\right)}} = \sqrt{\frac{\sin\frac{\pi(t+a)}{d}\sin\frac{\pi(t-a)}{d}}{\sin\frac{\pi(z+a)}{d}\sin\frac{\pi(z-a)}{d}}},$$

де

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + a_{-k}).$$

Введемо позначення

$$Y(z) = \sqrt{\sin\frac{\pi(z+a)}{d}\sin\frac{\pi(z-a)}{d}}.$$

Врахуємо, що $Y(v+dk) = (-1)^k Y(v)$, $v \in [-l, l]$, а також залежність [2]

$$\operatorname{cosec} \pi z = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^2-k^2},$$

внаслідок чого

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{X(z)} \int_L \frac{X(t)P(t)}{t-z}\, dt = \frac{\pi Y^{-1}(z)}{d} \int_{-l}^{l} Y(v)P(v) \operatorname{cosec} \frac{\pi(v-z)}{d}\, dv.$$

На підставі періодичності задачі вираз $P_n(z)/X(z)$ при $n \to \infty$ повинен мати вигляд [3]

$$\lim_{m\to\infty} \frac{P_n(z)}{X(z)} = \frac{A \sin\frac{\pi z}{d} + B\cos\frac{\pi z}{d}}{Y(z)} = Q(z),$$

де A і B – невідомі сталі.

Після цих перетворень комплексні потенціали (1) для періодичної задачі набудуть вигляду

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}' + Q(z) + \frac{1}{2idY(z)}\int\limits_{-l}^{l}\frac{Y(v)P(v)}{\sin\frac{\pi(v-z)}{d}}\,dv + \frac{1}{2id}\int\limits_{-l}^{l} q(v)\mathrm{ctg}\,\frac{\pi(v-z)}{d}\,dv,$$

$$\Omega(z) = \bar{\Gamma}' + \Phi(z) - \frac{1}{id}\int\limits_{-l}^{l} q(t)\mathrm{ctg}\,\frac{\pi(t-z)}{d}\,dt. \qquad (3)$$

Сталу B знайдемо з умови однозначності переміщень [1]

$$\int\limits_{-l}^{l}\left[\kappa\left(\Phi^+(t) - \Phi^-(t)\right) + \Omega^+(t) - \Omega^-(t)\right]\,dt = 0,$$

звідки, беручи до уваги (3), отримаємо

$$B = \frac{\kappa - 1}{2id(\kappa+1)}\int\limits_{-l}^{l} q(x)\,dx. \qquad (4)$$

Сталу A знайдемо, врахувавши для тіла умови на нескінченності.

На підставі [4, 5] коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) знайдемо за формулами

$$K_1^{\pm} - iK_2^{\pm} = \lim_{x\to\pm a\pm 0}\sqrt{2|x\mp a|}(\Phi(x) + \Omega(x)).$$

Якщо взяти до уваги залежності (3), то попереднє співвідношення набуде вигляду

$$K_1^{\pm} - iK_2^{\pm} = 2A\sqrt{\frac{d}{\pi}\mathrm{tg}\,\frac{\pi l}{d}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi d}{2}\sin\frac{2\pi l}{d}}}\left\{\pm\frac{2d^2}{\pi}B\cos\frac{\pi l}{d} + \int\limits_{-l}^{l}\sqrt{\frac{\sin\frac{\pi(l\pm v)}{d}}{\sin\frac{\pi(l\mp v)}{d}}}P(v)\,dv\right\}. \qquad (5)$$

Розглянемо часткові випадки.

а) Береги тріщин вільні від зовнішнього навантаження, а тому $q(v) = p(v) = 0$, $B = 0$, $A = \Gamma + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}'$ і комплексні потенціали (3) можна подати у вигляді

$$\tilde{\Phi}(z) = -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}' + \frac{A\sin\frac{\pi z}{d}}{Y(z)}, \qquad \tilde{\Omega}(z) = \bar{\Gamma}' + \tilde{\Phi}(z). \qquad (6)$$

Зауважимо, що в цьому випадку вирази для комплексних потенціалів (6) і КІН (5) збігаються з відповідними залежностями з праці [3] і монографій [4, 5].

б) Зусилля $N_1 = N_2 = 0$. Покладемо $A = 0$. Комплексні потенціали (3) набудуть вигляду

$$\Phi(z) = \frac{1}{Y(z)}\left[B\cos\frac{\pi z}{d} + \frac{1}{2id}\int_{-l}^{l}\frac{Y(v)P(v)}{\sin\frac{\pi(v-z)}{d}}\,dv\right] + \frac{1}{2id}\int_{-l}^{l}q(v)\operatorname{ctg}\frac{\pi(v-z)}{d}\,dv,$$

$$\Omega(z) = \Phi(z) - \frac{1}{id}\int_{-l}^{l}q(t)\operatorname{ctg}\,\frac{\pi(t-z)}{d}\,dt. \tag{7}$$

КІН (5) у цьому випадку збігаються з відповідними КІН з монографії [5].

Якщо врахувати, що

$$\lim_{y\to\pm\infty}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{d}(v-iy) = \pm i, \tag{8}$$

то на підставі (7) будемо мати

$$\lim_{y\to\pm\infty}\Phi(iy) = \pm\frac{1}{d(\kappa+1)}\int_{-l}^{l}q(v)\,dv, \quad \lim_{y\to\pm\infty}\Omega(iy) = \mp\frac{\kappa}{d(\kappa+1)}\int_{-l}^{l}q(v)\,dv. \tag{9}$$

Згідно з [1] компоненти тензора напружень Y_y і X_y можемо знайти за формулами

$$Y_y - iX_y = \Phi(z) + \Omega(\bar z) + (z-\bar z)\overline{\Phi'(z)}. \tag{10}$$

Тому, приймаючи до уваги (9), матимемо

$$Y_y^{\pm\infty} = \lim_{y\to\pm\infty}Y_y = \pm\frac{1}{2d}\int_{-l}^{l}(Y_y^+ - Y_y^-)\,dx, \quad X_y^{\pm\infty} = \lim_{y\to\pm\infty}X_y = \pm\frac{1}{2d}\int_{-l}^{l}(X_y^+ - X_y^-)\,dx. \tag{11}$$

Як видно з (11), напруження на нескінченності є сталими і мають протилежні знаки при $y \to \pm\infty$, що узгоджується з умовами рівноваги тіла. Крім того, на підставі формул (11) бачимо, як можна практично реалізувати задачу для випадку, коли до берегів тріщини прикладено не самозрівноважене навантаження.

Нехай до берегів тріщини прикладено самозрівноважене навантаження

$$Y_y^+ - iX_y^+ = Y_y^- - iX_y^- = \mathrm{const} = -(2\Gamma + \bar\Gamma'),$$

де вирази для Γ і Γ' даються формулами (2). У цьому випадку $q(x) = 0$, $P(x) = -(2\Gamma + \bar\Gamma')$, $B = 0$, і комплексні потенціали (7) набудуть вигляду

$$\Phi(z) = \Omega(z) = -\frac{(2\Gamma + \bar\Gamma')}{2idY(z)}\int_{-l}^{l}\frac{Y(v)}{\sin\frac{\pi(v-z)}{d}}\,dv.$$

Але даний напружений стан можемо подати як суперпозицію двох напружених станів, що обумовлені потенціалами (6) і $\Phi(z) = -\Gamma$, $\quad \Omega(z) = -\Gamma - \bar{\Gamma}'$. Тому справджується рівність

$$-\frac{2\Gamma + \bar{\Gamma}'}{2idY(z)} \int\limits_{-l}^{l} \frac{Y(v)}{\sin\frac{\pi(v-z)}{d}}\, dv = -\Gamma + \tilde{\Phi}(z) = -(\Gamma + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}') + \frac{(\Gamma + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}')\sin\frac{\pi z}{d}}{Y(z)},$$

звідки отримуємо

$$\frac{1}{id} \int\limits_{-l}^{l} \frac{Y(v)}{\sin\frac{\pi(v-z)}{d}}\, dv = \sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{d} - \sin^2\frac{\pi l}{d}} - \sin\frac{\pi z}{d},$$

що є узагальненням відповідної формули для однієї тріщини на випадок періодичної системи цих дефектів.

в) Зусилля $N_1 = N_2 = 0$. Крім того, будемо вважати, що

$$\lim_{y\to+\infty}(Y_y - iX_y) = Q \tag{12}$$

де Q - відома комплексна стала. Комплексний потенціал $\Phi(z)$ у цьому випадку матиме вигляд

$$\Phi(z) = Q(z) + \frac{1}{2idY(z)} \int\limits_{-l}^{l} \frac{Y(v)P(v)}{\sin\frac{\pi(v-z)}{d}}\, dv + \frac{1}{2id} \int\limits_{-l}^{l} \frac{q(v)\operatorname{ctg}\pi(v-z)}{d}\, dv, \tag{13}$$

а вираз для $\Omega(z)$ залишається без змін і дається формулою (7).

Беручи до уваги (7), (10), (13), на підставі (12) отримаємо таке значення невідомої сталої A

$$A = \frac{1}{2}Q - \frac{1}{d}\int\limits_{-l}^{l} q(v)\, dv. \tag{14}$$

Вираз для сталої B дається формулою (4).

Враховуючи (13), (14), (4) і виходячи з (10), знайдемо

$$\lim_{y\to-\infty}(Y_y - iX_y) = Q - \frac{2}{d}\int\limits_{-l}^{l} q(v)\, dv.$$

Якщо величину Q покласти рівною нулю, тобто одна безмежна границя вільна від зовнішнього навантаження, то протилежною границею сприймається все навантаження, яке прикладене до тіла.

Друга основна задача. Для випадку системи n тріщин, що перебувають на дійсній осі, комплексні потенціали другої основної задачі, згідно з [1], мають вигляд

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\kappa}\left[\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L} \frac{g(t)}{t-z}\, dt + \frac{1}{\pi i X(z)}\int\limits_{L} \frac{X(t)f(t)}{t-z}\, dt + +\kappa\Gamma + \overline{\Gamma} + \overline{\Gamma}'\right] + \frac{P_n(z)}{\kappa X(z)}, \tag{15}$$

$$\Omega(z) = -\kappa\Phi(z) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{L} \frac{X(t)f(t)}{t-z}\, dt + \kappa\Gamma + \overline{\Gamma} + \overline{\Gamma}',$$

де

$$f(t) = \mu\left[u^{+'} + u^{-'} + i(v^{+'} + v^{-'})\right], \quad g(t) = \mu\left[u^{+'} - u^{-'} + i(v^{+'} - v^{-'})\right],$$

u і v – компоненти вектора перміщення; μ – модуль зсуву; $\kappa = 3 - 4\nu$ у випадку плоскої деформації і $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ у випадку плоского напруженого стану; ν – коефіцієнт Пуассона. Тут і надалі будемо дотримуватись позначень попереднього пункту.

Якщо проробити викладки, подібні як і в першій основній задачі, то на підставі (15) для періодичної задачі отримаємо

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\kappa}\left[\kappa\Gamma + \overline{\Gamma} + \overline{\Gamma}' + \frac{1}{id}\int\limits_{-l}^{l} g(t)\operatorname{ctg}\frac{\pi(t-z)}{d}\,dt + + \frac{1}{idY(z)}\int\limits_{-l}^{l}\frac{Y(t)f(t)}{\sin\frac{\pi(t-z)}{d}}\,dt\right] + \frac{Q(z)}{\kappa},$$

$$\Omega(z) = \kappa\Phi(z) - 2Q(z) - \frac{\pi}{idY(z)}\int\limits_{-l}^{l}\frac{Y(t)f(t)dt}{\sin\frac{\pi(t-z)}{d}}. \tag{16}$$

Сталу C, що входить у вираз для Γ (2), знайдемо із залежності

$$M = -\operatorname{Re}\int\limits_{-l}^{l} x\left\{(\kappa+1)\left[\Phi^+(x) - \Phi^-(x)\right] - 2g(x)\right\}\,dx,$$

яка для випадку жорсткого включення набуде вигляду

$$M = \frac{2(1+\kappa)d^2}{\pi\kappa}\left[(\kappa+1)C + \frac{1}{2}(N_1 - N_2)\sin 2\alpha\right]\ln\left(\cos\frac{\pi l}{d}\right). \tag{17}$$

Тут M – момент сил, прикладених до берегів тріщини відносно її центру.

Вважаємо, що відомий головний вектор сил, прикладених до берегів тріщини. Тоді його проекції X і Y на осі Ox і Oy визначимо за формулою

$$\int\limits_{-l}^{l}\left[\Phi^+(x) - \Phi^-(x) + \Omega^+(x) - \Omega^-(x)\right]\,dx = Y - iX,$$

використовуючи яку і формулу (16), отримаємо такий вираз для сталої B

$$B = \frac{i\kappa(Y - iX)}{2d(1+\kappa)}. \tag{18}$$

Як і в попередньому пункті сталу A знайдемо, скориставшись умовами на нескінченності.

Розподіл напружень поблизу вершини тріщини у випадку другої основної задачі наведений у монографії [6], а КІН знайдемо за формулою

$$K_1^{\pm} - iK_2^{\pm} = \lim_{x\to\pm a\pm 0}\left[\frac{2\kappa}{(\kappa-1)}\sqrt{2\pi|x\mp a|}(\Phi(x) + \Omega(x))\right],$$

яку, після перетворень можемо записати так

$$K_1^{\pm}-iK_2^{\pm}=2\sqrt{\pi}\left\{A\sqrt{\frac{d}{\pi}\mathrm{tg}\frac{\pi l}{d}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi d\sin\frac{2\pi l}{d}}}\left\{\pm\frac{2d^2}{\pi}B\cos\frac{\pi l}{d}+\int\limits_{-l}^{l}\sqrt{\frac{\sin\frac{\pi(l\pm v)}{d}}{\sin\frac{\pi(l\mp v)}{d}}}f(v)dv\right\}\right\}. \tag{19}$$

Як частковий випадок, з (19) можна отримати вирази для КІН, які наведені в монографії [6].

Розглянемо часкові випадки абсолютно жорсткого включення, для якого $u^+ = u^- = v^+ = v^- = 0$, а тому $f(t) = g(t) = 0$.

1) Головний вектор сил, прикладених до включення, і момент M дорівнюють нулю. У цьому випадку $A = 0.5(\kappa\Gamma - \overline{\Gamma}' - \overline{\Gamma})$, $B = 0$, а стала C (17) набуде вигляду

$$C=-\frac{\sin 2\alpha}{2(1+\kappa)}(N_1-N_2).$$

2) Зусилля $N_1 = N_2 = 0$. а) Покладемо $A = 0$. Комплексні потенціали можемо подати так

$$\Phi(z)=\frac{1(\kappa-1)}{2\kappa}C+\frac{B\cos\frac{\pi z}{d}}{\kappa Y(z)},\quad \Omega(z)=\kappa\Phi(z)-\frac{2B\cos\frac{\pi z}{d}}{Y(z)}.$$

На підставі (17) стала C набуде вигляду

$$C=\frac{M\pi\kappa}{2(1+\kappa)^2d^2\ln\left(\cos\frac{\pi l}{d}\right)}. \tag{20}$$

Сталу B знайдемо, користуючись формулою (18).

Для даного випадку напруження на нескінченності будуть відмінні від нуля, причому при $y \to \pm\infty$ будуть мати різні знаки, тобто маємо ту ж саму ситуацію як і в випадку першої основної задачі.

а) Нехай $A \neq 0$. Комплексні потенціали (17) матимуть вигляд

$$\Phi(z)=\frac{i(\kappa-1)C}{2\kappa}+\frac{Q(z)}{\kappa},\quad \Omega(z)=\kappa\Phi(z)-2Q(z).$$

Якщо задовольнити умову (12), то для сталої A можна записати такий вираз

$$A=\frac{\kappa}{1-\kappa}Q+i(1+\kappa)\left(\frac{1}{2}C+\frac{B}{\kappa-1}\right).$$

Сталі C і B знайдемо відповідно за формулами (20) і (18). Напруження на нескінченності в цьому випадку також відмінні від нуля. Вирази для КІН для розглянутих випадків отримаємо на підставі формули (19).

Висновки.

1. На відміну від задачі для тіла зі скінченною системою неоднорідностей при формулюванні періодичних задач з тими ж дефектами слід наголосити, що головні напруження на нескінченності можуть мати різні значення в протилежних нескінченно віддалених точках тіла.

2. Наведені в праці вирази для кусково-голоморфних функцій є розв'язками відповідних періодичних задач лінійного спряження, розв'язки яких будуються іншими підходами, ніж в публікаціях [7, 8].

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости – М., Наука, 1966. – 707 с.
2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов, и произведений – М., Наука, 1971. – 1100 с.
3. Баренблатт Р.И., Черепанов Г.П. *О влиянии границ тела на развитие трещин хрупкого разрушения* // Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение. 1960. – N 3. – С.79-88.
4. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами – Киев, Наук. думка, 1981. – 324 с.
5. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках – Киев, Наук. думка, 1976. – 444 с.
6. Стащук Н.Г. Задачи механики упругих тел с трещино-подобными дефектами – Киев, Наук. думка, 1993. – 358 с.
7. Чибрикова Л.И. *О краевой задаче Римана для автоморфных функций* // Уч. зап. Казанского ун-та. – 1956. – 116, кн. 4. – С.59-110.
8. Кузнецов Е.А. *Периодическая контактная задача с учетом пригрузки, действующей вне штампа* // Изв. АН СССР, МТТ. 1982. – N 1. – С.84-93.

Стаття надійшла до редколегії 29.06.96