ISSN 0201 - 758X
ISSN 0320 - 6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 49

1998

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
VISNYK LVIVSKOHO UNIVERSYTETU
(HERALD OF LVIV UNIVERSITY)

Серія механіко-математична

Mathematics and Mechanics
Виходить з 1965 року

Issued from 1965

Випуск 49

Volume 49

ЛЬВІВ – 1998

Вісник містить статті з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

The issue contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

For scientists, post graduates and students.

Адреса редколегії:

290602, Львів, вул. Університетська, 1, Львівський державний університет,
механіко-математичний факультет, кафедра диференціальних рівнянь
Тел. (0322) 79-45-93
E-mail: diffeq@franko.lviv.ua

Chair of Differential Equations, Departament of Mechanics and Mathematics,
Lviv State University, Universytetska 1, Lviv, 290602

Комп'ютерний набір (видав. пакет $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX). Підписано до друку з оригінал-макета 12.05.98.
Зам. №98/4-30. Тир. 100. Папір друк. офсетний №1. Формат 84×108/16. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. 15,46. Друк ТзОВ "Простір М", м. Львів.

ЗМІСТ

CONTENTS

УДК 315.6

ПРО ПРИВЕДЕНУ ГРУПУ УАЙТХЕДА ДЛЯ ТІЛ НАД ПСЕВДОЛОКАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ

Л.Л. Стахів

Stakhiv L.L. On the reduced Whithehead group for skew fields over pseudolocal fields. Let D be a finite dimensional skew field over a complete with respect to a discrete valuation field with a pseudofinite residue field. It is proved that the reduced Whithehead group $SK_1(D)$ is trivial.

Псевдолокальним полем ми називаємо повне стосовно дискретного нормування поле з псевдоскінченним [1] полем класів лишків.

Нехай K — псевдолокальне поле, k — поле класів лишків поля K, v — нормування поля K. Через O_K, P_K, U_K позначимо, відповідно, кільце цілих, ідеал нормування та групу одиниць поля K. Для скінченного розширення L/K поля K відповідні об'єкти поля L позначимо O_L, P_L, U_L. Якщо L/K — розширення Галуа, то $\mathrm{Gal}(L/K)$ означає його групу Галуа, l — поле класів лишків поля L. Через π (відповідно Π) позначаємо уніформізуючий елемент поля K (відповідно L). Для $a \in O_K$ (відповідно $a \in O_L$) через $\bar{a}$ позначимо $a(\mathrm{mod} P_K)$ (відповідно $a(\mathrm{mod} P_L)$).

Якщо $a \in L$, то $N_{L/K}(x)$ і $Tr_{L/K}(a)$ означають його норму і слід. Нехай D — скінченновимірне тіло над K . Якщо P — його максимальне підполе, то існує ізоморфізм

$$\varphi: D \otimes_K P \cong M_n(P).$$

Відображення $Nrd_{D/K}(x) = \det \varphi(x \otimes 1)$ називають редукованою нормою

$$D^{(1)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} SL_1(D) = \{x \in D^* \mid Nrd_{D/K}(x) = 1\}.$$

Нехай w — продовження нормування v до нормування тіла D. Тоді

$$O_D = \{x \in D \mid w(x) \geqslant 0\} \text{ — кільце цілих тіла } D,$$
$$B_D = \{x \in D \mid w(x) > 0\} \text{ — ідеал нормування } w.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 12E15, 20F36.

В.П. Платонов і В.І. Янчевський у праці [1] довели, що $D^{(1)} = [D^*, D^*]$ для скінченновимірних тіл D над повними дискретно нормованими полями з досконалими полями класів лишків когомологічної розмірності 1.

Мета цієї праці — одержати більш простий варіант доведення аналогічного результату для скінченновимірних тіл над псевдолокальними полями, використовуючи фільтрацію групи одиниць у підполях тіла D.

Теорема. *Якщо D — скінченновимірне тіло над псевдолокальним полем K, то*

$$SK_1(D) = SL_1(D)/[D^*, D^*] = 0.$$

Сформулюємо необхідні для доведення цієї теореми факти у вигляді декількох лем.

Лема 1. *Нехай D — скінченновимірне тіло над загальним локальним полем K [3]. Тоді:*
1) Існує максимальне нерозгалужене підполе L в D;
2) Індекс тіла D дорівнює його експоненті.

Доведення. 1) Відомо, що максимальні нерозгалужені підполя існують навіть у тілах над повними дискретними полями з досконалими полями класів лишків [3]. У випадку, коли поле лишків k — квазіскінченне, цей факт можна довести так. Оскільки група Бауера поля k дорівнює нулю [3], то тіло лишків $l = O_D/B_D$ є полем, $l = k(a)$ для деякого $a \in l$. Поле $L = K(b)$, де $b \in D$, $\bar{b} = a$, є максимальним нерозгалуженим підполем тіла D.

2) Припустимо, що індекс тіла D дорівнює n. Тоді $[L : K] = n$, де L максимальне нерозгалужене підполе тіла D. Нехай σ — твірна групи $\mathrm{Gal}(l/k) \cong \mathrm{Gal}(L/K)$. За теоремою Сколема-Нетер автоморфізм σ продовжується до внутрішнього автоморфізму тіла D, тобто існує $g \in D$ такий, що $\sigma(x) = gxg^{-1}$ для будь-якого $x \in D$. Нехай w — нормування тіла D, що продовжує v і $w(g) = m/n$. Тоді при ізоморфізмі $inv_K\colon \mathrm{Br}\, K \to Q/Z$ [5] тіло D переходить у елемент $m/n(\mod Z)$. Справді, нехай Π — уніформізуючий елемент тіла D. Розглянемо автоморфізм $x \mapsto \Pi x \Pi^{-1}$ тіла D. Він індукує ізоморфізм максимальних нерозгалужених полів, а отже, автоморфізм σ_Π поля лишків l тіла D. Легко бачити, що кожен автоморфізм поля лишків є степенем автоморфізму σ_Π, бо внутрішній автоморфізм $\Pi^m ux(\Pi^m u)^{-1}$ алгебри D індукує автоморфізм σ_Π^m поля лишків (тут використовуємо той факт, що за теоремою Сколема-Нетер кожний автоморфізм поля лишків продовжується до деякого внутрішнього автоморфізму тіла D). Тому σ_Π є твірною циклічної групи $\mathrm{Gal}(l/k)$. Але σ теж є твірною цієї групи. Звідси маємо $(m, n) = 1$, що означає, що індекс тіла D збігається з його експонентою.

Лема 2. *[4] Нехай L — нерозгалужене розширення загального локального поля K. Тоді $U_K = N_{L/K}(U_L)$.*

Доведення. Для зручності читача і, враховуючи, що книга [4] не є легкодоступною, наведемо доведення цього твердження за Артіном-Тейтом [4].

Розглянемо канонічні фільтрації груп одиниць:

$$U_K = U_K^{(0)}, \quad U_K^{(i)} = 1 + P_K^i, \quad U_L^{(i)} = 1 + P_L^i \text{ для } i \geqslant 1.$$

Маємо

$$U_K/U_K^{(1)} \simeq k^*, \quad U_K^{(i)}/U_K^{(i+1)} \simeq k^+, \quad i \geqslant 1, \tag{1}$$

де перший ізоморфізм індукований редукцією за модулем $P_K\colon a \mapsto a \pmod{P}_K$, а другий визначений за допомогою співставлення $1+\pi^i a \mapsto a \pmod{P}_K$.

Аналогічно для поля L:

$$U_L/U_L^{(1)} \simeq l^*, \quad U_L^{(i)}/U_L^{(i+1)} \simeq l^+, \quad i \geqslant 1. \tag{2}$$

Оскільки L/K — нерозгалужене розширення, то π є уніформізуючим елементом в L. Якщо $a \in U_L$, то

$$\overline{N_{L/K}(a)} = \overline{\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(a)} = \prod_{\tau\in\mathrm{Gal}(l/k)} \tau(\overline{a}) = N_{l/k}(\overline{a}).$$

Отже, $N_{L/K}$ індукує гомоморфізм $U_L/U_L^{(1)} \mapsto U_K/U_K^{(1)}$, який при ізоморфізмі (1) переходить у $N_{l/k}$. Для будь-яких $i \geqslant 1$ і $a \in O_L$:

$$N_{L/K}(1+\pi^i a) = \prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(1+\pi^i a) = 1 + \pi^i \operatorname{Tr}_{L/K} a \pmod{P_L^{(i+1)}}. \tag{3}$$

Звідси випливає, що $N_{L/K}$ індукує гомоморфізми $U_L^{(i)}/U_L^{(i+1)} \mapsto U_K^{(i)}/U_K^{(i+1)}$, які при ізоморфізмі (2) переходять у слід $\operatorname{Tr}_{l/k}$.

Нехай $u \in U_K$. Для $\overline{u}(\mod P_K)$ виберемо $c_0 \in U_L$ так, щоб $\overline{N(c_0)} = \overline{u}$. Це можливо, оскільки гомоморфізм $N_{l/k}\colon l^* \to k^*$ сюр'єктивний [3]. Позначимо $u_0 = N(c_0)$. Розглянемо

$$u_1 = u/u_0 = 1 + \pi a \in U_K^{(1)}.$$

Знайдемо $c_1 = 1 + \pi\alpha_1 \in U_L^{(1)}$ (де $\alpha_1 \in O_L$) за рахунок вибору α_1 так, щоб

$$N(c_1) \equiv u_1 \pmod{\pi^2}.$$

Оскільки

$$N(c_1) \equiv (1 + \pi \operatorname{Tr} \alpha_1) \pmod{\pi^2},$$

і слід сюр'єктивний [3], то такий вибір елемента α_1 можливий.

Припустимо, що ми знайшли $u_i \in U_K^{(i)}$ і $c_i \in U_L^{(i)}$ такі, що $u_i = u_{i-1}/N(c_{i-1})$, $N(c_i) \equiv u_i \pmod{\pi^{i+1}}$ для всіх $i < n$. Повторюючи міркування, за допомогою яких ми одержали c_1 і u_1, знаходимо $c_n = 1 + \pi^n \alpha_n$ за рахунок вибору α_n так, що $u_n = u_{n-1}/N(c_{n-1})$.

Розглянемо тепер послідовність $N(c_0), \ldots, N(c_0 \ldots c_n), \ldots$. Вона фундаментальна, а тому збігається до деякого елемента $N(c) \in K$. Переходячи до границі в рівності $u = u_{n+1}N(c_0 \ldots c_n)$ отримаємо $u = N(c)$.

Лема 3. *Нехай L/K — розширення з індексом галуження e. Тоді $N_{L/K}(U_L^{(i)}) \subset U_K^{(j)}$ для будь-якого цілого $i \geqslant 1$, де j — мінімальне з цілих чисел, не менших ніж i/e.*

Доведення цієї леми, яке можна знайти, наприклад, у [5] для випадку локальних полів, дослівно переноситься і на випадок псевдолокальних полів.

Лема 4. *Нехай l/k скінченне розширення псевдоскінченного поля k. Якщо $N_{l/k}(a) = 1$ для $a \in l$, то існує $b \in l$, $N_{l/k}(b) = 1$ таке, що $l = k(ab)$.*

Доведення. Якщо k — скінченне поле, то твердження леми справедливе (див. наприклад [5, ст. 42]). Покажемо, що його можна сформулювати на мові логіки першого порядку.

Нехай l —будь-яке скінченне розширення поля k степеня n. Нехай $e_1 \dots e_n$ — будь-яка база l/k. Кожний елемент $a \in l$ записується у вигляді $a_1e_1 + \dots + a_ne_n$, а елемент a' поля l запишемо у вигляді $a'_1e_1 + \dots + a'_ne_n$, де $a_i, a'_i \in k$. Елементи $c \in k$ ми ототожнюємо з елементами виду $ce_1 + 0e_2 + \dots + 0e_n$. Додавання елементів a і a' визначається очевидно, а для множення маємо:

$$aa' = \sum_{i=1}^{n} a_ie_i \sum_{j=1}^{n} a'_je_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_ia'_je_ie_j = \sum_{i,l=1}^{n} a_ia'_j \sum_{k=1}^{n} y_{ij}^{k}e_k = \sum_{i,j,k=1}^{n} a_ia'_jy_{ji}^{k}e_k.$$

Оскільки l — розширення поля k, то дані операції додавання і множення повинні задовольняти всі аксіоми поля. Записавши аксіоми поля, ми одержимо деякі співвідношення між y_{ij}^k. Кон'юнкцію всіх цих співвідношень позначимо через $D_n(\overline{y})$ ($D_n(\overline{y})$ — предикат від n^3 змінних, що описує скінченні розширення степеня n поля k). Тоді $\forall \overline{y} D(\overline{y})$ — означає "для кожного розширення поля степеня n". Кожен елемент з поля l ототожнюється з набором $a_1, \dots, a_n$. Легко зрозуміти, що норма $N(a)$ є визначником матриці регулярного відображення, яке елемент x переводить в ax. Цей визначник є деяким многочленом від y_{ij}^k та $a_1, \dots, a_n$. Тому вираз $N(a) = 1$ є предикатом від $a_1, \dots, a_n$ та y_{ij}^k. Приєднання елемента $d = ab$ до поля k дає поле l, якщо елементи 1, ab, $(ab)^2, \dots, (ab)^{n-1}$ лінійно незалежні над k. Лінійна незалежність означає, що визначник матриці, рядками якої є координати елементів $1, ab, \dots, (ab)^{n-1}$ в базі $e_1, \dots, e_n$, відмінний від 0. Цей визначник є многочленом від координат $a_1, \dots, a_n$ елемента a, координат $b_1, \dots, b_n$ елемента b та структурних констант y_{ij}^k. Позначимо цей многочлен $F(\overline{y}, \overline{a}, \overline{b})$. Тоді твердження леми можна записати у вигляді елементарного висловлення:

$$\forall \overline{y} \forall \overline{a} \left[[D(\overline{y}) \wedge N(\overline{a}) = 1] \rightarrow [\exists \overline{b} (N(\overline{b}) = 1) \wedge (F(\overline{y}, \overline{a}, \overline{b}) \neq 0)] \right].$$

Оскільки це висловлення вірне для всіх скінченних полів, то за [1] воно справедливе і для псевдоскінченних полів.

Доведення наступної леми, яке можна знайти в [5], не використовує специфіку поля лишків поля L.

Лема 5. *Нехай L — максимальне нерозгалужене підполе тіла D, $L^1 = L \cap D^{(1)}$. Кожний елемент з L^1 є комутатором елементів з D^*.*

Тепер ми можемо довести теорему, використовуючи ті ж міркування, що і в класичному випадку [5]. Щоб звернути увагу на місця, де потрібно модифікувати класичне доведення, тобто застосувати леми 1-4, відтворимо ці міркування. Очевидно, досить довести включення $D^{(1)} \subset [D^*, D^*]$.

Нехай $x \in D^{(1)}$, тоді $\overline{x}$ лежить в групі $l^{(1)} = \{a \in l^* \mid N_{l/k}(a) = 1\}$. Справді, x можна подати у вигляді $x = ab$, де $a \in U_L$, $b \in 1 + B_D$. Тоді $\overline{x} = \overline{a}$. З іншого боку,

$$N_{L/K}(a) = Nrd_{D/K}(a) = Nrd_{D/K}(b^{-1}) = N_{M/K}(b)^{-1}$$

для максимального підполя $M \subset D$ такого, що $b \in M$. Але

$$b \in (1 + B_D) \cap M = 1 + B_M,$$

тому, згідно з лемою 3,

$$N_{M/K}(b^{-1}) \in 1 + P_K,$$

де P_K — ідеал нормування в K. Тому

$$N_{l/k}(\overline{a}) = \prod_{i=0}^{n-1} \varphi^i(\overline{a}) = \overline{\prod_{i=0}^{n-1} \varphi^i(a)} = \overline{N_{L/K}(a)} = 1,$$

де φ — твірна групи $\mathrm{Gal}(l/k)$. За лемою 4 існує $z \in l^{(1)}$ такий, що $l = k(\overline{x}z)$. А за теоремою Гільберта 90 $z = \varphi(s)/s$ для деякого $s \in l^*$, де φ — твірна групи $\mathrm{Gal}(l/k)$. Тоді, якщо $u \in U_L$ має властивість $\overline{u} = s$, то $y = \varphi(u)/u$ і $z = \overline{y}$. Зауважимо, що розширення $R = K(xy)$ є максимальним нерозгалуженим підполем в D, бо

$$n \geqslant [R : K] \geqslant [k(\overline{xy}) : k] = [l : k] = n.$$

Звідси

$$[R : K] = [k(\overline{xy}) : k] = n.$$

Таким чином, $[R : K] = [L : K]$ і за теоремою Сколема-Нетер $R = sLs^{-1}$ для деякого $s \in D^*$.

Враховуючи що $N_{L/K}(L^*) = UK^{*n}$ (лема 2) і те, що $(v(Nrd_{D/K}(g)), n) = 1$, як це випливає з доведення леми 1, ми бачимо, що існують $i \in Z$ і $c \in L$ такі, що

$$Nrd_{D/K}(s) = Nrd_{D/K}(g^i c).$$

Поклавши $t = s(g^i c)^{-1}$, отримаємо за вибором g (див. лему 1)

$$R = tg^i cLc^{-1}g^{-i}t^{-1} = tLt^{-1},$$

$Nrd_{D/K}(t) = 1$ і $x \in Ry^{-1} \subset t^{-1}L^{(1)}tL^{(1)}$. Звідси $x = t^{-1}atb$ для $a, b \in L^{(1)}$. Використовуючи лему 5, маємо $x = t^{-1}ata^{-1}(ab) = (t^{-1}ata^{-1})(c^{-1}d^{-1}cd)$ для деяких $c, d \in D^*$.

Наслідок. *Нехай D — скінченновимірне тіло над псевдолокальним полем K. Тоді кожний елемент тіла D, що має приведену норму 1, є добутком не більше двох комутаторів.*

1. Ax J. *The elementary theory of finite field*// Ann. Math. – 1968, – Vol.88, N 2. – P.239-271.
2. Платонов В.П., Янчевский В.І. *О гипотезе Хардера* // Доклады АН СССР. – 1975. – Т.221, N 4. – С.784-787.
3. Serre J.P. Corps locaux. – Paris, Hermann, – 1962.
4. Artin E., Tate J. Class field theory. – Harvard. – 1961.
5. Платонов В.П., Рапинчук А.С. Алгебраические групы и теория чисел. – М., Наука. – 1991.

Стаття надійшла до редколегії 10.09.1997

УДК 512.552.12

МІНІМАЛЬНІ ЦІЛКОМ ПРОСТІ ІДЕАЛИ ДУО-КІЛЕЦЬ БЕЗУ

А.І.Гаталевич

Gatalevich A.I. On minimal completely prime ideals of Bezout duo rings. Throughout, rings are duo rings with unit: every right ideal is a left ideal and conversely. We study the minimal completely prime spectrum of ring R, in order to obtain information about $Q_{Cl}(R)$, the classical ring of quotients of R. We prove that every Bezout ring with a finite number of minimal completely prime ideals is an elementary divisor ring if and only if for every completely prime ideal P factor ring R/P is an elementary divisor ring.

Дослідження спектру комутативних кілець проводилося багатьма авторами, зокрема, Джерісоном і Хенріксеном [1], Матлісом [2], Хатсоном [3] й іншими. У цій праці вивчено мінімальні цілком прості ідеали дуо-кільця з метою одержання інформації про його класичне кільце дробів і для описання властивостей цього кільця. Зокрема, досліджено вплив спектру дуо-кілець Безу на можливість діагональної редукції матриць. Один з результатів встановлює, що дуо-кільце Безу зі скінченним числом мінімальних цілком простих ідеалів є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли всі фактор-кільця за цілком простими ідеалами є кільцями елементарних дільників.

Всі розглянуті кільця є асоціативними з одиницею ($1 \neq 0$). Кільце R називається правим кільцем Безу, якщо довільний скінченно-породжений правий ідеал R є головним. Скажемо, що дві матриці A і B над кільцем R є еквівалентними, якщо існують такі зворотні матриці P і Q над кільцем R відповідних розмірів, що $B = PAQ$. Матриця A володіє діагональною редукцією, якщо вона еквівалентна діагональній матриці $diag(d_{11}, d_{22}, \dots)$, з властивістю $Rd_{i+1,i+1}R \subseteq d_{i,i}R \cap Rd_{i,i}$ (під діагональною матрицею розуміємо прямокутну матрицю, в якій поза головною діагоналлю стоять нулі). Якщо довільні (1×2) і (2×1) матриці над R володіють діагональною редукцією, тоді кільце R називають відповідно лівим, чи правим кільцем Ерміта. Ліве і праве кільце Ерміта називається кільцем Ерміта. Якщо над кільцем R довільна матриця володіє діагональною редукцією, то R називається кільцем елементарних дільників. Очевидно, що кільце елементарних дільників є кільцем Ерміта, яке, в свою чергу, є кільцем Безу.

Дуо-кільцем називається кільце, в якому будь-який правий, чи лівий ідеал є двобічним. Кільце називається правим кільцем Голді, якщо воно задовольняє умовам максимальності для ануляторних правих ідеалів і прямих сум правих ідеалів [4]. Кільце R називається регулярним, якщо для довільного $a \in R$ існує таке $x \in R$, що $axa = a$. Регулярне кільце є кільцем Безу і в комутативному випадку є кільцем елементарних дільників [5]. Регулярне дуо-кільце називається абелево регулярним. Кільце називається редукованим, якщо в ньому немає ненульових нільпотентних елементів.

Кільце R називається кільцем нормування, якщо для довільних елементів $a, b \in R$: $RaR \subseteq Rb \cap bR$, або $RbR \subseteq Ra \cap aR$ [6].

Кільце R назвемо адекватним справа в нулі, якщо R – кільце Безу і для будь-яких $a, b \in R$ існують такі $r, s \in R$, що

1) $a = rs$;

1991 *Mathematics Subject Classification.* 13F07, 13G05, 16W60.

2) $rR + bR = R$;

3) для довільного незворотного лівого дільника s' елемента s ідеал $s'R + bR$ – властивий (слід зауважити, що елемент a може бути, зокрема, і нулем).

Комутативні адекватні кільця вивчались Гілманом і Хенріксоном [5], Капланським [6], Хелмером [7], Ларсеном, Левісом, Шоресом [8], Комарницьким [9, 10], Забавським [10].

Двобічний ідеал I кільця R називається цілком простим, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ з того, що $ab \in I$ завжди випливає, що $a \in I$ або $b \in I$ [11].

Цілком простий ідеал I кільця R називається мінімальним, якщо довільний ідеал P такий, що $P \subset I$ не є цілком простим.

Використовуватимемо такі позначення: $\min R$ – множина всіх цілком простих ідеалів; $U(R)$ – група одиниць; $Q_{Cl}(R)$ – класичне кільце дробів; $N(R)$ – первинний радикал кільця R. Через $Ann^r_R X (Ann^l_R X)$ позначатимемо відповідно правий і лівий анулятори множини X.

Твердження 1. *Нехай R – редуковане дуо-кільце, і $\{P_\alpha\}$ – множина всіх його мінімальних цілком простих ідеалів. Тоді:*

1) R_{P_α} – тіло дробів кільця R/P_α;

2) $\cup_\alpha P_\alpha$ – множина всіх дільників нуля R.

Доведення. 1) Нехай $O_\alpha = \{r \in R | ur = 0$ для деякого $u \in R - P_\alpha\}$. Тоді O_α – ідеал кільця і $O_\alpha \subset P_\alpha$. Оскільки $P_\alpha R_{P_\alpha}$ – єдиний цілком простий ідеал кільця R_{P_α}, то кожний елемент ідеала $P_\alpha R_{P_\alpha}$ є нільпотентним. Для кожного $p \in P_\alpha$, існують такі $u \in R - P_\alpha, n > 0$, що $up^n = 0$. З низки рівностей $(up)^n = upup \dots up = upp \dots p\bar{u} = up^n\bar{u}$ випливає, що $(up)^n = 0$, а тому $up = 0$. Звідси $O_\alpha = P_\alpha$ і $P_\alpha R_{P_\alpha} = 0$. Тому R_{P_α} є тілом дробів кільця R/P_α.

2) З щойно наведених міркувань і рівності $O_\alpha = P_\alpha$ випливає, що кожний елемент множини $\cup_\alpha P_\alpha$ є дільником нуля. Навпаки, нехай $x \in R, x \neq 0$ – дільник нуля. Тоді існує $y \in R, y \neq 0$, для якого $xy = 0$. Оскільки $\cap_\alpha P_\alpha = 0$, то знайдеться ідеал P_β, який не містить y. Отже, $x \in P_\beta$. Твердження доведене.

Твердження 2. *Нехай R – редуковане дуо-кільце. Тоді справедливі твердження:*

1) Цілком простий правий ідеал P кільця R є мінімальним тоді і тільки тоді, коли для довільного $x \in P : Ann^r_R x \not\subset P$.

2) Скінченно-породжений правий ідеал J кільця R міститься в мінімальному цілком простому ідеалі тоді і тільки тоді, коли $Ann^r_R J \neq 0$.

3) Якщо $x \in R$ і $y \in Ann^l_R x$, то $Ann^r_R(xR + yR) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x - y$ не є дільником нуля.

Доведення. 1) Оскільки P – мінімальний цілком простий ідеал кільця R і $x \in P$, то з твердження 1 випливає існування такого $u \in R - P$, що $ux = 0$, або $x\bar{u} = 0$, де u задовольняє умову $ux = x\bar{u}$. Навпаки, припустимо, що для будь-якого $x \in P$ виконується $Ann^r_R x \not\subset P$. Нехай існує такий цілком простий ідеал P_1 кільця R, що $P_1 \subsetneq P$. Тоді можна знайти елемент $x \in P - P_1$, для якого $Ann^r_R x \subset P_1 \subset P$. Отримана суперечність показує, що P – мінімальний.

2) Нехай $J = a_1R + \dots + a_nR = Ra_1 + \dots + Ra_n$ – скінченнопороджений правий ідеал кільця R, а $I = Ann^r_R J$. Нехай $J \subset P$. Тоді існують такі елементи $u_i \in R - P$, що $a_iu_i = 0, i = 1, \dots, n$. Нехай $u = u_1u_2 \dots u_n, u \notin P$. Якщо $r \in J$, то $r = r_1a_1 + \dots + r_na_n$. Звідси

$$ru = r_1a_1u_1u_2 \dots u_n + r_2a_2u_2u_1'u_3 \dots u_n + \dots + r_na_nu_n\bar{u}_1 \dots \bar{u}_{n-1} = 0,$$

де $u_1', \dots, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1}$ такі елементи, що $u_1u_2 \dots u_n = u_2u_1'u_3 \dots u_n = u_n\bar{u}_1 \dots \bar{u}_{n-1} = 0$ (вони існують, оскільки R – дуо-кільце). Цим встановлено, що $u \in I$.

Навпаки припустимо, що $I \neq 0$. Тоді існує мінімальний цілком простий ідеал P, для якого $I \not\subset P$. Тепер з п.1) випливає, що $J \subset P$.

3) Нехай $Ann^r_R(xR + yR) = 0$ і $(x - y)t = 0$ для деякого $t \in R$. Тоді $xt = yt, ytx = yty$. Але $ytx = yxt' = 0$, де елемент t' існує, оскільки R – дуо-кільце. Звідси $yty = ytyt =$

$(yt)^2 = (xt)^2 = 0$. Оскільки R – редуковане, то $yt = xt = 0$. Отже, $t \in Ann^r_R(Rx + Ry) = Ann^r_R(xR + yR) = 0$. Таким чином, $x - y$ не є дільником нуля. Навпаки, нехай $t \in Ann^r_R(xR + yR)$. Тоді $(x - y)t = 0, xt = yt$, $yxt = y^2t = 0$, а отже $t = 0$. Твердження доведене.

Твердження 3. *Дуо-кільце R є регулярним тоді і тільки тоді, коли воно редуковане і кожний цілком простий ідеал є мінімальним.*

Доведення. Розглянемо регулярне кільце R і його ідеал I. Якщо $x \in R$ такий, що $x^n \in I, n > 0$, то $xR = eR$, де e – ідемпотент. Звідси $e = xm, e = e^n = (xm)^n = x^n\bar{m}$. Тому $e \in I$ і $x \in I$. Взявши $I = 0$, отримуємо, що R – редуковане кільце. Якщо $I = P$ – цілком простий ідеал, то $1 - e \in Ann^r_R x$, $1 - e \notin P$, і твердження 2 показує, що ідеал P – мінімальний. Навпаки, нехай R – редуковане кільце і кожний цілком простий правий ідеал є мінімальним. Нехай $x \in R, x \neq 0, I = Ann^r_R x$. Тоді $xR \cap I = 0$ і ідеал $xR + I$ не міститься в жодному мінімальному цілком простому правому ідеалі. Тому $xR + I = R$, тобто $R = xR \oplus I$. Отже, R – регулярне кільце. Твердження доведене.

Твердження 4. *Нехай R – редуковане дуо-кільце. Тоді такі твердження еквівалентні:*

1) $Q_{Cl}(R)$ – регулярне;

2) Якщо довільний правий ідеал кільця R міститься в об'єднанні мінімальних цілком простих ідеалів, то він міститься в одному з них;

3) Якщо J – скінченно-породжений правий ідеал кільця R, то існують такі $b \in J, a \in Ann^l_R J$, що $a + b$ не є дільником нуля;

4) Якщо $b \in R$, то існує $a \in Ann^l_R$ такий, що $Ann^r_R(Ra + Rb) = 0$.

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2) Нехай $I \subset \cup_\alpha P_\alpha$. Тоді (див. твердження 1) кожний елемент множини I є дільником нуля. Отже, $IQ_{Cl}(R) \neq Q_{Cl}(R)$, $iIQ_{Cl}(R) \subset \mathcal{P}$, де $\mathcal{P}$ – максимальний правий ідеал кільця $Q_{Cl}(R)$ і $I \subset \mathcal{P} \cap R$. З твердження 3 випливає, що $\mathcal{P}$ – мінімальний цілком простий ідеал кільця $Q_{Cl}(R)$. Звідси маємо, що $\mathcal{P} \cap R$ – мінімальний цілком простий ідеал кільця R.

2) $\Rightarrow$ 3) Нехай $J = b_1R + \cdots + b_nR, I = Ann^r_R J$. Припустимо, що не існує таких елементів $b \in J, a \in I$, щоб $a + b$ – не був дільником нуля. Тоді $I + J \subset \cup_\alpha P_\alpha$, де P_α – мінімальні цілком прості ідеали. Далі виберемо мінімальний цілком простий ідеал P, для якого $I + J \subset P$. Згідно з твердженням 2 існують елементи $c_i \in Ann^r_R b_i \backslash P$. Тоді $c = c_1c_2 \ldots c_n$ і $c \in I \backslash P$. Отримана суперечність доводить імплікацію.

3) $\Rightarrow$ 4) Це наслідок твердження 2.

4) $\Rightarrow$ 1) Нехай $q \in Q_{Cl}(R)$. Тоді $Q_{Cl}(R)q = Q_{Cl}(R)b$ для деякого $b \in R$. Нехай $a \in Ann^l_R$ і $Ann^r_R(Ra + Rb) = 0$. З твердження 2 отримуємо, що $b - a$ не є дільником нуля. Тому $Q_{Cl}(R)b + Q_{Cl}(R)a = Q_{Cl}(R)$. Оскільки $Q_{Cl}(R)$ – редуковане, то $Q_{Cl}(R)b \cap Q_{Cl}(R)a = 0$. Звідси $Q_{Cl}(R) = Q_{Cl}(R)a + Q_{Cl}(R)b$. Отже, $Q_{Cl}(R)$ – регулярне. Твердження доведено.

Теорема 5. *Нехай R – редуковане дуо-кільце зі скінченним числом мінімальних цілком простих ідеалів – $\{P_1, \ldots, P_n\}$. Тоді:*

1) $Q_{Cl}(R) \cong R_{P_1} \oplus \cdots \oplus R_{P_n}$, де R_{P_i} – тіла дробів кілець R/P_i, $i = 1, \ldots, n$.

2) $Q_{Cl}(R)$ – абелеве регулярне кільце.

Доведення. Нехай $S = R - \cup_{i=1}^n P_i$. Тоді $\{(P_1)_S, \ldots, (P_n)_S\}$ – множина всіх мінімальних цілком простих ідеалів кільця R_S і $(R_S)_{(P_i)_S} \cong R_{P_i}, i = 1, \ldots, n$. Нехай $O_i = \{r \in R | ur = 0\}$ для деякого $u \in R - P_i$. З твердження 1 маємо $O_i = P_i$. Завдяки цьому $R/O_i = R_{P_i}, i = 1, \ldots, n, O_i + O_j = R, i \neq j$. Оскільки R – редуковане, то $\cap_{i=1}^n P_i = \cap_{i=1}^n O_i = 0$. Отже,

$$Q_{Cl}(R) = R_S \cong R/O_1 \oplus \cdots \oplus R/O_n = R_{P_1} \oplus \cdots \oplus R_{P_n}.$$

У даному розкладі R_{P_i} – тіла дробів для кілець R/P_i. Таким чином, $Q_{Cl}(R)$ – абелеве регулярне кільце. Теорему доведено.

Теорема 6. *Нехай R - редуковане дуо-кільце Безу, яке є правим кільцем Голді. Тоді довільний мінімальний цілком простий ідеал кільця R є головним і породжується ідемпотентом.*

Доведення. Завдяки обмеженням, накладенним на R, класичне кільце дробів $Q_{Cl}(R)$ є артіновим регулярним кільцем зі скінченним числом мінімальних цілком простих правих ідеалів. Нехай P – мінімальний цілком простий ідеал кільця R. Розглянемо ідеал $P_Q = \{p/s \mid p \in P\}$. Очевидно, що P_Q – цілком простий ідеал кільця $Q_{Cl}(R)$. Тому існує такий ідемпотент $e \in Q_{Cl}(R)$, що $P_Q = eQ_{Cl}(R)$. Оскільки R – дистрибутивне кільце, то $e \in R$ [12, л. 1.10]. Для довільного $p \in P$ отримуємо $p = er$, де r – регулярний елемент. Звідси $ep = eer = er = p$ і $P \subset eR$. Оскільки $e \in P$, то $eR \subset P$. Отже, $P = eR$. Теорему доведено.

Теорема 7. *Нехай R – дуо-кільце Безу зі скінченним числом мінімальних цілком простих ідеалів. Тоді $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$, де кожне R_i є кільцем Безу з единим мінімальним цілком простим ідеалом.*

Доведення. Нехай $P_1, \ldots, P_n$ – всі мінімальні цілком прості ідеали. Оскільки R – дистрибутивне кільце, то $P_i + P_j = R$, коли $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Оскільки $N(R) = \cap_{i=1}^{n} P_i$, то бачимо, що $R/N(R) = R/P_1 \oplus \cdots \oplus R/P_n$. Тому існують такі попарно ортогональні ідемпотенти $\bar{e}_i \in R/P_i$, що $\bar{e}_1 + \cdots + \bar{e}_n = \bar{1}$, де $\bar{1}$ – одиниця кільця $R/P(R)$. Піднявши ідемпотенти за модулем $N(R)$, переконуємось в існуванні попарно ортогональних ідемпотентів $e_1, \ldots, e_n \in R$, для яких елемент $1 - (e_1 + \cdots + e_n)$ є ідемпотентом з $N(R)$. Це можливо лише у випадку, коли $e_1 + \cdots + e_n = 1$ [13]. Звідси випливає, що $R = e_1 R \oplus \cdots \oplus e_n R$. Кільця $e_i R$ (як гомоморфні образи кілець Безу) є кільцями Безу. Окрім цього, ці кільця є кільцями з єдиним мінімальним цілком простим ідеалом. Теорему доведено.

Тепер сформулюємо два наслідки.

Наслідок 1. *Дуо-кільце Безу зі скінченним числом мінімальних цілком простих ідеалів є кільцем Ерміта.*

Наслідок 2. *Напівлокальне дуо-кільце Безу є кільцем Ерміта.*

Дані наслідки дають відповідь на питання, які поставлені Хенріксеном в [14, пит.3, с.162] для випадку дуо-кілець (у комутативному випадку це показано в роботі [8]).

Твердження 8. *Дуо-кільце Ерміта R є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли $R/N(R)$ є кільцем елементарних дільників*

Доведення. Оскільки гомоморфний образ кільця елементарних дільників є кільцем елементарних дільників, то необхідність очевидна. Достатньо лише розглянути випадок коли $R/N(R)$ – кільце елементарних дільників. У [5, тв.6] встановлено, що R є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли для довільних таких $a, b, c \in R$, таких, що $aR + bR + cR = R$, існують елементи $p, q \in R$, для яких $(ap + bq)R + cqR = R$. Оскільки $R/N(R)$ – кільце елементарних дільників, то щойно цитований результат дозволяє для елементів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in R/N(R)$ знайти такі елементи $\bar{p}, \bar{q}, \bar{u}, \bar{v} \in R/N(R)$, що $(\bar{a}\bar{p} + \bar{b}\bar{q})\bar{u} + \bar{c}\bar{q}\bar{v} = \bar{1}$ (де $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – гомоморфні образи елементів a, b, c при канонічному вкладенні R в $R/N(R)$). Таким чином, існують такі елементи $p, q, u, v \in R, n \in N(R)$, що $(ap + bq)u + cqv = 1 + n$. Оскільки $1 + n \in U(R)$, то $(ap + bq)R + cqR = R$, що і потрібно було довести.

Теорема 9. *Дуо-кільце Безу зі скінченним числом мінімальних цілком простих ідеалів є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли для довільного цілком простого ідеалу P фактор-кільце R/P є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Оскільки гомоморфний образ кільця елементарних дільників є кільцем елементарних дільників, то нам досить показати достатність. На підставі теореми 7 $R/N(R) = R/P_1 \oplus \cdots \oplus R/P_n$ є прямою сумою кілець елементарних дільників, а тому таким буде і кільце $R/N(R)$. Згідно з наслідком 1 R є кільцем Ерміта. Тоді на підставі твердження 5 R є кільцем елементарних дільників. Теорему доведено.

Перейдемо до розгляду дуо-кілець Безу R, кільця дробів $Q_{Cl}(R)$ яких містять лише скінченне число мінімальних цілком простих ідеалів. Прикладом можуть служити кільця, фактор-кільця яких за первинним радикалом є кільцями Голді.

Теорема 10. *Нехай R – дуо-кільце Безу, яке має класичне дуо-кільце дробів $Q_{Cl}(R)$ зі скінченним числом мінімальних цілком простих ідеалів. Тоді $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$, де R_i – кільця Безу з єдиним мінімальним цілком простим ідеалом.*

Доведення. На підставі теореми 7 $Q_{Cl}(R) = e_1 Q_{Cl}(R) \oplus \cdots \oplus e_n Q_{Cl}(R)$, де $e_1 Q_{Cl}(R), \ldots, e_n Q_{Cl}(R)$ – кільця Безу з єдиним мінімальним цілком простим ідеалом. Нехай $S = e_1 R \oplus \cdots \oplus e_n R$. Оскільки R – дистрибутивне кільце, то всі ідемпотенти кільця $Q_{Cl}(R)$ лежать в R. Звідси отримуємо, що $S = R$. Очевидно, що якщо P – мінімальний цілком простий ідеал в $e_i Q_{Cl}(R)$, то $P \cap R$ – мінімальний цілком простий ідеал в R, який міститься в $e_i R$. Отже, кільце $e_i R$ містить єдиний мінімальний цілком простий правий ідеал. Теорему доведено.

Як наслідки до теорем 9., 10. в комутативному випадку отримаємо:

Наслідок 3. *Кільце Ерміта R є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли $R/P(R)$ є кільцем елементарних дільників.*

Наслідок 4. *Кільце Безу R для якого $R/P(R)$ – кільце Голді є кільцем Ерміта (де $P(R)$ – нільрадикал кільця R).*

Наслідок 5. *Кільце R, яке має класичне кільце дробів $Q_{Cl}(R)$ зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів є кільцем Ерміта*

Розглянемо випадок адекватних справа кілець.

Твердження 11. *Довільний цілком простий ідеал адекватного справа в нулі дуо-кільця міститься в єдиному максимальному правому ідеалі.*

Доведення. Нехай P – цілком простий ідеал кільця R. Якщо P – максимальний, то все доведено. Нехай існують максимальні праві ідеали M_1, M_2 такі, що $P_1 \subset M_2 \cap M_2$. Оскільки $M_1 + M_2 = R$, то існують такі $m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$, що $m_1 + m_2 = 1$. Оскільки R – адекватне справа, то для довільного $a \in P$ (зокрема, можливий випадок $a = 0$), $a = rs$, де $rR + m_1 R = R$ і для довільного незворотного лівого дільника s' елемента s ідеал $s'R + m_1 R$ – властивий. Оскільки P – цілком простий ідеал і $P \subset M_1$, то $s \in P$. Нехай $dR = sR + m_2 R$. Оскільки $P \subset M_2$, то d – незворотний лівий дільник елемента s. Але $dR + m_1 R \supset m_2 R + m_1 R = R$, що суперечить вибору елемента a. Отримана суперечність доводить твердження.

Твердження 12. *Дуо-кільце Безу з єдиним мінімальним цілком простим ідеалом є адекватним справа в нулі тоді і тільки тоді, коли воно є кільцем нормування.*

Дане твердження є очевидним наслідком твердження 11.

Теорема 13. *Дуо-кільце Безу зі скінченим числом мінімальних цілком простих ідеалів є адекватним справа в нулі тоді і тільки тоді, коли воно є скінченною прямою сумою кілець нормування.*

Доведення. Нехай $P_1, \ldots, P_n$ – всі мінімальні цілком прості ідеали кільця R. Тоді на підставі теореми 7 $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$, де R_i – кільця Безу з єдиним мінімальним цілком простим ідеалом. Оскільки R – адекватне справа в нулі, то на підставі тверджень 12, 13 кільця R_i – кільця нормування.

Для доведення достатності слід показати, що якщо $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$, де R_i – кільця нормування, то R – адекватне справа в нулі кільце. Нехай $a = (a_i), b = (b_i) \in R$. Визначимо r_i і s_i в кожному R_i таким чином:

$$r_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } b_i \text{ не є одиницею в } R_i, \\ a_i, & \text{якщо } b_i \text{ – одиниця в } R_i, \end{cases}, \quad s_i = \begin{cases} a_i, & \text{якщо } b_i \text{ не є одиницею в } R_i, \\ 1, & \text{якщо } b_i \text{ – одиниця в } R_i. \end{cases}$$

Тоді $a = r_1 s_1 \dots r_n s_n = r_1 \dots r_n \bar{s}_1 \dots \bar{s}_{n-1} s_n$. Покладемо $r = r_1 \dots r_n$, $s = \bar{s}_1 \dots \bar{s}_{n-1} s_n$. Тоді, очевидно, що $a = rs$ і $rR + bR = R$. Оскільки $s_i q = q\bar{s}_i$ з відповідним елементом q для кожного $i = 1, \dots, n-1$, то отримаємо, що $\bar{s}_i R_i \subset s_i R_i$. Нехай $s' = \bar{s}'_1 \dots \bar{s}'_{n-1} s'_n$ є незворотним лівим дільником s. Для кожного i таке $\bar{s}'_i$ у тому числі і s'_n не є одиницею R_i і ми маємо $\bar{s}'_i R_i + b_i R \neq R_i$. Звідси отримуємо, що $s'R + bR \neq R$. Це показує, що R – адекватне справа в нулі кільце.

1. Henriksen M., Jerison M. *The space of minimal prime ideals of a commutative ring*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – 115. – P. 110 – 130.
2. Matlis E. *The minimal prime spectrum of a reduced ring*// Illin. J. of Math. – 1983. – 27. – P. 353 – 391.
3. Hutson H.L. *On zero-dimensional rings of quotients and the geometry of minimal primes* // J. of Alg. – 1988. – 112. – P. 1 – 14.
4. Кон П. Свободные кольца и их связи. – М.: Мир, 1975.
5. Gillman L., Henriksen M. *Some remarks about elemantary divisor rings* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – 82. – P. 362 – 365.
6. Kaplansky J. *Elementary divisors and modules*// Trans. Amer. Maht. Soc. – 1949. – 66. – P. 464 – 491.
7. Helmer O. *The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions*// Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – 49. – P. 225 – 236.
8. Larsen M., Lewis W., Shores T. *Elementary divisor rings and finitely presented modules* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – 187. – P. 231 – 248.
9. Комарницкий Н.Я.*Коммутативные адекватные области Безу и кольца елементарных делителей*// Алгебраические исследования, Сборник статей, Институт математики НАН Украины, Киев, 1996.- С. 97-113.
10 Забавський Б.В., Комарницький М.Я. *Про адекватні кільця*// Вісн. Львів. унів. - 1988. - 30. - С. 39-43.
11. Фейс К. Алгебра: кольца, модули, категории. – М.: Мир, 1977.
12. Туганбаев А.А. *Кольца с дистрибутивной структурой идеалов* Абелевы группы и модули. Изд. Томского унив. – В.5 – 1985 – С. 88 – 103.
13. Stenström, Bo.T. Rings of quotiens. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1975.
14. Henriksen M. *Some remarks about elementary divisor rings*// Michigan Math. J. – 1955/56. – 3. – P. 159 – 163.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997

УДК 512.552.12

НЕКОМУТАТИВНІ КІЛЬЦЯ З ЕЛЕМЕНТАРНОЮ РЕДУКЦІЄЮ МАТРИЦЬ

Б.В. Забавський, О.М. Романів

Zabavsky B.V., Romaniv O.M. Noncommutative rings with elementary reduction of matrices. The ring with elementary reduction of matrices is, by definition, a ring over which every matrix admits a diagonal reduction via elementary transformations. It is proven that a right Euclidean Bezout domain is a ring with the elementary reduction of matrices.

В [1] сформульовано задачу про вивчення як комутативних, так і некомутативних кілець з елементарною редукцією матриць. У даній праці показано, що права евклідова область Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Позначимо через $\mathrm{M}_n(R)$ кільце квадратних матриць порядку n з елементами кільця R, а через $\mathrm{GL}_n(R)$ — групу зворотних матриць порядку n з елементами кільця R.

Наведемо необхідні означення.

Під *елементарною матрицею* з елементами кільця R розуміємо квадратну матрицю одного з трьох типів [2]:
1) діагональна матриця зі зворотними елементами на головній діагоналі;
2) матриця, відмінна від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю;
3) матриця перестановки, тобто матриця, яка отримується з одиничної шляхом перестановки деяких її рядків і стовпців.

Кільце R без дільників нуля назвемо $\mathrm{GE}_n(R)$ *областю*, якщо довільна зворотна матриця над R породжується елементарними матрицями другого типу (тобто матрицями, відмінними від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю).

Матриці A і B з елементами кільця R є *елементарно еквівалентними* (у позначеннях $A \overset{e}{\sim} B$), якщо існують такі елементарні над R матриці $P_1, \ldots, P_k$, $Q_1, \ldots, Q_s$ відповідних розмірів, що

$$P_1 \cdot \ldots \cdot P_k \cdot A \cdot Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_s = B.$$

Кільце R називається *кільцем з елементарною редукцією матриць*, якщо довільна матриця $A \in \mathrm{M}_n(R)$ *володіє елементарною редукцією*, тобто якщо A елементарно еквівалентна діагональній матриці

$$\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, 0, \ldots, 0),$$

де $\varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i \supseteq R\varepsilon_{i+1}R$, $i = 1, 2, \ldots, r-1$ (під діагональною розуміємо, взагалі кажучи, прямокутну матрицю, в якій поза головною діагоналлю стоять нулі) [1]. Від *кільця елементарних дільників* [3] кільце з елементарною редукцією матриць відрізняється тим, що

1991 *Mathematics Subject Classification.* 13F07, 13G05, 16W60.

в його означенні матриці $P_1, \ldots, P_k$, $Q_1, \ldots, Q_s$ є не лише зворотними, а саме елементарними. Зрозуміло, що кільце з елементарною редукцією матриць є кільцем елементарних дільників. Проте не будь-яке кільце елементарних дільників є кільцем з елементарною редукцією матриць. Прикладом такого кільця є кільце $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2+1)$ [1, 4].

Наступні означення будуть сформульовані для правого одностороннього випадку, хоча зрозуміло, що всіх їх можна симетрично переформулювати і для лівого випадку.

Кільце R називається *правим кільцем Безу*, якщо будь-який скінченнопороджений правий ідеал є головним, тобто для будь-яких $a, b \in R$ існує таке $d \in R$, що $aR + bR = dR$.

Під *правим k-членним ланцюгом подільності* для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, розуміємо послідовність рівностей: $a = bq_1 + r_1$, $b = r_1q_2 + r_2$, $\ldots$, $r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k$.

Нормою над областю R назвемо таку функцію $\mathcal{N}$: $R \to \mathbb{Z}$, що $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(a) > 0$ для $a \in R \backslash 0$.

Назвемо область R *правою ω-евклідовою областю* стосовно норми $\mathcal{N}$, якщо для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, існує такий правий k-членний ланцюг подільності, що $\mathcal{N}(r_k) < \mathcal{N}(b)$. Очевидно, що права 1-евклідова область є правою евклідовою областю.

Твердження 1. *R є правою ω-евклідовою областю тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, існує скінченний правий k-членний ланцюг подільності.*

Доведення. Необхідність. Нехай R — права ω-евклідова область. Тоді для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, існує правий k-членний ланцюг подільності такий, що

$$\mathcal{N}(r_k) < \mathcal{N}(b).$$

Якщо $r_k = 0$, то необхідність доведено. В іншому випадку розглянемо пару (r_{k-1}, r_k). Для деякого цілого числа l існує правий l-членний ланцюг подільності для елементів r_{k-1}, r_k такий, що норма останнього залишку (позначимо іі r_{k+l}) менша норми r_k. Об'єднавши ці два ланцюги в один, отримаємо правий $(k+l)$-членний ланцюг подільності для елементів a, b, причому виконується нерівність

$$\mathcal{N}(r_{k+l}) < \mathcal{N}(r_k) < \mathcal{N}(b).$$

Якщо $r_{k+l} = 0$, то доведення закінчено. У протилежному випадку, аналогічно, розглядаємо правий ланцюг подільності для елементів r_{k+l-1}, r_{k+l} і знаходимо правий залишок, норма якого буде менша, ніж норма r_{k+l}. Даний процес є скінченний. Отже, права ω-евклідовість є умовою існування скінченного правого ланцюга подільності для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$. Необхідність доведено.

Достатність очевидна.

Твердження 2. *Права ω-евклідова область є правою областю Безу.*

Доведення. Нехай R — права ω-евклідова область. На підставі твердження 1, для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, існує скінченний правий k-членний ланцюг подільності, тобто

$$a = bq_1 + r_1,\ b = r_1q_2 + r_2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n,\ r_{n-1} = r_nq_{n+1}, \quad (1)$$

де $k = n + 1$. З останньоі рівності ланцюга (1) легко бачити, що $r_{n-1}R \subset r_nR$, з передостанньоі — $r_{n-2}R \subset r_nR$ і т.д. У підсумку ми отримаємо, що

$$bR \subset r_nR, \quad aR \subset r_nR. \quad (2)$$

З іншого боку, підставивши в другу рівність ланцюга (1) вираз $r_1 = a - bq_1$ (який отримується з першої рівності цього ж ланцюга) і зробивши необхідні перетворення, ми виразимо r_2 через a і b. Аналогічно можна виразити r_3 і т.д. У кінцевому випадку для деяких $x, y \in R$ отримаємо

$$r_n = ax + by \tag{3}$$

Таким чином, із співвідношень (2) і (3) випливає, що $aR + bR = r_n R$, тобто довільний скінченнопороджений правий ідеал правої ω-евклідової області є головним. Отже, права ω-евклідова область є правою областю Безу, що й потрібно було довести.

Твердження 3. *Права ω-евклідова область є GE_n областю для довільного натурального n.*

Доведення. Припустимо, що R є правою ω-евклідовою областю. Щоб показати, що $R \in \mathrm{GE}_n$, достатньо довести, що довільна зворотна $n \times n$-матриця зводиться до одиничної елементарними перетвореннями. Нехай $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n\, R$. Тоді

$$a_{11}R + a_{12}R + \cdots + a_{1n}R = R. \tag{4}$$

Оскільки область R є правою ω-евклідовою, то, згідно з твердженням 1, для елементів a_{11} і a_{12} існує скінченний правий ланцюг подільності. За допомогою елементарних перетворень стовпців замінимо a_{11} на останній, відмінний від нуля, правий залишок (позначимо його δ_1) в ланцюзі подільності для елементів a_{11}, a_{12}. Тоді перший рядок матриці A набуде вигляду

$$(\delta_1, 0, a_{13}, \ldots, a_{1n}).$$

Тепер замінимо δ_1 на останній, відмінний від нуля, правий залишок у ланцюзі подільності для елементів δ_1, a_{13} і т.д. У кінцевому випадку, отримаємо, що матриця A за допомогою елементарних перетворень зведеться, враховуючи (4), до вигляду

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементарними перетвореннями рядків, тобто домноженням зліва на відповідні елементарні матриці, матриця A' зведеться до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Над матрицею A'' здійснюємо аналогічні перетворення і т.д. Очевидно, що даний процес є скінченний. Отже, матриця A за допомогою елементарних перетворень зведеться до одиничної, що й потрібно було довести.

Зауваження 1. Поняття GE_2-області, розглянуте раніше, можна модифікувати. Спочатку покажемо, що GE_2 область породжується матрицями вигляду

$$F(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix},$$

де $a \in R$ [4]. Справді,

$$F(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GE}_2(R),$$

$$F^{-1}(a) = F(0)F(-a)F(0) \in \mathrm{GE}_2(R),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (F(0))^3 F(a), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = F(-a)(F(0))^3.$$

Нехай $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R)$. Тоді

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -r_1 \\ * & * \end{pmatrix},$$

де $r_1 = \alpha - \beta q_1$, тобто $\alpha = \beta q_1 + r_1$,

$$\begin{pmatrix} \beta & -r_1 \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 & -r_2 \\ * & * \end{pmatrix},$$

де $r_2 = \beta - r_1 q_2$, тобто $\beta = r_1 q_2 + r_2$. Продовжуючи даний процес дальше, за скінченне число кроків матриця M зведеться до матриці вигляду $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$, а з іншого боку, ми отримаємо скінченний правий ланцюг подільності для елементів α, β.

Таким чином, послідовності елементарних перетворень стовпців можна поставити у відповідність правий ланцюг подільності для початкових елементів α, β. Як наслідок, отримаємо, що матриця M зводиться до одиничної елементарними перетвореннями тоді і тільки тоді, коли існує скінченний правий ланцюг подільності для початкових елементів α, β. Нехай α, β такі елементи кільця R, що $\alpha R + \beta R = R$. Тоді:

— R є GE_2 областю, якщо будь-які елементи $\alpha, \beta \in R$, для яких $\alpha R + \beta R = R$, мають правий скінченний ланцюг подільності.

— R є правою ω-евклідовою областю, якщо довільні елементи $\alpha, \beta \in R$ мають скінченний правий ланцюг подільності.

Твердження 4. *Нехай R — кільце без дільників нуля. Тоді R є правою ω-евклідовою областю тоді і тільки тоді, коли R є GE_2-областю і правою областю Безу.*

Доведення. Необхідність є наслідком тверджень 2 і 3, тому досить довести достатність.

Нехай R є GE_2-областю і правою областю Безу. Припустимо, що $a, b \in R$, $b \neq 0$. Оскільки R — права область Безу, то $aR + bR = dR$. Звідси $a = da_0$, $b = db_0$ і $a_0 R + b_0 R = R$ для деяких $a_0, b_0 \in R$. Згідно із зауваженням 1, умова GE_2-області забезпечує наявність скінченного правого ланцюга подільності для a_0, b_0. Домноживши зліва рівності цього ланцюга на d, отримаємо скінченний правий ланцюг подільності для елементів a, b. Звідси, в силу твердження 1, отримуємо, що R є правою ω-евклідовою областю.

Твердження 5. *Нехай R — права ω-евклідова область. Тоді довільна зворотна матриця над R є скінченним добутком елементарних матриць.*

Для доведення достатньо зауважити, що, на підставі твердження 4, права ω-евклідова область є GE_2 областю.

Зауважимо , що під правою евклідовою областю Безу ми розуміємо кільце без дільників нуля, яке зліва є Безу, а справа евклідовим.

Теорема 1. *Права евклідова область Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Доведення. П. Кон у [5, теор.3.6] довів, що права головна область Безу є кільцем елементарних дільників. Звідси, як наслідок, отримуємо, що і права евклідова область Безу є кільцем елементарних дільників. Згідно з твердженням 5, довільна зворотна матриця над правою евклідовою областю є добутком елементарних матриць. Тому права евклідова область Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць, що і потрібно було довести.

1. Zabavsky B. *Ring with elementary reduction matrix*// Ring Theory Conf. (Miskols, Hungary). – 1996. – P.14.
2. Cooke G. *A weakening of the euclidean property for integral domains and applications to algebraic number theory. I.*// Journal fur die Reine und angewande Math. – 1976. – Vol. 282. – P.133 – 156.
3. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1966. – Vol. 66. – P.464 – 491.
4. Bougaut B. *Anneaux Quasi-Euclidiens*// These de docteur troisieme cycle. – 1976. – Vol.67.
5. Cohn P.M. *Right principal Bezout domains*// J. London Math. Soc. – 1987. – Vol.35 ,N2. – P.251-262.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997

УДК 512.552.12

КІЛЬЦЯ З МАЙЖЕ ІНВАРІАНТНИМИ ЕЛЕМЕНТАРНИМИ ДІЛЬНИКАМИ

М. Я. Комарницький

Komarnitskii M.Ya. On almost invariant elementary divisor rings. We introduced the almost invariant elementary divisor rings and found some characterization of this rings. We proved the criterion for simple rings to by elementary divisor rings.

Нехай A – асоціативне кільце з $1 \neq 0$. Якщо для матриці $C = (c_{ij})$, $c_{ij} \in A$, $i = 1,\ldots,m$; $j = 1,\ldots,n$ існують такі зворотні матриці $P \in \mathcal{U}(A_m)$ і $Q \in \mathcal{U}(A_n)$, що

$$PCQ = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & d_k & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

і $Ad_{i+1}A \subseteq Ad_i \cap d_iA$ для кожного $i = 1,\ldots,k-1$, то кажуть, що матриця A володіє діагональною редукцією.

Якщо над кільцем A кожна прямокутна матриця володіє діагональною редукцією, то це кільце називається кільцем елементарних дільників [1]. Кільця, над якими діагональною редукцією володіють однорядкові матриці, називаються ермітовими справа, а кільця, над якими діагональною редукцією володіють одностовпчикові матриці, називаються ермітовими зліва [1]. У літературі зустрічаються й інші означення кілець елементарних дільників. Наприклад, П.М. Кон у праці [2] вимагає в діагональній редукції, щоб для кожного $i < k$ існував такий інваріантний елемент c_i, що $a_{i+1}A \subseteq c_iA \subseteq a_iA$. Порівняння цих двох означень показує, що відмінності в різних поняттях діагональної редукції можуть виникати за рахунок властивостей діагональних елементів. На цьому зауваженні базується і наше означення кільця з майже інваріантними елементарними дільниками [3], [4]. Будемо говорити, що діагональна редукція (1) матриці C є майже інваріантною діагональною редукцією, якщо елементи $d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}$, за виключенням, можливо, елемента d_k, є інваріантними. Наприклад, матриця $C \in A_2$ може мати лише три можливі діагональні редукції:

1991 *Mathematics Subject Classification.* 13F07, 13G05, 16W60.

1) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, де a – довільний елемент з A;

2) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, де a – інваріантний, $a|_l b, a|_r b$ і b не є інваріантним;

3) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, де a і b – інваріантні.

Наступний результат є аналогом відповідної теореми Капланського [1], доведення якої володіє певним недоліком, оскільки в доведенні неявно використовується повна подільність довільного ненульового елемента на себе.

Теорема 1. *Ермітове кільце A є кільцем з майже інваріантними елементарними дільниками тоді і тільки тоді, коли будь-яка 2×2 матриця еквівалентна матриці вигляду*

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

де e – інваріантний елемент, який є лівим (або правим) дільником елемента d, або ж $d = 0$, а e – довільний елемент.

Доведення. Необхідність умови очевидним чином випливає з означень. Доведемо достатність сформульованої умови. Нехай A – ермітове кільце і нехай кожна 2×2 матриця володіє майже інваріантною діагональною редукцією. Розглянемо довільну $2 \times n$ – матрицю

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

і покажемо, що вона також володіє майже інваріантною діагональною редукцією. Вважатимемо, що $n \geqslant 3$. Завдяки ермітовості A існує зворотна матриця $P \in A_n$, для якої

$$(a_{11}a_{12}\ldots a_{1n})P = (d_1 0 \ldots 0).$$

Тоді

$$CP = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \end{pmatrix}.$$

Виберемо таку матрицю Q, щоб

$$AP \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a'_{21} & d_2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді існування майже інваріантної діагональної редукції для матриці

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ a'_{21} & d_2 \end{pmatrix}$$

є достатнім для остаточної майже інваріантної діагональної редукції матриці C. Аналогічно встановлюється можливість майже інваріантної діагональної редукції для будь-якої $m \times 2$ матриці.

Далі продовжимо доведення методом математичної індукції за кількістю рядків матриці.

База індукції : кожна матриця розміру $(n \times m)$, де $min\{n, m\} \leqslant 2$ володіє майже діагональною редукцією.

Припустимо, що матриці над A, з не більш як $m-1$ рядком, володіють майже інваріантною діагональною редукцією.

Для доведення кроку індукції розглянемо довільну матрицю $C=(c_{ij})$, $c_{ij}\in A$, розмірів $m\times n$. Завдяки базі індукції можна вважати, що $m\geqslant 3$ або $n\geqslant 3$. Для визначеності, нехай $m\geqslant n$. Знайдемо такі 2×2 матриці

$$P_1=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}\ ,\quad Q=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{pmatrix},$$

$P,Q\in\mathcal{U}(A_2)$, що

$$P_1\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ c_{m1} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix}Q_1=\begin{pmatrix} d_1 & 0\\ 0 & d_2\end{pmatrix}.$$

Можна вважати, що або $d_2=0$, або d_1 – інваріантний елемент і $d_1|_l d_2$ і $d_1|rd_2$. Тоді

$$PAQ=$$

$$=\begin{pmatrix} p_{11} & 0 & \cdots & 0 & p_{12}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ p_{21} & 0 & \cdots & 0 & p_{22}\end{pmatrix} C \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & \cdots & 0 & q_{12}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ q_{21} & 0 & \cdots & 0 & q_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} d_1 & c_{12} & \cdots & c_{1n-1} & 0\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n-1} & c_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & c_{m2} & \cdots & c_{mn-1} & d_2\end{pmatrix}.$$

Нехай C' – матриця, одержана з PAQ викресленням останнього рядка і остан- нього стовпчика. Оскільки матриця C' має $m-1$ рядок, то до неї можна застосувати припущення індукції. У випадку $d_2\neq 0$ існують зворотні матриці P_2 і Q_2 відповідних розмірів, для яких

$$P_2C'Q_2=\begin{pmatrix} d_1' & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_2' & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d_k' & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

де $d_1',\ldots,d_{k-1}'$ – інваріантні елементи з умовою подільності кожного наступного на попередній зліва і справа, причому $d_k'\neq 0$, $k\geqslant 2$.

Таким чином,

$$\begin{pmatrix} P_2 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix} P_2C'Q_2 \begin{pmatrix} Q_2 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} d_1' & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & d_2' & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{2n}\\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & d_k' & \cdots & 0 & a_{kn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn-1} & d_2\end{pmatrix}.$$

Нехай C'' – матриця, отримана з цієї останньої матриці викресленням першого рядка і першого стовпчика. Тоді для деяких зворотних матриць P_3 і Q_3

$$P_3C''Q_3 = \begin{pmatrix} e_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_3 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & e_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

де елементи $e_2, e_3, \ldots, e_{k-1}$ – інваріантні і володіють вище згаданими властивостями подільності.

Отже,

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} PCQ \begin{pmatrix} Q_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} d_1' & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & e_r & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер можна добитись щоб d_1' був лівим і правим дільником елемента e_r, не порушивши при цьому існуючої подільності між елементами $e_2, \ldots, e_{r-1}$ (при цьому нових позначень не вводимо). Тому можна вважати, що всі елементи $d_1', e_2, \ldots, e_{r-1}$ є інваріантними лівими та правими дільниками елемента e_r. Коли ми будемо переходити від матриці

$$\mathrm{diag}(d_1', e_2, \ldots, r_{r-1})$$

до її майже інваріантної редукції, то отримані нові елементарні дільники залишаться інваріантними лівими і правими дільниками елемента e_r. Остаточно одержимо майже інваріантну діагональну редукцію цілої матриці C.

Розглянемо тепер випадок, коли $d_2 = 0$. Тоді елемент d_1 не зобов'язаний бути інваріантним. Повторивши ті самі перетворення, які ми робили у припущенні $d_2 \neq 0$, одержимо таку ж діагональну матрицю, але не можемо ще гарантувати інваріантність елемента d_1'.

Якщо матриця C' виявиться нульовою, то кінцева матриця

$$\mathrm{diag}(d_1', e_2, \ldots, e_r, 0, \ldots, 0),$$

в принципі, може бути еквівалентна матриці з одним ненульовим елементом (і тоді все доведено), або ж ця матриця не еквівалентна жодній однорядковій матриці і, звівши матрицю

$$\mathrm{diag}(d_1', e_2, \ldots, e_{r-1}, 0, \ldots, 0)$$

до відповідної майже діагональної форми (при $r \geqslant 2$), можемо вважати вже, що d_1' є інваріантним. Якщо ж $r = 2$, то ми перебуваємо в умовах бази індукції і знову можемо вважати, що d_1' є інваріантним. Випадок, коли d_1' є інваріантним, таким чином, можна одержати завжди, якщо матриця C не еквівалентна однорядковій матриці. Далі майже інваріантна форма будується так само, як і у першому випадку. Твердження доведено.

На підставі щойно доведеного твердження можна довести таку теорему.

Теорема 2. *Нехай A – кільце елементарних дільників. Припустимо, що в кільці A виконується ще умова*

$$(\forall u)(\forall v)\{(a \neq 0) \wedge (ua = 0) \wedge (va = 0) \wedge (uA + vA = A) \Rightarrow Au + Av = A\}. \quad (*)$$

Тоді кільце A є кільцем з майже інваріантними елементарними дільниками, визначеними однозначно з точністю до подібності, тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

1) Для кожного елемента $a \in A$ існує такий інваріантний елемент $b \in A$, що $AaA = bA = Ab$ (умова Дубровіна [5]).

2) Кожний лівий і правий дільник інваріантного елемента є інваріантним.

Доведення. Припустимо, що A – кільце з майже інваріантними елементарними дільниками, в якому виконується умова (*). Нехай a ненульовий елемент кільця A. Тоді існують такі зворотні 2×2 матриці P і $Q \in M_2(A)$, для яких

$$P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

де $e, d \in A$, причому справджується лише одна з таких можливостей: а) e – інваріантний, $d \neq 0$ і $e|_l d$ і $e|_r d$; б) e – довільний і $d = 0$; в) $e = 0$, $d = 0$.

Насправді, випадок в) неможливий, оскільки $a \neq 0$.

У випадку а) з рівності (1) випливає, що $AaA \subseteq AeA + AdA \subseteq eA = Ae$. Оскільки $e \in AaA$, то $AaA = eA = Ae$ і цим самим умова Дубровіна для таких a виконується.

Покажемо, що випадок б) при наших припущеннях також неможливий. Справді, $AaA = AcA$ і запишемо матриці P та Q^{-1} в явному вигляді:

$$P = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \eta \end{pmatrix},$$

Випишемо співвідношення, які випливають з рівності

$$P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & o \end{pmatrix} Q^{-1},$$

що є наслідком рівності (1):

$$xa = c\alpha,\ ya = c\beta,\ ua = 0,\ va = 0.$$

Оскільки (u, v) є рядком зворотної матриці P, то $uA + vA = A$. Згідно з умовою $(*)$ $Au + Av = A$, а тому можна вибрати такі елементи α і $\beta \in A$, що $\alpha u + \beta v = 1$. Тоді маємо такі рівності

$$0 = \alpha ua + \beta va = (\alpha u + \beta v)a = 1 \cdot a = a.$$

Отже, ми одержуємо суперечність з припущенням $a \neq 0$. Робимо тепер остаточний висновок: умова Дубровіна виконується для всіх елементів a кільця A.

Перейдемо до доведення умови 2). Нехай b лівий і правий дільник інваріантного елемента $a \in A$. Припустимо, що b не є інваріантним. Оскільки a є інваріантним, то b є повним дільником елемента a. Звідси випливає, що матриця

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

перебуває в нормальній майже інваріантній діагональній формі. Але ця матриця еквівалентна деякій своїй майже інваріантній діагональній редукції

$$\begin{pmatrix} b' & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix}.$$

Завдяки тому, що над кільцем A елементарні дільники визначаються з точністю до подібності, одержуємо $A/bA \cong A/b'A$. Але інваріантний елемент b' не може бути подібним до неінваріантного елемента і умова 2) також виконується.

Навпаки, припустимо, що в кільці елементарних дільників з умовою (*) виконуються ще умови 1) та 2). Доведемо, що A є кільцем з майже інваріантними елементарними дільниками. Для цього встановимо, що кожна 2×2 матриця над A володіє майже інваріантною діагональною редукцією, оскільки згідно з твердженням 4.2., тоді кожна матриця буде володіти майже інваріантною діагональною редукцією.

Тепер можна вважати, що наша матриця має вид

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

де a є повним дільником елемента b. Оскільки $AbA \subseteq aA \cap Aa$ і існує інваріантний елемент $d \in A$, для якого $AbA = dA = Ad$, то маємо включення $dA \subseteq aA$ і $Ad \subseteq Aa$. Тому a є правим і лівим дільником інваріантного елемента d, тобто і сам є інваріантним (завдяки умові 2)). Таким чином ми довели, що матриця

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

перебуває в майже інваріантній діагональній формі. Твердження доведено.

Наслідок 3. *Область елементарних дільників є областю з майже інваріантними елементарними дільниками тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову Дубровіна і множина ненульових інваріантних елементів є насиченою мультиплікативно-замкненою множиною.*

Наслідок 4. *Область головних ідеалів є областю з майже інваріантними елементарними дільниками тоді і тільки тоді, коли кожний її ненульовий інваріантний елемент є добутком інваріантних атомів.*

Зауважимо, ще що область головних ідеалів $\mathbb{H}[x]$, де $\mathbb{H}$ - тіло кватерніонів, має елемент $x^2 + 1$, який є інваріантним, але не розкладається в добуток інваріантних атомів. Тому ця область не є областю з майже інваріантними елементарними дільниками.

Зазначимо також, що кожне просте кільце елементарних дільників є кільцем з майже інваріантними елементарними дільниками, оскільки в такому кільці немає незворотних ненульових інваріантних елементів. Над таким кільцем, кожна матриця еквівалентна матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & d & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

де d – деякий елемент з A.

Очевидно, що інваріантне кільце елементарних дільників є кільцем з майже інваріантними елементарними дільниками.

Для областей Безу можна довести аналог критерію Капланського, відомий у комутативному випадку ([1]):

Теорема 5. *Область Безу A, в якій виконується умова Дубровіна і, в якій інваріантні елементи складають насичену мультиплікативно-замкнену множину, є областю з майже інваріантними елементарними дільниками тоді і тільки тоді, коли для будь-яких елементів $a, b, c \in A$, зв'язаних співвідношенням*

$$AaA + AbA + AcA = A,$$

існують такі елементи $p, q \in A$, що

$$paA + (pb + qc)A = A.$$

Доведення. Доведемо необхідність вказаної умови. Нехай $a, b, c \in A$, такі елементи, що $AaA + AbA + AeA = A$.

Розглянемо матрицю

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

і знайдемо такі зворотні матриці

$$P = \begin{pmatrix} r & s \\ p & q \end{pmatrix}$$

та

$$Q = \begin{pmatrix} r & s \\ p & q \end{pmatrix},$$

що

$$PCQ = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

де e – інваріантний і e повним чином ділить d.

Тоді

$$AeA + AdA = AaA + AbA + AcA = A$$

і, оскільки

$$AeA \supseteq AdA,$$

то $AeA = A$. На підставі того, що e є інваріантним, звідси одержуємо $eA = A$ і $Ae = A$. Тому e – зворотній елемент. З іншого боку

$$e = pau + (pb + qc)v$$

і тому

$$paue^{-1} + (pb + qc)v^{-1} = 1,$$

що й треба було довести.

Встановимо тепер достатність зазначеної умови. Згідно з [6], [7] або [8] область A є ермітовою, а отже можна застосувати твердження 2. Згідно з цим твердженням можна обмежитись матрицею

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in A$$

і довести, що вона володіє майже інваріантною діагональною редукцією.

Нехай
$$AaA = a_1A = Aa_1, AbA = b_1A = Ab_1 \text{ і } AcA = c_1A = Ac_1.$$
Тоді
$$a_1A + b_1A + c_1A = d_1A \text{ і } Aa_1 + Ab_1 + Ac_1 = Ad_1'.$$
Але
$$d_1A = a_1A + b_1A + c_1A = AaA + AbA + AcA = Aa_1 + Ab_1 + Ac_1 = Ad_1.$$
Тому d_1 інваріантний елемент і, крім цього, маємо:
$$a = d_1a_0 = a_0'd_1 \ , \ b = d_1b_0 = b_0' = b_0'd_1 \ , \ c = d_1c_0 = c_0'd_1$$
для деяких
$$a_0, a_0', b_0, b_0', c_0, c_0' \in A.$$
Звідси одержуємо
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1a_0 & d_1b_0 \\ 0 & d_1c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_0'd_1 & b_0'd_1 \\ 0 & c_0'd_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0' & b_0' \\ 0 & c_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Тому для знаходження майже інваріантної діагональної редукції матриці C досить знайти майже інваріантну діагональну редукцію однієї з матриць
$$C' = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix} \text{ або } \begin{pmatrix} a_0' & b_0' \\ 0 & c_0' \end{pmatrix}.$$
Але
$$Aa_0A + Ab_0A + Ac_0A = A$$
і тому існують елементи p та $q \in A$, для яких
$$pa_0A = (pb_0 + qc_0)A = A.$$
Виберемо такі елементи $u, v \in A$, що
$$pa_0u = (pb_0 + qc_0)v = 1.$$
Тепер (див. [8]) доповнимо унімодулярний рядок $(p \quad q)$ до зворотної матриці P та унімодулярний стовпчик $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ до зворотньої матриці Q. Тоді одержимо
$$P\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$
Далі елементарними перетвореннями зводимо одержану матрицю до майже інваріантної діагональної форми
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

очевидним чином.

Ми бачимо, що матриця

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_1 t \end{pmatrix}$$

є майже інваріантною діагональною редукцією для матриці C. Теорему доведено.

Наступне твердження узагальнює теорему 3.1. праці [9].

Твердження 6. *Діагональна матриця над кільцем A з інваріантними елементами володіє майже інваріантною діагональною редукцією тоді і тільки тоді, коли кожний лівий (кожний правий) ідеал в A, породжений скінченною системою інваріантних елементів, є головним лівим (головним правим) ідеалом.*

Доведення проводиться за схемою, запропонованою в праці [9].

Твердження 7. *Дуо-кільце A є кільцем з майже інваріантними елементарними дільниками тоді і тільки тоді, коли кожний скінченно-зображуваний лівий A-модуль є прямою сумою циклічно-зображуваних модулів*

$$A/Ad_1, A/Ad_2, ..., A/Ad_k,$$

де $d_i | d_{i+1}$ для кожного $i = 1, ..., k-1$.

Доведення цього твердження також проводиться за схемою з праці [9].

1. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – Vol. 66, N3. – P. 464-491.
2. Cohn P.M. *Right principal Bezout domains*// J. London Math. Soc. – 1987 – Vol. 35, N2. – P. 251-262.
3. Комарницкий Н.Я. *Кольца с почти инвариантными элементарными делителями*// Международная конференция по алгебре, посвящённая памяти А.И.Мальцева (1909-1967) Тезисы сообщений. – Новосибирск. – 1989. – С.70.
4. Комарницкий Н.Я. // Кольца с почти инвариантными элементарными делителями и конечно-представимые модули // VI Симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Тезисы сообщений. – Львов. – 1990. – С.73.
5. Дубровин Н.И. *Проективный предел колец с элементарными делителями*// Матем. сб. – 1982. – Т. 119, N1. – С. 89-95.
6. Казімірський П.С., Дрогомижська М.М. *Зауваження до теорії кілець скінченно-породжених правих головних ідеалів*// Украін. мат. ж, – 1973. –Т. 25, N 5. – С.667-673.
7. Казімірський П.С., Луник Ф.П. *Дослідження з теорії елементарних дільників*// Доп. АН УРСР, - 1970. – N 1. – С.7-9.
8. Казімірський П.С., Луник Ф.П.*Доповнення прямокутньої оберненої над асоціативним кільцем матриці до оборотної*// Доп. АН УРСР. – 1972. – N 4. – С.505-506.
9. Shores T.S., Lewis W.J., Larsen M.D. // Elementary divisor rings and finitely presented modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – Vol.187, N 2. – P.231-248.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997

УДК 512.552.12

КІЛЬЦЯ З ЕЛЕМЕНТАРНОЮ РЕДУКЦІЄЮ МАТРИЦЬ І КВАЗІЕВКЛІДОВІ КІЛЬЦЯ

О.М. Романів

Romaniv O. M. Rings with elementary reduction of matrices and quasi-Euclidean rings We establish necessary and sufficient conditions under which a quasi-Euclidean ring is a ring with elementary reduction of matrices. It is proved that a semilocal Bezout ring is a ring with elementary reduction of matrices. We give a criterion for existing a solution of one matrix equation of a special type and find all such solutions.

§ 1. Основні означення та домовленості

Під кільцем R у даній праці розуміємо комутативне кільце з відмінною від нуля одиницею, а під $\mathcal{U}(R)$ — групу зворотних елементів цього кільця. Позначимо через (a,b) найбільший спільний дільник елементів a і b кільця R. Множину всіх максимальних ідеалів кільця R, які містять елемент a, позначатимемо $mspec(a)$, а радикал Джекобсона — $\mathcal{J}(R)$. Відзначимо, що термін *напівлокальність* не імплікує жодних ланцюгових умов. Кільце квадратних матриць порядку n з елементами кільця R позначимо через R_n, а *слід* і *визначник* матриці $A \in \mathrm{R}_n$ — через $\operatorname{tr} A$ і $\det A$ відповідно.

Означення 1. Під *елементарною матрицею* з елементами кільця R розуміємо квадратну матрицю одного з трьох типів [1]:

1) діагональна матриця зі зворотними елементами на головній діагоналі;
2) матриця, відмінна від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю;
3) матриця перестановки, тобто матриця, яка отримується з одиничної шляхом перестановки деяких її рядків і стовпців.

Означення 2. *Групою елементарних матриць* $\mathrm{GE}_n(R)$ назвемо групу, породжену елементарними матрицями порядку n другого типу (тобто матрицями, відмінними від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю). Через $\mathrm{SL}_n(R)$ позначимо *спеціальну лінійну групу*, тобто групу матриць порядку n, визначник яких дорівнює одиниці.

Означення 3. Говоритимемо, що матриці A і B з елементами кільця R є *елементарно еквівалентними* (у позначеннях $A \overset{e}{\sim} B$), якщо існують такі елементарні над R матриці $P_1, \ldots, P_k$, $Q_1, \ldots, Q_s$ відповідних розмірів, що

$$P_1 \cdot \ldots \cdot P_k \cdot A \cdot Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_s = B.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 13F07, 13G05, 16W60.

Означення 4. Матриця A володіє *елементарною редукцією*, якщо вона елементарно еквівалентна канонічній діагональній матриці

$$\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, 0, \dots, 0),$$

де $\varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i \supseteq R\varepsilon_{i+1}R$, $i = 1, 2, \dots, r-1$, (під діагональною розуміємо, взагалі кажучи, прямокутну матрицю, в якій поза головною діагоналлю стоять нулі).

Означення 5. Кільце R називається *кільцем з елементарною редукцією матриць*, якщо довільна матриця над ним володіє елементарною редукцією [2].

Поняття кільця з елементарною редукцією матриць було введено Б.В. Забавським і ним же була сформульована задача повного описання таких кілець [2].

Від *кільця елементарних дільників* [3] кільце з елементарною редукцією матриць відрізняється тим, що в його означенні матриці $P_1, \dots, P_k$, $Q_1, \dots, Q_s$ є елементарними. Тому зрозуміло, що кільце з елементарною редукцією матриць є кільцем елементарних дільників. Проте не будь-яке кільце елементарних дільників є кільцем з елементарною редукцією матриць. Прикладом такого кільця є кільце $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2+1)$ [1,4], яке, зокрема, є кільцем головних ідеалів, але не є квазіевклідовим.

Означення 6. Кільце R називається *елементарно головним* [4], якщо для довільних $a, b \in R$ існують $c \in R$ і матриця $M \in \mathrm{GE}_2(R)$ такі, що $(a,b)M = (c,0)$.

Означення 7. Якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують $c \in R$ і зворотна матриця $M \in \mathrm{R}_2$ такі, що $(a,b)M = (c,0)$, то кільце R називається *правим кільцем Ерміта.* Аналогічно визначається *ліве кільце Ерміта.* У комутативному випадку ці класи кілець збігаються [3].

Критерій ермітовості (див. [5, теор. 3]). Комутативне кільце R є кільцем Ерміта тоді і тільки тоді, коли для довільних $a, b \in R$ існують такі $a_0, b_0, d \in R$, що $a = a_0 d$, $b = b_0 d$ і $(a_0, b_0) = 1$.

Означення 8. Кільце R називається *кільцем Безу* [3], якщо будь-який скінченнопороджений ідеал є головним, тобто для довільних елементів $a, b \in R$ існує таке $d \in R$, що $aR + bR = dR$.

Очевидно, Ермітове кільце є кільцем Безу [3].

§2. Квазіевклідові кільця

Означення 9. Під *квазі-алгоритмом* [4], заданим на кільці R, розуміємо таку функцію φ: $R \times R \to W$ (W — деякий ординал), що для довільних $a, b \in R$ ($b \neq 0$) існують такі $q, r \in R$, для яких виконуються умови $a = bq + r \quad \text{і} \quad \varphi(b, r) < \varphi(a, b)$.

Означення 10. Кільце R називають *квазіевклідовим* [4], якщо існує деякий ординал W і квазі-алгоритм $R \times R \to W$.

Прикладами квазіевклідових кілець є евклідові кільця, кільця нормування, регулярні кільця [4].

Нагадаємо деякі необхідні факти.

Теорема 1 (див. [4 теор.8]). *Клас квазіевклідових кілець збігається з класом елементарно головних кілець.*

Теорема 2 (див. [4, теор.17]). *Нехай R — кільце і для довільного $x \in R$ анулятор* $\operatorname{Ann}(x)$ *породжується ідемпотентом. Тоді такі твердження еквівалентні:*

(i) *R є квазіевклідовим;*

(ii) *R є кільце Безу і $\mathrm{GE}_n(R) = \mathrm{SL}_n(R)$ для довільного натурального $n \geqslant 2$.*

Зауваження. Нехай $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in R_2$, де R — квазіевклідове кільце. На підставі теореми 1, кільце R є елементарно головним. Тому для елементів $x, y \in R$ існують такі $a \in R$ і елементарна матриця $M \in \mathrm{GE}_2(R)$, що $(x, y)M = (a, 0)$. Тоді
$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}.$$
Отже, над квазіевклідовим кільцем при зведенні матриць другого порядку до діагонального вигляду досить обмежитися трикутними матрицями вигляду $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ або $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Доведемо деякі допоміжні твердження.

Твердження 1. *Квазіевклідове кільце є кільцем Ерміта.*

Доведення. Достатньо зауважити, що квазіевклідове кільце є елементарно головним (теорема 1), а елементарно головне кільце є кільцем Ерміта (це випливає з означень 6 і 7).

Лема 1. *Довільна зворотна матриця над квазіевклідовим кільцем R є скінченним добутком елементарних матриць.*

Доведення. Спочатку доведемо, що довільну зворотну матрицю другого порядку над квазіевкідовим кільцем за допомогою елементарних перетворень можна звести до діагонального вигляду.

Нехай $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ — зворотна над R матриця. Тоді $(a, b) = 1$ і, оскільки квазіевклідове кільце є елементарно головним (теорема 1), то існує така матриця $Q \in \mathrm{GE}_2(R)$, що $(a, b)Q = (1, 0)$. Тому
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}.$$
Нехай $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b_1 & 1 \end{pmatrix}$, $P \in \mathrm{GE}_2(R)$. Тоді
$$P \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix},$$
що й потрібно було довести.

Отже, якщо A — довільна зворотна матриця над квазіевклідовим кільцем R, то існують такі матриці P, Q (які є скінченними добутками елементарних матриць), що
$$P \cdot A \cdot Q = F, \tag{1}$$
де F — діагональна матриця. Очевидно, матриця F є зворотною матрицею. Оскільки визначник матриці F дорівнює добутку діагональних елементів, то звідси випливає, що всі ці діагональні елементи є зворотними. Отже, F є елементарною матрицею першого типу.

З рівності (1) перейдемо до рівності $A = P^{-1} \cdot F \cdot Q^{-1}$, з якої випливає, що довільна зворотна матриця над квазіевклідовим кільцем є скінченним добутком елементарних матриць.

Твердження 2. *Квазієвклідове кільце R є кільцем з елементарною редукцією матриць, коли кожна матриця вигляду $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, де $aR + bR + cR = R$, володіє елементарною редукцією.*

Доведення. Необхідність очевидна.

Для доведення достатності припустимо, що $aR + bR + cR = dR$ і $d \notin \mathcal{U}(R)$. На підставі твердження 1 і критерію ермітовості, існують такі елементи $a_0, b_0, c_0 \in R$, що $a = a_0 d$, $b = b_0 d$, $c = c_0 d$ і $a_0 R + b_0 R + c_0 R = R$. Тому

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix},$$

де матриця $\begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix}$ володіє елементарною редукцією. Зважаючи на належність $\operatorname{diag}(d, d)$ до центру R_2, тепер легко бачити, що матриця вигляду $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ також володіє елементарною редукцією.

Індукція за розмірами матриць завершує доведення.

Теорема 3. *Нехай R — квазієвклідова область, в якій множина максимальних ідеалів є незліченною, а довільний ненульовий елемент міститься в не більше, ніж зліченній множині максимальних ідеалів. Тоді R — кільце з елементарною редукцією матриць.*

Доведення. Згідно з твердженням 2, для доведення теореми достатньо обмежитися матрицями вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

де $aR + bR + cR = R$.

Якщо $a \in \mathcal{U}(R)$, то

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \overset{e}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Отже, матриця A володіє елементарною редукцією. Нехай $a \notin \mathcal{U}(R)$, тобто множина максимальних ідеалів, які містять a, непорожня. Покладемо

$$mspec\,(a) = \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_n, \dots\}.$$

Тоді, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $b \notin \mathcal{M}_1$. Справді, якщо $b \in \mathcal{M}_1$, то $(b + c) \notin \mathcal{M}_1$, оскільки $aR + bR + cR = R$ і елементарними перетвореннями стовпців елемент b можна замінити елементом $(b+c)$). Кільце R — елементарно головне (теорема 1). Тому існує така елементарна матриця P_1, що

$$P_1 A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix},$$

де $aR + bR = a_1 R$.

Якщо $a_1 \in \mathcal{U}(R)$, то матриця $P_1 A$ володіє елементарною редукцією. Нехай $a_1 \notin \mathcal{U}(R)$ і, як і вище, вважатимемо, що $a_1 \in \mathcal{M}_2$. Тоді $b_1 \notin \mathcal{M}_2$, бо у протилежному випадку

$(b_1 + c_1) \notin \mathcal{M}_2$. Оскільки кільце R є елементарно головним, то існує така елементарна матриця Q_1, що $P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$, де $a_1R + b_1R = a_2R$.

Продовжуючи побудову, отримаємо сукупність матриць вигляду

$$P_kAQ_k = \begin{pmatrix} a_i & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

яким відповідає такий ланцюг ідеалів

$$aR \subset a_1R \subset a_2R \subset \ldots \subset a_iR \subset \ldots, \tag{2}$$

причому $a_i \notin \mathcal{M}_i$.

Позначимо $\mathcal{I} = \bigcup_i a_iR$. Припустимо, що $\mathcal{I} \neq R$. Тоді існує такий максимальний ідеал $\mathcal{M}$, що $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$. Оскільки $aR \subset \mathcal{I}$, то $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s$, де $\mathcal{M}_s \in mspec\,(a)$. Це неможливо, бо існує такий ідеал a_sR з ланцюга (2), що $a_s \notin \mathcal{M}_s$. Тому, $\mathcal{I} = R$, тобто ланцюг (2) скінченний. Отже, існують такі матриці P_n, Q_n, які є скінченними добутками елементарних матриць, що P_nAQ_n є канонічною діагональною матрицею.

Зауважимо, що в доведенні теореми 3 використані ідеї праці [11].

З теореми 3 очевидним чином випливають такі наслідки.

Наслідок 1. *Напівлокальне квазіевклідове кільце є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Наслідок 2. *Квазіевклідове кільце, в якому множина максимальних ідеалів є не більш, ніж злічення, є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Теорема 4. *Напівлокальне кільце Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Доведення. Нехай R — напівлокальне кільце Безу і елементи $a, b \in R$ такі, що $aR+bR = R$. Тоді

$$mspec\,(a) \cap mspec\,(b) = \varnothing. \tag{3}$$

Позначимо через r елемент кільця R, який належить усім максимальним ідеалам кільця R, крім максимальних ідеалів множини $mspec\,(a)$ (такий елемент r існує, оскільки кільце R напівлокальне). Очевидно,

$$mspec\,(r) \cap mspec\,(a) = \varnothing. \tag{4}$$

Розглянемо елемент $a + br \in R$. Припустимо, що $a + br \in \mathcal{M}$, де $\mathcal{M}$ — максимальний ідеал кільця R.

Можливі такі випадки:

1) $a \in \mathcal{M}$ і $b \in \mathcal{M}$ — суперечить умові (3);
2) $a \in \mathcal{M}$ і $r \in \mathcal{M}$ — суперечить умові (4).

Отже, наше припущення невірне. Тому $a + br = u \in \mathcal{U}(R)$ і

$$(a, b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} = (u, b) \overset{e}{\sim} (u, 0).$$

Як бачимо, кільце R є елементарно головним, а на підставі теореми 1, воно квазіевклідове. Тоді за наслідком 1 отримуємо, що напівлокальне кільце Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Далі розглядатимемо кільце Ерміта R, яке задовольняє таку умову.

Умова 1. *Нехай для $a, b \in R$ ($a \notin \mathcal{J}(R)$) існує таке $m \in R$, що $(b, m) = 1$ і для кожного $n \in R$ такого, що $(n, a) \neq 1$ і $(n, b) = 1$, маємо: $(n, m) \neq 1$.*

У [7, теор.2.6] доведено, що довільне кільце Ерміта R, елементи якого задовольняють умову 1, є кільцем елементарних дільників. Використаємо цей факт для доведеня теореми, у формулюванні якої умову 1 дещо перефразуємо.

Теорема 5. *Нехай R — кільце Ерміта і для будь-яких $a, b \in R$ ($b \neq 0$) існує таке $s \in R$, що $mspec\,(s) = mspec\,(a) \backslash mspec\,(b)$. Тоді R — кільце з елементарною редукцією матриць.*

Доведення. Нехай елементи $a, b \in R$ такі, що $aR + bR = R$. Очевидно,

$$mspec\,(a) \cap mspec\,(b) = \varnothing. \tag{5}$$

За умовою теореми, існує деякий елемент $r \in R$, який належить усім максимальним ідеалам кільця R, крім максимальних ідеалів множини $mspec\,(a)$. Тому $mspec\,(r) = mspec\,(0) \setminus mspec\,(a)$. Очевидно, що

$$mspec\,(r) \cap mspec\,(a) = \varnothing. \tag{6}$$

Розглянемо елемент $a + br \in R$. Припустимо, що $a + br = u \in \mathcal{M}$ ($\mathcal{M} \in mspecR$). Тоді $a \in \mathcal{M}$ і $b \in \mathcal{M}$ або $a \in \mathcal{M}$ і $r \in \mathcal{M}$, що суперечить умовам (5) або (6) відповідно. Тому $a + br \in \mathcal{U}(R)$. Звідси

$$(a, b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} = (u, b) \overset{e}{\sim} (u, 0).$$

Таким чином, дане кільце R є елементарно головним, а на підставі теореми 1 і квазіевклідовим. Оскільки кільце Ерміта, елементи якого задовольняють умову 1, є кільцем елементарних дільників, а довільна зворотна матриця над квазіевклідовим кільцем є добутком елементарних матриць, то кільце R є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Означення 11 Комутативне кільце R називається *кільцем стабільного рангу один*, якщо для довільних взаємнопростих $a, b \in R$ існує такий елемент $t \in R$, що $a + bt$ є зворотним елементом кільця R.

Зауважимо, що кільця, які задовольняють умовам теорем 4,5, є кільцями стабільного рангу один.

Теорема 6. *Кільце Ерміта стабільного рангу один є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Доведення. Нехай R — кільце стабільного рангу один. Припустимо, що $aR + bR = dR$, де $a, b, d \in R$. Тоді, згідно з критерієм ермітовості, існують такі $a_0, b_0 \in R$, що $a = a_0 d$, $b = b_0 d$. Тому

$$(a, b) = (a_0, b_0) \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Оскільки R — кільце стабільного рангу один, то для елементів a_0, b_0 існує таке $t \in R$, що $a_0 + b_0 t = u \in \mathcal{U}(R)$. Таким чином,

$$(a_0, b_0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = (u, b) \overset{e}{\sim} (u, 0).$$

Зважаючи на належність $diag(d,d)$ до центру R_2, легко бачити, що R є елементарно головним, а тому й квазіевклідовим (теорема 1). На підставі твердження 1, R є кільцем Ерміта. Кільце Ерміта стабільного рангу один є кільцем елементарних дільників [8, лема 4], а довільна зворотна матриця над квазіевклідовим кільцем є скінченним добутком елементарних матриць (лема 1). Тому отримуємо, що кільце Ерміта стабільного рангу один є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Оскільки регулярні кільця і кільця нормування є кільцями стабільного рангу один, то з теореми 6 випливають такі наслідки.

Наслідок 3. *Регулярне кільце є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Наслідок 4. *Кільце нормування є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

§3. Матричні рівняння спеціального вигляду над квазіевклідовими областями

У праці [9] Забавським Б. і Дяченко Н. одержали критерій існування розв'язку матричного рівняння спеціального типу над комутативною областю Безу. Ми сформулюємо і доведемо подібний критерій над квазіевклідовою областю і, що важливо, знайдемо ці розв'язки в явному вигляді.

Теорема 8. *Для квазіевклідової області R такі властивості еквівалентні:*
(i) R — *кільце з елементарною редукцією матриць;*
(ii) *для довільної матриці $A \in \mathrm{R}_2$, найбільший спільний дільник всіх у сукупності елементів якої дорівнює одиниці, знайдеться власний (тобто ненульовий і неодиничний) ідемпотент у правому ідеалі $A\,\mathrm{R}_2$;*
(iii) *матричне рівняння $XAX = X$ має ненульовий розв'язок, де $X, A \in \mathrm{R}_2$ і найбільший спільний дільник всіх (у сукупності) елементів матриці A дорівнює одиниці.*

Доведення. Проведемо доведення за схемою (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(i).
(i)$\Rightarrow$(ii). Нехай $aR + bR + cR = R$, де $a, b, c \in R$. Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathrm{R}_2 \,.$$

Оскільки R — кільце з елементарною редукцією матриць, то для матриці A існують такі зворотні матриці $P, Q \in \mathrm{R}_2$ (які є скінченними добутками елементарних матриць), що $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$. Тоді

$$(AQ\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P)^2 = AQ\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}PAQ\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P =$$

$$= AQ\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P = AQ\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P.$$

Легко бачити, що $AQ\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P$ – шуканий ідемпотент в ідеалі $A\,\mathrm{R}_2$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Нехай ідемпотент $E = E^2 \in AR_2$, тоді $E = AB$ (де $B \in \mathrm{R}_2$). Розглянемо добуток

$$BABABAB = (BAB)(ABAB) = (BAB)AB = B(ABAB) = BAB.$$

Звідси, поклавши $X = BAB$, отримаємо рівність $XAX = X$. Отже, рівняння $XAX = X$ має ненульовий розв'язок.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Нехай рівняння $XAX = X$ має ненульовий розв'язок. Тоді, домноживши його зліва на A, отримаємо $AXAX = AX$. Звідси випливає, що будь-який правий ідеал AR_2 містить власний ідемпотент.

(ii)$\Rightarrow$(i). Розглянемо такі $a, b, c \in R$, що $aR + bR + cR = R$. Нехай $\begin{pmatrix} r & k \\ s & t \end{pmatrix} \in \mathrm{R}_2$ і $F = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & k \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar+bs & ak+bt \\ cs & ct \end{pmatrix}$ — власний ідемпотент. У праці [10, лема 1] було доведено, що матриця $M \in \mathrm{R}_2$, де R — область цілісності, є власним ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли $\det M = 0$ і $\operatorname{tr} M = 1$. Завдяки цьому факту, із рівностей $\operatorname{tr} F = 1$ і $\det F = 0$ отримуються рівності $ar + bs + ct = 1$ і $sk = rt$ $(rtR \subseteq sR)$.

Припустимо, що $dR = rR + sR$ і $r = dp$ і $s = dq$, де $p, q \in R$, $(p, q) = 1$, $p, q \in R$.

Тоді з рівності $sk = rt$ випливає, що $dpt = dqk$, а тому $pt = qk$. Отже, існує деяке $m \in R$, для якого $t = qm$.

Покладемо

$$P = \begin{pmatrix} d & m \\ -cq & ap+bq \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} p & -bd-cm \\ q & ad \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що $\det P = \det Q = 1$. На підставі теореми 2, спеціальна лінійна група $\mathrm{SL}_2(R)$ збігається з групою елементарних матриць $\mathrm{GE}_2(R)$. Тому P і Q — зворотні матриці, які є добутками елементарних над R матриць.

Розглянемо добуток

$$PAQ = \begin{pmatrix} d & m \\ -cq & ap+bq \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -bd-cm \\ q & ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ac \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що матриця A, а, отже, і довільна матриця над R, володіє елементарною редукцією. Тому R — кільце з елементарною редукцією матриць.

Теорему доведено. Залишилось записати розв'язок матричного рівняння $XAX = X$ в явному вигляді. Вже доведено, що $X = BAB$, де AB — власний ідемпотент у правому ідеалі AR_2. Тому

$$X = \begin{pmatrix} r & k \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & k \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & k \\ s & t \end{pmatrix},$$

де $ar + bs + ct = 1$ і $sk = rt$ $(rtR \subseteq sR)$.

Перейдемо до розгляду групи $\mathrm{SL}_2(R)$, де R — кільце з елементарною редукцією матриць. Згідно з теоремою 2, R є такою областю Безу, що $\mathrm{GE}_2(R) = \mathrm{SL}_2(R)$. Тому довільну матрицю другого порядку над кільцем R, визначник якої дорівнює одиниці, можна зобразити у вигляді скінченного добутку матриць вигляду $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Справді, група $\mathrm{GE}_2(R)$ породжується матрицями вигляду $F(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, де $a \in R$ [4], як це видно з таких рівностей:

$$F(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GE}_2(R),$$

$$F^{-1}(a) = F(0)F(-a)F(0) \in \mathrm{GE}_2(R),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (F(0))^3 F(a), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = F(-a)(F(0))^3.$$

Як наслідки можна сформулювати ще ряд тверджень, доведення яких тепер вже очевидні.

Теорема 8. *Група* $\mathrm{SL}_2(R)$, *де* R — *кільце нормування, породжується матрицями вигляду* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ *і* $\begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, *де* $a, b \in R$.

Теорема 9. *Група* $\mathrm{SL}_2(R)$, *де* R — *регулярне кільце, породжується матрицями вигляду* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ *і* $\begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, *де* $a, b \in R$.

Теорема 10. *Група* $\mathrm{SL}_2(R)$, *де* R — *напівлокальне кільце Безу, породжується матрицями вигляду* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ *і* $\begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, *де* $a, b \in R$.

1. Cohn P. *On the structure of the GL_2 of a ring*// I.H.E.S. – 1996. – Vol 30. – P. 365 – 413.
2. Zabavsky B. *Ring with elementary reduction matrix*// Ring Theory Conf. (Miskols, Hungary). – 1996. –P. 14.
3. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1966. – Vol. 66. – P.464–491.
4. Bougaut B. *Anneaux Quasi-Euclidiens*// These de docteur troisieme cycle. – 1976. – 67 p.
5. Gillman L., Henriksen M. *Some remarks about elementary divisor rings*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – Vol. 82. – P. 362 – 365.
6. Кон П. Свободные кольца и их связи. – М.: Мир. – 1975.
7. Larsen M., Lewis W., Schores T. *Elementary divisor rings and finitely presented modules* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – Vol. 187. – P.231 – 248.
8. Brewer J., Katz D., Ullery W. *Pole assignability in polynomial rings, power series rings, and Prufer domains*// J. of Algebra. – 1987. – Vol. 106. – P. 265 – 286.
9. Забавский Б., Дяченко Н. *Критерий существования решения матричного уравнения специального вида над коммутативной областю Безу*// VI симп. по теор. ком. алгебр и модулей. Львов, 11-13 октября. 1990. – С. 53.
10. Дубровин Н.И. *Проективный предел с элементарными делителями*// Мат. сб. – 1982. – Vol. 119. – P. 89 – 95.
11. Забавский Б.В., Комарницкий Н.Я. *Дистрибутивные области элементарными делителями*// Укр. мат. журн. – 1990. – Т.42, N7, – С. 1000-1004.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997

УДК 512.544+519.46

ПРО НАПІВЛОКАЛЬНІ КІЛЬЦЯ З РОЗВ'ЯЗНОЮ ПРИЄДНАНОЮ ГРУПОЮ

Ю.Б. Іщук

Ishchuk Yu.B. On semilocal rings with solvable adjoint group. The semilocal rings with the solvable adjoint group and an Engel unipotent subgroup were characterized. Equivalance of several conditions was established for the adjoint group of the right Artinian ring.

Нехай R – асоціативне кільце з одиницею 1. Множина всіх оборотніх елементів R стосовно операції $a \circ b = a + b + ab$, де $a, b \in R$, утворює групу R°, яка називається приєднаною групою кільця R. Тоді $R^\circ \cong \mathcal{U}(R)$, де $\mathcal{U}(R)$ – група одиниць кільця R.

Кільце R називається напівлокальним, якщо фактор-кільце $R/\mathcal{J}(R)$ праве артінове.

Нагадаємо [1], що група G, яка володіє зростаючим нормальним рядом

$$1 = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \ldots \leqslant H_\alpha \leqslant H_{\alpha+1} \leqslant \ldots \leqslant H_\gamma = G,$$

де $H_\alpha \lhd G$, $H_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} H_\beta$, якщо α – граничне трансфінітне число, $H_{\alpha+1}/H_\alpha$ – максимальна локально нільпотентна нормальна підгрупа фактор-групи G/H_α, називається радикальною. Як відомо [2], існує локально розв'язна група, яка не є радикальною.

Введемо позначення:

R^+ – адитивна група кільця R;

$R(G)$ – множина правих Енгелевих елементів групи G;

$\mathcal{J}(R)$ – радикал Джекобсона кільця R;

$M_n(q)$ – повне кільце матриць порядку n з елементами із поля $GF(q)$;

$GL_n(q)$ – повна лінійна група матриць порядку n з елементами із поля $GF(q)$.

З теореми 1 [3] випливає така лема.

Лема. *Нехай R – напівлокальне кільце. Якщо приєднана група R° локально розв'язна (відповідно радикальна), то $R/\mathcal{J}(R) = T_1 \oplus \ldots \oplus T_s (s \in \mathbb{N})$ і кожне підкільце T_i ($i = 1, \ldots, s$) володіє однією з таких властивостей:*

1) T_i – поле;

2) $T_i \cong M_2(2)$;

3) $T_i \cong M_2(3)$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 13H99.

Теорема. *Нехай R – напівлокальне кільце і всі елементи групи $\mathcal{J}(R)^\circ$ є правими енгелевими. Тоді рівносильними є такі умови:*
1) R° – радикальна (відповідно локально розв'язна) група;
2) R володіє таким ідеалом I, що:
(а) $|R^+ : I^+| < \infty$;
(б) $I = B \oplus C$, де $B = 0$ або $B = \sum_{i=1}^{s} B_i$ – пряма сума локальних кілець B_i і $C = \mathcal{J}(C)$ або $C/\mathcal{J}(C) \cong GF(2) \oplus \ldots \oplus GF(2)$, причому групи B_i°, $\mathcal{J}(C)^\circ$ радикальні (відповідно локально розв'язні);
(в) $R = I$ або $R/I \cong \sum_{i=1}^{k} F_i$, де $F_i \cong M_2(2)$, або $F_i \cong M_2(3)$.

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2). На підставі леми

$$R/\mathcal{J}(R) = T_1 \oplus \ldots \oplus T_m \oplus K_1 \oplus \ldots \oplus K_s,$$

де T_i – поле ($i = 1, \ldots, m$), а K_j ізоморфне $M_2(2)$ або $M_2(3)$ ($j = 1, \ldots, s$). Позначимо через I повний прообраз $T_1 \oplus \ldots \oplus T_m$ в кільці R. Очевидно, що $|R^+ : I^+| < \infty$ і I – ідеал кільця R. Крім того, I – напівлокальне кільце і $\mathcal{J}(I) = \mathcal{J}(R)$.

Розглянемо підкільце I. Якщо $T_i \cong GF(2)$ для всіх i ($i = 1, \ldots, v$), то $\mathcal{U}(I) = 1 + \mathcal{J}(I)$ і $S = 0$. Припустимо, що $T_1 \neq GF(2)$. Нехай e – такий нетривіальний ідемпотент підкільця I, що $\pi(e)$ – одиниця поля T_1, де $\pi : I \to I/\mathcal{J}(I)$ – канонічний епіморфізм, $B = eIe$. Тоді

$$B/\mathcal{J}(B) \cong \pi(B) = T_1,$$

а тому B – локальне кільце з одиницею e. Оскільки $|\ (B/\mathcal{J}(B))^+\ | \neq 2$, то $\mathcal{U}(B)$ має елемент a такий, що $a - e \in \mathcal{U}(B)$. Якщо b – обернений до a елемент із $\mathcal{U}(B)$, то $(a-e) \circ (b-e) = 0$, і тому $a - e \in I^\circ$.

Нехай $I^+ = B^+ \dot{+} X \dot{+} Y \dot{+} C$ – двосторонній пірсовський розклад адитивної групи I^+. Не зменшуючи загальності міркувань, припустимо, що $\mathcal{J}(I)^m \neq 0$ і $\mathcal{J}(I)^{m+1} = 0$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. Тоді

$$[x, a-e] = x \circ (a-e) \circ (-x) \circ (b-e) = (e-a)x,$$

$$[x, \underbrace{a-e, \ldots, a-e}_{n}] = (e-a)^n x$$

для кожного ($n \in \mathbb{N}$). Оскільки $\mathcal{J}(I)^\circ \subseteq R(I^\circ)$, то $(e-a)^k \in \mathcal{U}(B)$ і тому $ex = x$. Отже, $X^2 = Y^2 = 0$ та $I = B \oplus C$. Аналогічно до теореми 2.2 [4] звідси випливає твердження теореми.

2) $\Rightarrow$ 1). Якщо $R = I$, то твердження випливає з умови (б). У випадку $R \neq I$ група R° є розширенням радикальної (відповідно локально розв'язної) групи I° за допомогою скінченної розв'язної групи $H = \prod_{i=1}^{k} F_i^\circ$, а отже, R° радикальна (відповідно локально розв'язна). Теорему доведено.

Наслідок. *Нехай R – праве артінове кільце. Тоді такі умови є рівносильними:*
(1) R° *– радикальна група ;*
(2) R° *– локально розв'язна група ;*
(3) R° *– розв'язна група ;*
(4) R *володіє таким ідеалом* I*, що:*
(а) $|R^+ : I^+| < \infty$*;*
(б) $I = B \oplus C$*, де* $B = 0$ *або* $B = \sum\limits_{i=0}^{k} B_i$ *– пряма сума правих артінових локальних кілець, і* $C = \mathcal{J}(C)$ *або* $C/\mathcal{J}(C) \cong GF(2) \oplus \ldots \oplus GF(2)$*;*
(в) $B_i/\mathcal{J}(B_i)$ *– поле* $(i = 1, \ldots , k)$*;*
(г) $\mathcal{J}(C)$ *– нільпотентний ідеал;*
(д) $R = I$ *або* $R/I \cong \sum\limits_{i=1}^{m} F_i$*, де* $F_i \cong M_2(2)$*, або* $F_i \cong M_2(3)$*.*

Даний наслідок узагальнює деякі результати праць [5–6]. Його доведення випливає з теореми і з того, що приєднана група нільпотентного кільця є нільпотентною.

1. Плоткин Б.И. *Радикальные группы* // Мат. сборник. – 1955. – Т.37(79),N3. – С.507–526.
2. Hall Ph. *On non-stricly simple groups* // Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1963. – 59. – P.531–533.
3. Eldridge K.E. *On ring structures determined by groups* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol.23,N3. – P.472–477.
4. Ратинов А.В. *Полупримарные кольца с локально нильпотентной присоединенной группой* // Депонирована в ВИНИТИ, N1904–79 Деп. – Москва, 1979. – 21с.
5. Groza G. *Artinian rings having a nilpotent group of units* // J. Algebra. – 1989. – Vol.121,N2. – P.253–262.
6. Ishchuk Yu.B. *Semiperfect rings with periodic locally nilpotent group of units* // Matematychni Studii. – 1997. – Vol.7,N2. – P.125–128.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997

УДК 512.64

ПРО ІНВОЛЮЦІЇ В КІЛЬЦЯХ МАТРИЦЬ

В.Р.Зеліско, Л.Р.Сенькусь

Zelisko V.R., Sen'kus L.R. On involutions in the rings of matrices. The existence of some type of involutions in the rings of matrices is obtained. The problem of simmetrizability and factorizability of the direct product of matrices under these involutions is investigated.

Нехай K-комутативне кільце з інволюцією, визначеною як така операція ∇, що для довільних елементів $a,\ b \in K$ виконуються рівності:

$$(a+b)^{\nabla} = a^{\nabla} + b^{\nabla}, \quad (ab)^{\nabla} = a^{\nabla} b^{\nabla}, \quad (a^{\nabla})^{\nabla} = a.$$

На кільце матриць $M_n(K)$ інволюція ∇ переноситься таким чином [1]:

$$A^{\nabla} = (a_{ij})^{\nabla} = (a_{ji}^{\nabla}). \tag{1}$$

Матрицю A називають симетричною, якщо $A^{\nabla} = A$.

Відомо, [2], що в кільці $M_2(K)$ існує симплектична інволюція, визначена так:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{2}$$

У цій статті поняття симплектичної інволюції поширено на випадок матриць порядку 2^n, у кільці матриць парного порядку введено інволюцію мішаного типу, доведено теореми про взаємозв'язок між симетричними матрицями і їх прямим добутком при цих інволюціях.

Визначимо в кільці матриць $M_{2^n}(K)$ індукцією за n операцію $*$. При $n = 1$ операція $*$ – – симплектична інволюція (2). Зобразимо 2^n-матрицю A у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

і покладемо

$$A^* = \begin{pmatrix} A_4^* & -A_2^* \\ -A_3^* & A_1^* \end{pmatrix}, \tag{4}$$

де операція $*$ в кільці $M_{2^{n-1}}(K)$ знову визначається згідно (3) і (4), A_i – матриці порядку 2^{n-2}.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 15A23.

Теорема 1. *Операція $*$, визначена в (4), є симплектичною інволюцією в кільці $M_{2^n}(K)$.*

Доведення. Індукція за n. При $n = 1$ (2) є симплектичною інволюцією. Припустимо, що операція (4) є симплектичною інволюцією у випадку $A_i \in M_{2^{n-1}}(K)$, $i = \overline{1,4}$. Тоді для матриць $A, B \in M_{2^n}(K)$ одержимо :

$$(A+B)^* = \begin{pmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ A_3+B_3 & A_4+B_4 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} (A_4+B_4)^* & -(A_2+B_2)^* \\ -(A_3+B_3)^* & (A_1+B_1)^* \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} A_4^* & -A_2^* \\ -A_3^* & A_1^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_4^* & -B_2^* \\ -B_3^* & B_1^* \end{pmatrix} = A^* + B^*;$$
$$(AB)^* = \left(\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \right)^* = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{pmatrix}^* =$$
$$= \begin{pmatrix} (A_3B_2 + A_4B_4)^* & -(A_1B_2 + A_2B_4)^* \\ -(A_3B_1 + A_4B_3)^* & (A_1B_1 + A_2B_3)^* \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} B_2^*A_3^* + B_4^*A_4^* & -(B_2^*A_1^* + B_4^*A_2^*) \\ -(B_1^*A_3^* + B_3^*A_4^*) & B_1^*A_1^* + B_3^*A_2^* \end{pmatrix};$$
$$B^*A^* = \begin{pmatrix} B_4^* & -B_2^* \\ -B_3^* & B_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_4^* & -A_2^* \\ -A_3^* & A_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_4^*A_4^* + B_2^*A_3^* & -(B_4^*A_2^* + B_2^*A_1^*) \\ -(B_3^*A_4^* + B_1^*A_3^*) & B_3^*A_2^* + B_1^*A_1^* \end{pmatrix}.$$

Отже, $(AB)^* = B^*A^*$. Аналогічно перевіряється умова $(A^*)^* = A$. Справді,

$$(A^*)^* = \begin{pmatrix} A_4^* & -A_2^* \\ -A_3^* & A_1^* \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} (A_1^*)^* & (A_2^*)^* \\ (A_3^*)^* & (A_4^*)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = A.$$

Теорему доведено.

Нехай в кільці матриць $M_{2n}(K)$ визначено операцію $\#$ таким чином:

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}^{\#} = \begin{pmatrix} A_4^{\nabla} & -A_2^{\nabla} \\ -A_3^{\nabla} & A_1^{\nabla} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

де A_i^{∇} визначені в (1).

Теорема 2. *Операція $\#$ є інволюцією в кільці $M_{2n}(K)$.*

Доведення. Досить показати, що

$$(A+B)^{\#} = A^{\#} + B^{\#}, \quad (AB)^{\#} = B^{\#}A^{\#}, \quad (A^{\#})^{\#}.$$

Перевіримо другу умову:

$$(AB)^{\#} = \left(\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \right)^{\#} = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{pmatrix}^{\#} =$$

$$= \begin{pmatrix} (A_3B_2 + A_4B_4)^{\nabla} & -(A_1B_2 + A_2B_4)^{\nabla} \\ -(A_3B_1 + A_4B_3)^{\nabla} & (A_1B_1 + A_2B_3)^{\nabla} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B_2^\nabla A_3^\nabla + B_4^\nabla A_4^\nabla & -(B_2^\nabla A_1^\nabla + B_4^\nabla A_2^\nabla) \\ -(B_1^\nabla A_3^\nabla + B_3^\nabla A_4^\nabla) & B_1^\nabla A_1^\nabla + B_3^\nabla A_2^\nabla \end{pmatrix}.$$

$$B^{\#} A^{\#} = \begin{pmatrix} B_4^\nabla & -B_2^\nabla \\ -B_3^\nabla & B_1^\nabla \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_4^\nabla & -A_2^\nabla \\ -A_3^\nabla & A_1^\nabla \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B_4^\nabla A_4^\nabla + B_2^\nabla A_3^\nabla & -(B_4^\nabla A_2^\nabla + B_2^\nabla A_1^\nabla) \\ -(B_3^\nabla A_4^\nabla + B_1^\nabla A_3^\nabla) & B_3^\nabla A_2^\nabla + B_1^\nabla A_1^\nabla \end{pmatrix} = (AB)^{\#}.$$

Аналогічно перевіряються дві інші умови.

Теорему доведено.

Зауважимо, що встановлена інволюція $\#$ є узагальненням розглянутої у праці [3] інволюції у випадку, коли інволюція ∇ в кільці K є тотожною.

Розглянемо питання про симетричність прямого (кронекерівського) добутку матриць A, B, визначеного як матрицю $A \otimes B = (a_{ij}B) \in M_{n^2}(K)$, [4], де K– довільне комутативне кільце з одиницею.

Лема. *Для довільної матриці $A \in M_n(K)$ і одиничної матриці E порядку n справджуються рівності $(E \otimes A)^\nabla = E \otimes A^\nabla$, $(A \otimes E)^\nabla = A^\nabla \otimes E$ для кожної інволюції ∇ вигляду (1).*

Доведення. За означенням прямого добутку:

$$E \otimes A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & A \end{pmatrix}.$$

$$(E \otimes A)^\nabla = \begin{pmatrix} A & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & A \end{pmatrix}^\nabla = \begin{pmatrix} A^\nabla & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & A^\nabla \end{pmatrix} = E \otimes A^\nabla.$$

Аналогічно

$$(A \otimes E)^\nabla = \begin{pmatrix} a_{11}E & \dots & a_{1m}E \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}E & \dots & a_{nm}E \end{pmatrix}^\nabla = \begin{pmatrix} a_{11}^\nabla E^\nabla & \dots & a_{n1}^\nabla E^\nabla \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m}^\nabla E^\nabla & \dots & a_{nm}^\nabla E^\nabla \end{pmatrix}.$$

Оскільки $E^\nabla = E$, то

$$A \otimes E = \begin{pmatrix} a_{11}^\nabla E & \dots & a_{n1}^\nabla E \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m}^\nabla E & \dots & a_{nm}^\nabla E \end{pmatrix} = A^\nabla \otimes E.$$

Теорема 3. *Прямий добуток симетричних матриць над кільцем з інволюцією (1) є симетричною матрицею.*

Доведення. Нехай $A^\nabla = A, B^\nabla = B$. Тоді, використовуючи властивість прямого добутку [4], властивість інволюції [1] та попередню лему, дістанемо

$$(A \otimes B)^\nabla = ((A \otimes E)(E \otimes B))^\nabla =$$

$$= (E \otimes B)^\nabla (A \otimes E)^\nabla = (E \otimes B^\nabla)(A^\nabla \otimes E) = A^\nabla \otimes B^\nabla = A \otimes B.$$

Теорему доведено.

З доведення теореми 3 видно, що твердження цієї теореми справедливе і для симплектичної інволюції, визначеної рівністю (4), але не виконується для визначеної теоремою 2 інволюції $\#$.

Кажуть, що симетрична матриця $A \in M_n(K)$ є факторизованою, якщо існують такі матриці $B, C \in M_n(K)$, що

$$A = BCB^\nabla, \ C = C^\nabla.$$

Як наслідок з теореми 3 дістаємо твердження

Твердження. *Якщо A_1, A_2 – факторизовані симетричні матриці, то $A_1 \otimes A_2$ – факторизована.*

Доведення. Використовуючи властивості прямого добутку [4] і теорему 3, одержимо:

$$A_1 \otimes A_2 = B_1 C_1 {B_1}^\nabla \otimes B_2 C_2 {B_2}^\nabla = (B_1 \otimes B_2)(C_1 \otimes C_2)({B_1}_1^\nabla \otimes B_2^\nabla) =$$

$$= (B_1 \otimes B_2)(C_1 \otimes C_2)(B_1 \otimes B_2)^\nabla.$$

Теорема 4. *Нехай A і B деякі матриці з тотожною інволюцією ∇, перенесеною на кільце матриць рівністю : $A^\nabla = A^\top$, для яких $(A \otimes B)^\nabla = A \otimes B$. Тоді $A^\nabla = A$, $B^\nabla = B$.*

Доведення. .Оскільки $(A \otimes B)^\nabla = A \otimes B$, то прирівнюючи елементи в перших n рядках і перших n стовпцях матриць $A \otimes B$ і $(A \otimes B)^\nabla$, дістанемо що $B = B^\nabla$.

Аналогічно, прирівнюючи елементи в перших n рядках і останніх n стовпцях цих матриць, отримаємо, що $A = A^\nabla$.

Теорему доведено.

Зауважимо, що для симплектичної інволюції твердження теореми 4 взагалі кажучи невірне.

1. Любачевский Б.Д.*Факторизация симметричных матриц с элементами из кольца с инволюцией.1* // Сибирск. матем. журнал. – 1973. – Т.14, N.2. – С. 337–350.
2. Скорняков А.А. Общая алгебра. Т.1. -М.: Наука, 1990.
3. Drensky J., Veselin S., Giambruno A..*On the $*$–polynomial identities of minimal degree for matrices with involution.* // Boll.Un. Mat. Ital. – 1995. – A(7)9, N.3. – C. 471–482.
4. Ланкастер П. Теория матриц. -М., Наука, 1978.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997

УДК 512.64

ПРО ФАКТОРИЗАЦІЇ СИМЕТРИЧНИХ МАТРИЧНИХ ДВОЧЛЕНІВ

М.І.Кучма

Kuchma M.I. On factorizations of symmetric matrix binomials. Necessary and sufficient conditions of the factorization existence of a symmetric matrix binomials over a polynomial ring with involution are found.

У цій статті розглянуто питання про існування факторизацій комплексних симетричних матричних двочленів.

Нехай $K = \mathbb{C}[x]$ – кільце многочленів з інволюцією ∇, визначеною у праці [1]:

$$\left(\sum a_i x^i\right)^\nabla = \sum a_i^*(-x)^i, \tag{α}$$

$$\left(\sum a_i x^i\right)^\nabla = \sum a_i(-x)^i, \tag{β}$$

$$\left(\sum a_i x^i\right)^\nabla = \sum a_i x^i \tag{γ}$$

і перенесеною на кільце матриць $M_n(K)$ таким чином:

$$A(x)^\nabla = \|a_{ij}(x)\|^\nabla = \|a_{ji}(x)^\nabla\|.$$

Матрицю $A(x)$ називатимемо симетричною, якщо $A(x)^\nabla = A(x)$. Факторизацією матриці $A(x)$ з кільця $M_n(K)$ називають її зображення у вигляді

$$A(x) = B(x)CB(x)^\nabla, \tag{1}$$

де $C = C^\nabla$ – деяка неособлива матриця, матричний многочлен $B(x)$ унітальний (старший коефіцієнт – одинична матриця).

Легко бачити, що матричний двочлен $A(x) = Ex^m - A$, де матриця $A \in M_n(\mathbb{C})$ і m парне число, є симетричним тоді і тільки тоді, коли матриця A є ермітовою при інволюції (α) і симетричною при інволюціях (β) і (γ). Надалі вважатимемо, що m – парне число.

Лема 1. *Нехай матриця $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\det A \neq 0$, є симетричною і m – парне число. Тоді існує симетрична матриця $B \in M_n(\mathbb{C})$ така, що $B^m = A$.*

Доведення. Довільна симетрична матриця A ортогонально подібна до симетричної матриці [4]:

$$A = Q\widetilde{S}Q^T = Q\{\lambda_1 E_1 + S_1, \ldots, \lambda_u E_u + S_u\}Q^T,$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 15A23.

де клітки $S_j, j = 1, \ldots, u$, визначаються у такий спосіб:

$$S_j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & & & 0 \\ & \cdot & & \cdot & & & & & \\ 1 & & \cdot & & \cdot & & & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot & & \cdot & & 1 \\ & & & & & \cdot & & \cdot & \\ 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & & 1 & & 0 \\ & & & & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot & & \cdot & & -1 \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ 1 & & \cdot & & \cdot & & & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot & & & & & \\ 0 & \cdot & -1 & & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Знайдемо матрицю U таку, що $U^m = \widetilde{S}$. Зважаючи на вигляд матриці $\widetilde{S}$, матриця U буде мати квазідіагональний вигляд [4]:

$$U = \{ \sqrt[m]{\lambda_1 E_1 + S_1},\ \sqrt[m]{\lambda_2 E_2 + S_2}, \ldots,\ \sqrt[m]{\lambda_u E_u + S_u} \},$$

де матриця $\sqrt[m]{\lambda_j E_j + S_j}$ визначається за допомогою ряду:

$$\sqrt[m]{\lambda_j E_j + S_j} = \lambda^{1/m} E_j + \frac{1}{2 \cdot 1!}\frac{1}{m}\lambda^{1/m-1} S_j + \frac{1}{2 \cdot 2!}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\lambda^{1/m-2} S_j^2 + \ldots \qquad (3)$$

Як видно з (3), матриця U є симетричною, оскільки матриці S_j, $j = 1, \ldots, u$, є симетричними. Тоді

$$A = Q\widetilde{S}Q^T = QU^mQ^T = QUQ^T \cdot \ldots \cdot QUQ^T = B^m,$$

де матриця $B = QUQ^T$. Легко бачити, що матриця B є симетричною і $\det B \neq 0$, оскільки матриця Q є ортогональною і $\det A \neq 0$.

Наслідок. *Нехай виконуються умови леми 1. Тоді існує кососиметрична матриця $B \in M_n(\mathbb{C})$ парного порядку така, що $B^m = A$.*

Доведення. Зважаючи на те, що квадрат кососиметричної матриці є симетричною матрицею, тобто $B^2 = C$, де $C = C^T$, маємо що $C^{m/2} = B^m = A$. Неособливість матриці B випливає із парності порядку матриці B і неособливості матриці A.

Зауваження. *Якщо $A \in M_n(\mathbb{C})$ є ермітовою невід'ємно визначеною матрицею, тоді існує єдина невід'ємно визначена ермітова матриця B така, що $B^m = A$ [2].*

Теорема 1. *Для симетричного матричного двочлена $A(x) = Ex^m - A$, де A– невироджена матриця, існує факторизація (1), у якій $B(x)$ має вигляд*

$$B(x) = (Ex - B)(Ex - \varepsilon B)\ldots(Ex - \varepsilon^{m/2-1}B), \qquad (4)$$

де ε – первісний корінь і матриця B – корінь m-го степеня відповідно з одиниці і матриці A.

Доведення. Згідно з результатами праці [3] симетричний матричний двочлен $A(x) = Ex^m - A$ при $\det A \neq 0$ розкладається на лінійні множники

$$A(x) = (Ex - B)(Ex - \varepsilon B)\ldots(Ex - \varepsilon^{m-1}B). \qquad (5)$$

Враховуючи, що для ε – первісного кореня m–го степеня з одиниці – справджуються рівності

$$\varepsilon^k = -\varepsilon^{m/2+k}, \quad k = 0, 1, ..., m/2, \tag{6}$$

отримаємо

$$\begin{aligned} A(x) &= (Ex - B)(Ex - \varepsilon B)...(Ex - \varepsilon^{m/2-1}B)(Ex + B)(Ex + \varepsilon B)...(Ex + \varepsilon^{m/2-1}B) = \\ &= (Ex - B)\dots(Ex - \varepsilon^{m/2-1}B)C(Ex - \varepsilon^{m/2-1}B)^{\nabla}\dots(Ex - B)^{\nabla}, \end{aligned} \tag{7}$$

де матриця $C = \mathrm{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$. Розклад (7) є факторизацією вигляду (1), оскільки матриця B є симетричною і кососиметричною відповідно при інволюціях (β) і (γ) та ермітовою при інволюції (α) згідно з лемою 1, наслідком та зауваженням.

Наслідок. *Факторизація (1) при інволюції (α) можлива лише при $m = 2$.*

Доведення. З рівності (7) видно, що при дії інволюції (α) первісний корінь ε повинен залишатися дійсним. Це можливо, коли ε є первісним коренем 2-го степеня з одиниці.

Для симетричного матричного двочлена $A(x) = Ex^m - A$, де матриця A – особлива, необхідні і достатні умови факторизації вигляду (1) сформулюємо в термінах теорії елементарних дільників [4].

Теорема 2. *Для симетричного матричного двочлена $A(x) = Ex^m - A$ існує факторизація (1), у якій $B(x)$ має вигляд (4) тоді і тільки тоді, коли система елементарних дільників матриці A, що відповідає нульовому характеристичному числу, складається лише із підсистем, які містять або елементарні дільники тільки першого степеня, або m елементарних дільників, показники яких або рівні, або відрізняються на одиницю.*

Доведення. Довільна комплексна симетрична матриця A ортогонально подібна симетричній матриці [4]:

$$Q^T A Q = \widetilde{S},$$

де $\widetilde{S} = \lambda_1 E^{(p_1)} + S^{(p_1)}, \lambda_2 E^{(p_2)} + S^{(p_2)}, \dots, \lambda_u E^{(p_u)} + S^{(p_u)}$, клітки $S^{(p)}$ мають вигляд (2).

Щоб матричний двочлен $Ex^m - A$ міг бути зображений у вигляді добутку лінійних множників необхідно і достатньо, щоб матричний двочлен $Ex^m - S$, де $S = \{S^{(p_1)}, \dots, S^{(p_t)}\}$, можна було зобразити у вигляді добутку лінійних множників.

Знайдемо таку симетричну (ермітову, кососиметричну) матрицю U, що $U^m = S$. Існування матриці U, згідно з результатами праці [3], передбачає, щоб система елементарних дільників матриці S складалася лише із підсистем, які містять або елементарні дільники тільки першого степеня, або m елементарних дільників, показники яких або рівні, або відрізняються на одиницю. За теоремою 1 для $A(x) = Ex^m - A$ існує факторизація при інволюції (β) $((\alpha), (\gamma))$.

З теореми 2 випливає наслідок аналогічний до наслідку з теореми 1.

Дослідимо питання про факторизацію вигляду (1) симетричного матричного двочлена $A(x) = Ex^m - A$, коли множник $B(x)$ є матричним двочленом степеня $m/2$.

Теорема 3. *Для* $A(x) = Ex^m - A$, *де* $A(x) = A(x)^\nabla$, *існує факторизація (1), у якій* $B(x)$ *є матричним двочленом степеня* $m/2$.

Доведення. Розглянемо розклад на лінійні множники (5) симетричного матричного двочлена $A(x) = Ex^m - A$ при $\det A \neq 0$:

$$A(x) = (Ex - B)(Ex - \varepsilon B) \dots (Ex - \varepsilon^{m-1} B)$$

Згрупувавши відповідні множники $Ex - \varepsilon^i B$, де $i = 0, \dots, m-1$, за підгрупою, породженою елементом ε^2, отримаємо:

$$A(x) = (Ex - B)(Ex - \varepsilon^2 B) \dots (Ex - \varepsilon^{m-2} B)(Ex - \varepsilon B)(Ex - \varepsilon^3 B) \dots (Ex - \varepsilon^{m-1} B) = \\ = (Ex^{m/2} - B^{m/2})(Ex - \varepsilon B) \dots (Ex - \varepsilon^{m-1} B).$$

Оскільки $A(x)$ є матричним двочленом, то переконуємось, що

$$(Ex - \varepsilon B)(Ex - \varepsilon^3 B) \dots (Ex - \varepsilon^{m-1} B) = Ex^{m/2} + B^{m/2}.$$

Тому

$$A(x) = (Ex^{m/2} - B^{m/2})(Ex^{m/2} + B^{m/2}) = (Ex^{m/2} - B^{m/2}) C (Ex^{m/2} - B^{m/2})^\nabla, \quad (8)$$

де матриця $C = \operatorname{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$. Для симетричного матричного двочлена $A(x)$ існує факторизація вигляду (8) на підставі леми 1, наслідку з леми 1 та зауваження.

Розглянемо питання про факторизацію вигляду (1) симетричного матричного двочлена $A(x) = Ex^m - A$, який розкладається в добуток унітальних нерозкладних матричних двочленів:

$$A(x) = (Ex^{m_1} - B_1)(Ex^{m_2} - B_2) \dots (Ex^{m_r} - B_r), \quad \sum_{i=1}^{r} m_i = m \quad (9)$$

Лема 2. *Добуток матричних двочленів (9) є знову матричним двочленом вигляду*

$$A(x) = (Ex^s - B)(Ex^s - \varepsilon B) \dots (Ex^s - \varepsilon^{m/s-1} B), \quad (10)$$

якщо він задовольняє такі умови:

(i) всі степені m_i *матричних двочленів з (9) дорівнюють* s;

(ii) матриці B_i *мають вигляд* $B_i = \varepsilon^k B$, $i = 1, \dots, r$, *де* ε *– первісний корінь* m/s*-го степеня з одиниці.*

Доведення. Справді, якщо всі степені m_i у рівності (9) дорівнюють s і матриці B_i, вигляду $B_i = \varepsilon^k B$, $i = 1, \dots, r$, де ε – первісний корінь m/s- го степеня з одиниці, то $A(x)$ буде матричним двочленом вигляду (10).

Дослідимо умови факторизації симетричного матричного двочлена $A(x)$ вигляду (10), для якого m/s – парне число.

Теорема 4. *Для симетричного матричного двочлена $A(x) = Ex^m - A$, де $A-$ нільпотентна матриця, існує факторизація вигляду (1), у якій множник $B(x)$ розкладається в добуток нерозкладних матричних двочленів тоді і тільки тоді, коли система елементарних дільників матриці A, що відповідає нульовому характеристичному числу, складається лише із підсистем, які містять або елементарні дільники тільки першого степеня, або m/s елементарних дільників, показники степенів яких або рівні, або відрізняються на одиницю.*

Доведення. Нехай матричний двочлен $A(x) = Ex^m - A$, де A – нільпотентна матриця, розкладається в добуток унітальних нерозкладних двочленів вигляду

$$A(x) = (Ex^s - B)(Ex^s - \varepsilon B)\dots(Ex^s - \varepsilon^{m/s-1}B),$$

де ε – первісний корінь і матриця B – корінь m/s-го степеня відповідно з одиниці і матриці A.

Зважаючи на рівності (6), попередня рівність перепишеться так:

$$\begin{aligned} A(x) = (Ex^s - B)(Ex^s - \varepsilon B)\dots(Ex^s - \varepsilon^{m/(2s)-1}B)(Ex^s + B)\times \\ \times(Ex^s + \varepsilon B)\dots(Ex^s + \varepsilon^{m/(2s)-1}B) = (Ex^s - B)\dots(Ex^s - \varepsilon^{m/(2s)-1}B)C\times \\ \times(Ex^s - \varepsilon^{m/(2s)-1}B)^{\nabla}\dots(Ex^s - B)^{\nabla}, \end{aligned} \qquad (11)$$

де матриця $C = \mathrm{diag}(\pm1, \dots, \pm1)$.

Зауважимо, що розклад (11) є факторизацією вигляду (1) тоді і тільки тоді, коли виконуються вказані умови на систему елементарних дільників матриці A.

Відзначимо, що факторизація (11) при інволюції (α) можлива лише для $m = 2$.

1. Любачевский Б.Д. *Факторизация симметричных матриц с элементами из кольца с инволюцией. Ч.1* // Сибирск. матем. журнал. – 1973. – Т. 14, N 2. – С.337–356.
2. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. - М.: Мир, 1989. – 655 с.
3. Казімірський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. - К.: Наукова думка, – 1981. – 224 с.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1988. – 552 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997

УДК 512.58+515.12

ON LIFTING OF CONTRAVARIANT FUNCTORS ONTO THE EILENBERG-MOORE CATEGORY.

V. S. Levyts'ka

Levyts'ka V.S. On lifting of contravariant functors onto the Eilenberg-Moore category. We consider the problem of lifting contravariant functors onto the category Eilenberg-Moore of a monad. The results are applied to the monad in the category of Tychonov spaces generated by the second iteration of the functor C_p (the space of functions in the topology of pointwise convergence).

1°. A monad on a category $\mathcal{C}$ is a triple $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$, where $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ is a covariant functor and $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to T$, $\mu : T^2 \to T$ are natural transformations satisfying the conditions: $\mu \circ \eta T = \mu \circ T\eta = 1_T$ and $\mu \circ \mu T = \mu \circ T\mu$.

A couple (X, ξ), where $\xi : TX \to X$ is a morphism, is called a $\mathbb{T}$-algebra iff $\xi \circ \eta X = 1_X$ and $\xi \circ T\xi = \xi \circ \mu X$. A morphism $f : X \to X'$ is called a morphism of a $\mathbb{T}$-algebra (X, ξ) into a $\mathbb{T}$-algebra (X', ξ') if $f \circ \xi = \xi' \circ Tf$. $\mathbb{T}$-algebras and their morphisms form a category which is usually denoted by $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ (the Eilenberg-Moore category). We can define the forgetful functor $U^{\mathbb{T}} : \mathcal{C}^{\mathbb{T}} \to \mathcal{C}$ by $U^{\mathbb{T}}(X, \xi) = X$, $U^{\mathbb{T}}(f) = f$. (For details see [1].)

A lifting of functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ on the category $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ is a functor $\overline{F} : \mathcal{C}^{\mathbb{T}} \to \mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ such that $U^{\mathbb{T}}\overline{F} = FU^{\mathbb{T}}$

It is easy to see that the couple $(TX, \mu X)$ is a $\mathbb{T}$-algebra (the free $\mathbb{T}$-algebra).

In [5] M. Zarichnyi considered the following problem. Suppose $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ is a covariant functor; is there a covariant functor $\overline{F} : \mathcal{C}^{\mathbb{T}} \to \mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ such that $U^{\mathbb{T}}\overline{F} = FU^{\mathbb{T}}$ (the problem of lifting of functor onto the category of $\mathbb{T}$-algebras)?

In this paper we consider the corresponding problem for a contravariant functor F.

2°. In what follows we fix a monad $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ on a category $\mathcal{C}$.

The following result is a counterpart of a result of Zarichnyi [5].

Proposition 1. *There exists a bijective correspondence between the lifting of a contravariant functor F onto the category $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ and the natural transformations $\delta : TFT \to F$ satisfying the conditions: (i) $\delta \circ \eta FT = F\eta$; (ii) $\delta \circ \mu FT = \delta \circ T\delta T \circ T^2 F\mu$.*

Proof. Suppose there is a natural transformations $\delta : TFT \to F$ such that conditions (i) and (ii) are satisfied. For every $(X, \xi) \in |\mathcal{C}^{\mathbb{T}}|$ put $\overline{F}(X, \xi) = (FX, \overline{\xi})$, where $\overline{\xi} = \delta X \circ TF\xi$ and for every $f \in \mathcal{C}^{\mathbb{T}}(X, Y)$ put $\overline{F}f = Ff$.

It is easy to see that $FU^{\mathbb{T}} = U^{\mathbb{T}}\overline{F}$. We have to check that $(FX, \overline{\xi})$ is a $\mathbb{T}$-algebra:

1991 *Mathematics Subject Classification.* 18C20, 54B30, 54C40.

$\overline{\xi} \circ \eta FX = \delta X \circ TF\xi \circ \eta FX = \delta X \circ \eta FTX \circ F\xi = F\eta X \circ F\xi = F(\xi \circ \eta X) = F(1_X) = 1_{FX}$.

Besides,

$\overline{\xi} \circ \mu FX = \delta X \circ TF\xi \circ \mu FX = \delta X \circ \mu FTX \circ T^2F\xi = \delta X \circ T\delta TX \circ T^2F\mu X \circ T^2F\xi = \delta X \circ T\delta TX \circ T^2F(\xi \circ \mu X) = \delta X \circ T\delta TX \circ T^2F(\xi \circ T\xi) = \delta X \circ T\delta TX \circ T^2FT\xi \circ T^2F\xi = \delta X \circ TF\xi \circ T\delta X \circ T^2F\xi = \overline{\xi} \circ T\overline{\xi}$.

Denote by f a morphism of a $\mathbb{T}$-algebra (X, ξ) into a $\mathbb{T}$-algebra (X', ξ'). Show that $\overline{F}f$ is a morphism of the $\mathbb{T}$-algebra $(FX', \overline{\xi}')$ into the $\mathbb{T}$-algebra $(FX, \overline{\xi})$:

$\overline{\xi} \circ TFf = \delta X \circ TF\xi \circ TFf = \delta X \circ TF(f \circ \xi) = \delta X \circ TF(\xi' \circ Tf) = \delta X \circ TFTf \circ TF\xi' = Ff \circ \delta X' \circ TF\xi' = Ff \circ \overline{\xi}'$.

It is easy to see that $\overline{F}(g \circ f) = \overline{F}f \circ \overline{F}g$.

Summing up we see that $\overline{F}$ is a lifting F contravariant endofunctor on the category $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$.

On the other hand, suppose $\overline{F} : \mathcal{C}^{\mathbb{T}} \to \mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ is a lifting of F onto $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$. Since $(TX, \mu X)$ is a free $\mathbb{T}$-algebra, we see that $\overline{F}(TX, \mu X) = (FTX, \overline{\mu}X)$ is a $\mathbb{T}$-algebra.

Put $\delta = F\eta \circ \overline{\mu} : TFT \to F$.

Show that $\delta = (\delta X)$ is a natural transformation from TFT to F. Given $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, we obtain

$\delta X \circ TFTf = F\eta X \circ \overline{\mu}X \circ TFTf = F\eta X \circ FTf \circ \overline{\mu}Y = F(Tf \circ \eta X) \circ \overline{\mu}Y = F(\eta Y \circ f) \circ \overline{\mu}Y = Ff \circ F\eta Y \circ \overline{\mu}Y = Ff \circ \delta Y$.

Show that (i) holds. We have

$\delta X \circ \eta FTX = F\eta X \circ \overline{\mu}X \circ \eta FTX = F\eta X$.

Finally, we have to check (ii):

$\delta X \circ T\delta TX \circ T^2F\mu X = F\eta X \circ \overline{\mu}X \circ TF\eta TX \circ T\overline{\mu}TX \circ T^2F\mu X = F\eta X \circ \overline{\mu}X \circ TF\eta TX \circ TF\mu X \circ T\overline{\mu}X = F\eta X \circ \overline{\mu}X \circ TF(\mu X \circ \eta TX) \circ T\overline{\mu}X = F\eta X \circ \overline{\mu}X \circ T\overline{\mu}X = F\eta X \circ \overline{\mu}X \circ \mu FTX = \delta X \circ \mu FTX$.

Show that the above correspondence is a bijection. Given a natural transformation $\delta = (\delta X)$ satisfying (i) and (ii) consider the lifting $\overline{F}$ defined by $\overline{F}(X, \xi) = (FX, \delta X \circ TF\xi)$, $\overline{F}f = Ff$. Then $\overline{F}$ determines the natural transformation $\hat{\delta} = (\hat{\delta}X)$, $\hat{\delta}X = F\eta X \circ \overline{\mu}X$ and we have $\hat{\delta}X = F\eta X \circ \overline{\mu}X = F\eta X \circ \delta TX \circ TF\mu X = \delta X \circ TFT\eta X \circ TF\mu X = = \delta X \circ TF(\mu X \circ T\eta X) = \delta X$.

Conversely, given a lifting $\overline{F}$ of F onto the category $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$, consider the natural transformation $\delta = (\delta X)$ defined by $\delta X = F\eta X \circ \overline{\mu}X$, $X \in |\mathcal{C}|$. The natural transformation δ determines the lifting $\hat{F}$ of F onto $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ by the formula $\hat{F}(TX, \mu X) = (FTX, \delta TX \circ TF\mu X)$.

We have

$\hat{F}(TX, \mu X) = (FTX, \delta TX \circ TF\mu X) = (FTX, F\eta TX \circ \overline{\mu}TX \circ TF\mu X) = (FTX, F\eta TX \circ F\mu X \circ \overline{\mu}X) = (FTX, \overline{\mu}X) = \overline{F}(TX, \mu X)$.

Let $(X, \xi) \in |\mathcal{C}^{\mathbb{T}}|$. Since ξ is a morphism of a $\mathbb{T}$-algebra $(TX, \mu X)$ into the $\mathbb{T}$-algebra (X, ξ), we see that $\hat{F}\xi = F\xi$ is a morphism of the $\mathbb{T}$-algebra $\hat{F}(X, \xi) = (FX, u)$ into the $\mathbb{T}$-algebra $\hat{F}(TX, \mu X) = \overline{F}(TX, \mu X) = (FTX, \overline{\mu}X)$. Thus, $F\xi \circ u = \overline{\mu}X \circ TF\xi$,

$F\eta X \circ F\xi \circ u = F\eta X \circ \overline{\mu}X \circ TF\xi$,

and we obtain $u = F\eta X \circ \overline{\mu}X \circ TF\xi$.

Thus, $\hat{F}(X, \xi) = (FX, F\eta X \circ \overline{\mu}X \circ TF\xi) = (FX, \delta X \circ TF\xi) = \overline{F}(X, \xi)$.

We see that any lifting of a contravariant functor onto $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ is completely determined by its values onto the free algebras.

Remark. From the proof of Proposition 1 we see that a bijective correspondence between lifting $\overline{F}$ of F onto $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ and natural transformations δ satisfying (i) and (ii) can be given by:

given δ, we set $\overline{F}(X, \xi) = (FX, \delta X \circ TF\xi)$ for $(X, \xi) \in |\mathcal{C}^{\mathbb{T}}|$;

given $\overline{F}$ we set $\delta = F\eta \circ \overline{\mu}$.

Recall that $\mathbb{T}$ is said to be projective [4] provided there exists a natural transformation $\pi : T \to 1$ (projection) such that $\pi \circ \eta = 1$ and $\pi \circ \mu = \pi \circ \pi T = \pi \circ T\pi$. The following is a counterpart of a result of Zarichnyi.

Proposition 2. *For any contravariant functor F and any projective monad $\mathbb{T}$ there exists a lifting of F onto the category $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$.*

Proof. Put $\delta = F\eta \circ \pi FT$ (here π denotes the projection), then
$\delta \circ \eta FT = F\eta \circ \pi FT \circ \eta FT = F\eta$.
Besides,
$\delta \circ T\delta T \circ T^2F\mu = F\eta \circ \pi FT \circ TF\eta T \circ T\pi FT^2 \circ T^2F\mu = F\eta \circ \pi FT \circ TF\eta T \circ T(\pi FT^2 \circ$ $\circ TF\mu) = F\eta \circ \pi FT \circ TF\eta T \circ TF\mu \circ T\pi FT = F\eta \circ \pi FT \circ T\pi FT = F\eta \circ \pi FT \circ \mu FT = \delta \circ \mu FT$.

3°. Suppose $C : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ is a contravariant functor such that there exists a natural transformation $\eta : 1 \to C^2$ satisfying the property: $C\eta \circ \eta C = 1_C$. Put $T = C^2$ and define the natural transformation $\mu : T^2 = C^4 \to C^2 = T$ by the formula: $\mu = C\eta C$.
Remark that the triple $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ is a monad on the category $\mathcal{C}$ (see [2]).

Proposition 3. *The natural transformation $\delta = C\eta \circ C^3\eta : TCT = C^5 \to C$ satisfies conditions (i) and (ii) from Proposition 1.*

Proof. We have
$C\eta \circ C^3\eta \circ \eta C^3 = C\eta \circ \eta C \circ C\eta = C\eta$.
To prove (ii), we see that
$C\eta \circ C^3\eta \circ C^3\eta C^2 \circ C^5\eta C^2 \circ C^6\eta C = C\eta \circ C^3\eta \circ C^3(C^2\eta C^2 \circ \eta C^2) \circ C^6\eta C = C\eta \circ C^3\eta \circ$ $\circ C^3(\eta C^4 \circ \eta C^2) \circ C^6\eta C = C\eta \circ C^3\eta \circ C^3\eta C^2 \circ C^3\eta C^4 \circ C^6\eta C = C\eta \circ C^3\eta \circ C^3\eta C^2 \circ C^4\eta C \circ$ $\circ C^3\eta C^2 = C\eta \circ C^3\eta \circ C^3(C\eta C \circ \eta C^2) \circ C^3\eta C^2 = C\eta \circ C^3\eta \circ C^3\eta C^2 = C(C^2\eta \circ \eta) \circ C^3\eta C^2 =$ $= C(\eta C^2 \circ \eta) \circ C^3\eta C^2 = C\eta \circ C\eta C^2 \circ C^3\eta C^2 = C\eta \circ C(C^2\eta C^2 \circ \eta C^2) = C\eta \circ C(\eta C^4 \circ \eta C^2) =$ $= C\eta \circ C\eta C^2 \circ C\eta C^4 = C(\eta C^2 \circ \eta) \circ C\eta C^4 = C(C^2\eta \circ \eta) \circ C\eta C^4 = C\eta \circ C^3\eta \circ C\eta C^4$.

Let $Tych$ denote the category of Tychonov spaces and their continuous maps. For a Tychonov space X we denote by C_pX the space of real-valued functions on X endowed by the topology of pointwise convergence. This construction determines a contravariant functor in $Tych$: for a map $f : X \to Y$ we have $C_pf(\varphi) = \varphi \circ f$, $\varphi \in C_pY$.
It is well-known that there exists a natural transformation $\eta : 1_{Tych} \to C_pC_p = C_p^2$.
It is defined by the condition:
$\eta X(x)(\varphi) = \varphi(x)$, where $x \in X$, $\varphi \in C_pX$.
It is known that $C_p\eta \circ \eta C_p = 1_{C_p}$ (see [2]). We see that the functor $T_p = C_p^2$ determines a monad on the category $Tych$ (see [3]).

Corollary. *The contravariant functor C_p has a lifting onto the category $Tych^{\mathbb{T}}$.*

1. Barr M., Wells Ch. Toposes, triples and theories. – Berlin, Springer-Verlag. – 1985.
2. Levyts'ka V. *On extension of contravariant functors onto the Kleisli category* // Математичні студії. – 1998. – Т. 9, N 2. – С. 125-129.
3. Pikhurko O.B., Zarichnyi M.M. *On lifting of functors to the Eilenberg - Moore category of the triple generated by the functor C_pC_p* // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, N9. – С. 1290–1292.
4. Vinárek J. *On extensions of functors to the Kleisli category* // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1977. – Vol. 18, N2. – P. 319–327.
5. Zarichnyi M.M. Topology of functors and monads in the category of compacta. – Kiev, Institute of System Investigations. – 1993.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997

УДК 515.544

ON GROUPS WITH NILPOTENT QUOTIENTS WITH RESPECT TO INFINITE NORMAL SUBGROUPS

O. V. TURASH

Turash O.V. On groups with nilpotent quotients with respect to infinite normal subgroups. We characterize Černikov groups whose quotients by infinite normal subgroups are nilpotent of the class $\leqslant c$.

Last time, one can notice an increasing interest to studying the structure of groups via investigating the properties of their quotients. In many papers groups with some restrictions on the system of all quotients by infinite normal subgroups are considered. In particular, in [5] Kalashnikova describes the locally soluble groups with abelian quotients by infinite normal subgroups.

In this paper we characterize Černikov groups whose quotients by infinite normal subgroups are nilpotent of the class $\leqslant c$.

All the notations are standard and can be found in [6]. Let us remark only that c is a non-negative integer, $\zeta(G)$ the center of the group G, $\mathbb{C}_{p^\infty}$ the quasicyclic p-group, $C_G(H)$ the centralizer of a subgroup H in G.

An infinite group G is defined to be an N_cQI-group if for every infinite normal subgroup H the quotient-group G/H is nilpotent of the class $\leqslant c$. For an N_cQI-group G by $I(G)$ denote the intersection of all infinite normal subgroups of G. If $I(G) = \langle 1 \rangle$, then, by Remak's Theorem, G is nilpotent of the class $\leqslant c$. So, further we assume that $I(G) \neq \langle 1 \rangle$. Let H be a normal in G subgroup of $I(G)$, $H \neq I(G)$. Clearly, H is finite.

An infinite normal subgroup L of a group A is said to be A-quasifinite if L satisfies the following two conditions:

1) every proper normal in A subgroup of L is finite;
2) L coincides with the union of all its proper finite normal in A subgroups.

Therefore, either all normal subgroups of G are finite or G is quasifinite, or $I(G)$ contains a finite normal in G subgroup B such that $I(G)/B$ is an infinite G-principal quotient.

Lemma 1. *Let G be an N_cQI-group, H its infinite normal subgroup. If H has an infinite family $\mathcal{G}$ of infinite normal in G subgroups such that $\cap\mathcal{G} = \langle 1 \rangle$, then G is nilpotent of the nilpotency class $\leqslant c$.*

Proof. If $L \in \mathcal{G}$, then the quotient G/L is nilpotent of the class $\leqslant c$. By Remak's Theorem, G is nilpotent of the class $\leqslant c$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 20E34, 20F18, 20E99.

Corollary 1.1. *Let G be an N_cQI-group, H its infinite abelian normal subgroup of finite rank. If $\cap_{n\in\mathbb{N}}H^n = \langle 1\rangle$, then G is nilpotent of the class $\leqslant c$.*

Corollary 1.2. *Let G be an N_cQI-group. If G is either non-nilpotent or nilpotent of the class $> c$, then its center $\zeta(G)$ is a periodic subgroup.*

Lemma 2. *Let G be either non-nilpotent or nilpotent of the class $> c$. Then its center $\zeta(G)$ contains a quasicyclic p-subgroup of an finite index, whenever $\zeta(G)$ is infinite.*

Proof. By Corollary 1.2 the center $\zeta(G)$ of G is periodic. Suppose that $\zeta(G)$ contains a subgroup $A = \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, $|\Lambda| = \infty$, with $A_\lambda \neq \langle 1\rangle$ for all $\lambda \in \Lambda$. Then for some infinite subsets Λ_1 and Λ_2 in Λ with $\Lambda_1 \sqcup \Lambda_2 = \Lambda$ the subgroups $B_1 = \prod_{\lambda\in\Lambda_1} A_\lambda$, $B_2 = \prod_{\lambda\in\Lambda_2} A_\lambda$ are infinite with $B_1 \cap B_2 = \langle 1\rangle$. Therefore, the quotients G/B_1 and G/B_2 are nilpotent of the class $\leqslant c$. Thus, by Remak's theorem the group G is nilpotent of the class $\leqslant c$.

Hence, the center $\zeta(G)$ does not contain subgroups which can be decomposed into an infinite direct product of nontrivial subgroups. Then $|\pi(\zeta(G))| < \infty$. Since the center $\zeta(G)$ is infinite, there exists a prime number p such that a Sylov p-subgroup P of $\zeta(G)$ is infinite. The subgroup $\Omega_1(P)$ is elementary abelian, thus, it is finite. Hence, P is a Černikov subgroup [2]. Let D be the divisible subgroup of P. The subgroup D is quasicyclic. Indeed, otherwise D contains an isomorphic to $\mathbb{C}_{p^\infty} \times \mathbb{C}_{p^\infty}$ subgroup $C_1 \times C_2$. Since C_i is infinite, the quotient G/C_i is nilpotent of the class $\leqslant c$ $(i = 1, 2)$. By Remak's Theorem, the group G is nilpotent of the class $\leqslant c$. Contradiction.

Let $q \in \pi(\zeta(G))$, $q \neq p$, and let Q be a Sylov q-subgroup of $\zeta(G)$. If $|Q| < \infty$, then applying Remak's Theorem, we obtain that G is nilpotent of the class $\leqslant c$. Therefore,the Sylov p'-subgroup of $\zeta(G)$ is finite. Hence $|\zeta(G) : D|$ is finite. Lemma is proved.

Theorem 1. *Let G be a nilpotent group of the class $> c$. If G is a Černikov group, then G is N_cQI-group iff it satisfies the following conditions:*
1) $\zeta(G) = D \times F$ for the quasicyclic p-group D (p is a prime number) and some finite group F;
2) $\gamma_{c+1}(G)$ is a finite subgroup of D;
3) the quotient $G/\zeta(G)$ is finite.

Proof. ($\Rightarrow$) Since G is a nilpotent Černikov group, the quotient $G/\zeta(G)$ is finite.

Therefore, $|\zeta(G)| = \infty$, by Lemma 2, the center $\zeta(G)$ contains a subgroup $D \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ (p is a prime number) for which $|\zeta(G) : D| < \infty$. Then $\zeta(G) = D \times F$ for some finite subgroup F. Since $|G/\zeta(G)| < \infty$, by Shur's Theorem, the derived subgroup $[G, G]$ is finite. Hence, $\gamma_{c+1}(G)$ is also finite. Hence, G/D is nilpotent of the class $\leqslant c$, because D is infinite. Thus, $\gamma_{c+1}(G) \leqslant D$.

($\Leftarrow$) Suppose G satisfies conditions (1)–(3), and H is an infinite normal subgroup of G. Since $|G : D| < \infty$, the intersection $H \cap D$ is infinite. Therefore, $D \leqslant H$. Then G/H is nilpotent of the class $\leqslant c$, because $\gamma_{c+1}(G) \leqslant D$. Theorem is proved.

Theorem 2. *Suppose group G is not nilpotent. If G is a Černikov group, then G is an N_cQI-group, iff it satisfies the following conditions:*
1) for any divisible subgroup D of G the quotient $G/C_G(D)$ is a finite cyclic group;
2) every infinite normal in G subgroup L of D coincides with D (in particular, D is a p-group for some prime p);
3) the quotient G/D is nilpotent of the class $\leqslant c$;

4) $\gamma_{c+1}(G) = D$.

Proof. ($\Rightarrow$) Consider a minimal normal in G divisible subgroup D_1 of D. Suppose that $D \neq D_1$. Then there exists a normal in G divisible subgroup D_2 such that $D = D_1 \cdot D_2$ and $|D_1 \cap D_2| < \infty$ [1]. In particular, D_2 is an infinite normal subgroup of G. Therefore, the quotient G/D_2 is nilpotent of the class $\leqslant c$. By Remak's Theorem, $G/(D_1 \cap D_2)$ is a nilpotent group of the class $\leqslant c$. Thus, the group γ_{c+1} is finite. In particular, γ_{c+1} is an FC-group.

Let $D(\gamma_{c+1}(G))$ be a normal in G divisible part of $\gamma_{c+1}(G)$. Then $D(\gamma_{c+1}(G)) \leqslant \zeta(\gamma_{c+1}(G))$ [4]. Since G is an N_cQI-group, the quotient $\gamma_{c+1}(G)/D(\gamma_{c+1}(G))$ is nilpotent of the class $\leqslant c$. Hence, $\gamma_{c+1}(G)$ is nilpotent, and therefore, G is also nilpotent, a contradiction. Hence, we proved the equality $D = D_1$ and condition (2). Since G is an N_cQI-group, the quotient G/D is finite nilpotent of the class $\leqslant c$. We obtain condition (3). Condition (2) and Lemma 3.1 of [3] imply condition (1). Since G/D is nilpotent of the class $\leqslant c$, we have $\gamma_{c+1} \leqslant D$. Supposing $\gamma_{c+1}(G) \neq D$, by (2) we obtain that $|\gamma_{c+1}(G)| < \infty$. But, as above, is this case G is nilpotent. Hence, $\gamma_{c+1}(G) = d$ and condition (4) holds.

($\Leftarrow$) Let G satisfy (1)–(4). Arguing as in the proof of Theorem 1, we easy by obtain that every infinite normal subgroup of G contains D. Since $D = \gamma_{c+1}(G)$, the group G is an N_cQI-group. Theorem is proved.

1. Newman M.F. *On a class of metabelian group* // Proc. London Math. Soc. – 1960. – (3) 10. - P. 354–364.
2. Newman M.F. *On a class of nilpotent group* // Proc. London Math. Soc. – 1960. – (3) 10. - P. 365–375.
3. Robinson D. J. S., Wilson J.S. *Soluble groups with many polycyclic quotients* // Proc. London Math. Soc. – 1984. – (3) 48. – P.193–229.
4. Курдаченко Л.А., Пылаев В.В. // О группах с минимаксными фактор-группами // Укр.матем.ж. – 1990. – Т.42, N 5. – С.620–625.
5. Калашникова Н.В. *Группы с некоторыми ограничениями на фактор-группы.* – К., 1995. – 31с. – Деп. в ГНТБ Украины 12.10.95. N 2263 - Ук 95.
6. Robinson D.J.S. A course in the theory of group. – New York e.a.: Springer. – 1982.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997

УДК 512.544

ON HEREDITARY RADICALS OF TORSION-FREE LOCALLY NILPOTENT GROUPS

O.D. Artemovych

Artemovych O.D. On hereditary radicals of torsion-free locally nilpotent groups. We studied the hereditary radicals of torsion-free locally nilpotent groups. It was proved that any hyperabelian torsion-free locally nilpotent (respectively torsion-free Baer) group G has only the trivial hereditary proper radical (in the sence of Kurosh). Any Baer (in particular, a Fitting) torsion-free group G has only the trivial hereditary proper radical (in the sence of Plotkin). Moreover, the Baer radical $\mathcal{B}G$ (respectively the Fitting radical $\mathcal{F}G$) of G is isolated in a torsion-free locally nilpotent group G.

0. Let $\mathfrak{X}$ be an abstractive group theoretical property. A group G (respectively subgroup H of G) is said to be an $\mathfrak{X}$-group (respectively $\mathfrak{X}$-subgroup) if it has the property $\mathfrak{X}$.

Throughout this paper $\mathfrak{N}$ be a class of groups closed under homomorphic images and normal subgroups. A mapping $\mathfrak{X} : \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{N}$ is called a radical (in the sense of Kurosh) if it assing to each group G of $\mathfrak{N}$ the subgroup $\mathfrak{X}(G)$ which contains all normal $\mathfrak{X}$-subgroups of G and satisfies the following properties:

$(R1)$ $\mathfrak{X}(\mathfrak{X}(G)) = \mathfrak{X}(G)$ for each group $G \in \mathfrak{N}$;

$(R2)$ if $\phi : G \longrightarrow F$ is an epimorphism of groups G, F of $\mathfrak{N}$ then $\phi(\mathfrak{X}(G)) \leqslant \mathfrak{X}(F)$;

$(R3)$ $\mathfrak{X}(G/\mathfrak{X}(G)) = E$ is the identity group for each $G \in \mathfrak{N}$.

The subgroup $\mathfrak{X}(G)$ of G is a radical of G (in the sense of Kurosh) if it satisfies the properties $(R1)-(R3)$. Moreover, say that the radical $\mathfrak{X}(G)$ of G is hereditary if

$(R4)$ $H \leqslant \mathfrak{X}(G)$ implies $\mathfrak{X}(H) = H$ for each normal subgroup H of G, $G \in \mathfrak{N}$.

Recall that a subgroup H of torsion-free group G which coincides with their isolator

$$I_G(H) = \{x \in G \mid \exists n \in \mathbb{N} : \ x^n \in H\}$$

in G is said to be isolated in G.

Recall the following theorem, which we'll use later (see A.G. Kurosh [1], Yu.M. Ryabuhin [2], S.E. Dickson [3]; and Proposition 2.17 [4]).

1991 *Mathematics Subject Classification.* 20F19, 20E25, 20D25.

Proposition 0.1. *A radical $\mathfrak{X}$ is hereditary (in the sense of Kurosh) in the class of all Abelian groups $\mathfrak{A}$ if and only if it is one of the following types:*

(1) *R, i.e. $R(G) = G$ for each $G \in \mathfrak{A}$;*
(2) *R_π, i.e. for each $G \in \mathfrak{A}$ $R_\pi(G)$ is the maximal π-subgroup of G where π is some set of primes;*
(3) *R_0, i.e. $R_0(G) = E$ for each $G \in \mathfrak{A}$.*

Most of our notation is standard; in particular we refer to [4–7]. Throughout this paper we shall use the following notation: $\mathcal{B}(G)$ denotes the Baer radical of G , $\mathcal{F}(G)$ the Fitting radical of G.

1. In this section we shall study the hereditary radicals (in the sense of Kurosh) of torsion-free locally nilpotent groups.

The following theorem is an extension of Proposition 0.1 to the class of all hypercentral groups $\mathfrak{H}$.

Theorem 1.1. *A radical $\mathfrak{X}$ is hereditary (in the sense of Kurosh) in the class of all hypercentral groups $\mathfrak{H}$ if and only if it is of one of the following types:*

(1) *R_0, i.e. $R_0(G) = E$ for each $G \in \mathfrak{H}$;*
(2) *R_π, i.e. $R_\pi(G)$ is the maximal π-subgroup of G for each $G \in \mathfrak{H}$ where π is some set of primes;*
(3) *R, i.e. $R(G) = G$ for each $G \in \mathfrak{H}$.*

Proof. Suppose that $\mathfrak{X}(G)$ is any nontrivial hereditary radical of hypercentral group G, $Z = Z(G)$ is the centre of G. Then $Z \cap \mathfrak{X}(G) \neq E$ [5, Proposition 1.6] and therefore $Z \cap \mathfrak{X}(G) = \mathfrak{X}(Z)$. Without restricting generality, we can assume that $\mathfrak{X}(Z) \neq Z$. Then in view of Proposition 0.1 $\mathfrak{X}(Z)$ is the maximal π-subgroup of Z for some set π of primes. It is easy to see that $\mathfrak{X}(G)$ is a periodic group. If further $\mathfrak{X}(G) = \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$ is a decomposition in a direct product of Sylow π-subgroup $\mathfrak{X}_1$ and π'-subgroup $\mathfrak{X}_2$ then from $\mathfrak{X}_2 \cap Z = E$ in view of Proposition 1.6 [5] we obtain that $\mathfrak{X}_2 = E$. Finally, since $\mathfrak{X}(Z)$ is the maximal π-subgroup of Z, we conclude that $\mathfrak{X}(G)$ is the maximal π-subgroup of G; this completes the proof.

A sketch of proof allows us to obtain, for any radical (in the sense of Kurosh) in the class of all Abelian groups $\mathfrak{A}$, its extension in the class of hypercentral groups. For example, an extension of Theorem 12 [1] is the following

Proposition 1.2. *In the class of all hypercentral p-groups there exists only one nontrivial proper radical $\mathfrak{D}$, i.e. for each hypercentral p-group G the subgroup $\mathfrak{D}(G)$ is the divisible part of G.*

Now we consider hereditary radicals in torsion-free groups. From Theorem 1.1 it follows

Corollary 1.3. *For any radical (in the sense of Kurosh) $\mathfrak{X}$ all infinite cyclic groups are either $\mathfrak{X}$-radical or $\mathfrak{X}$-semiprime.*

Lemma 1.4. *Let $\mathfrak{X}(G)$ be a nontrivial hereditary radical (in the sense of Kurosh) of torsion-free group G. Then for all subnormal cyclic subgroups A of G either $A \leqslant \mathfrak{X}(G)$ or $A \cap \mathfrak{X}(G) = E$.*

Proof. In consequence of subnormality of A in G we have $\mathfrak{X}(A) = A \cap \mathfrak{X}(G)$ whence by Corollary 1.3 either $A \leqslant \mathfrak{X}(G)$ or $A \cap \mathfrak{X}(G) = E$, as desired.

Corollary 1.5. *Let $\mathfrak{X}(G)$ be a nontrivial hereditary radical (in the sense of Kurosh) of torsion-free group G. Then either $\mathcal{B}(G) \leqslant \mathfrak{X}(G)$ or $\mathcal{B}(G) \cap \mathfrak{X}(G) = E$.*

In fact, if b is an arbitrary element of $\mathcal{B}(G) \cap \mathfrak{X}(G)$ then

$$\mathfrak{X}(\langle b \rangle) = \langle b \rangle \cap \mathfrak{X}(G) = \langle b \rangle.$$

Therefore, for any element a of $\mathcal{B}(G) \setminus \mathfrak{X}(G)$ we have

$$\mathfrak{X}(\langle a \rangle) = \langle a \rangle \cap \mathfrak{X}(G) \neq \langle a \rangle,$$

a contradiction with Corollary 1.3.

Proposition 1.6. *Any hyperabelian torsion-free locally nilpotent (respectively torsion-free Baer) group G has only the trivial hereditary proper radical (in the sense of Kurosh).*

Proof. Let G be a hyperabelian torsion-free locally nilpotent group with normal series

$$E = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \dots A_\alpha \leqslant A_{\alpha+1} \leqslant \dots \leqslant A_\gamma = G \tag{1}$$

such that $A_\beta = \bigcap_{\delta<\beta} A_\delta$ if β is a limit ordinals, the quotient $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ is an Abelian torsion-free group for all $\alpha < \gamma$ and any term of the series (1) is a normal subgroups of G. Let $\mathfrak{X}(G)$ be an arbitrary nontrivial hereditary radical (in the sense of Kurosh) of G and A an arbitrary nontrivial subnormal cyclic subgroup of $\mathfrak{X}(G)$. Then for every nontrivial element b of A_1 in view of isomorphism $A \cong \langle b \rangle$ and $\langle b \rangle \lhd\lhd G$ we have $\langle b \rangle \leqslant \mathfrak{X}(G)$ and consequently $A_1 \leqslant \mathfrak{X}(G)$. By induction it can be readily verified that $\mathfrak{X}(G) = G$.

Corollary 1.7. *Let G be a torsion-free locally nilpotent group, $\mathfrak{X}(G)$ a hereditary radical (in the sense of Kurosh) of G. If*

$$I_{\mathfrak{X}(G)}(\mathfrak{X}(G)') \neq \mathfrak{X}(G)$$

then the subgroup $\mathfrak{X}(G)$ is isolated in G.

Corollary 1.8. *Let G be a torsion-free group, $\mathfrak{X}(G)$ a hereditary radical (in the sense of Kurosh) of G. If the Baer radical $\mathcal{B}(\mathfrak{X}(G))$ of G is nontrivial then $\mathfrak{X}(G)$ is isolated in G.*

2. In accord with [8] a mapping $\theta : \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{N}$ is called a functorial if it assings to each group G of $\mathfrak{N}$ some subgroup $\theta(G)$ of G and

$$\theta(\phi(G)) = \phi(\theta(G))$$

for every isomorfism $\phi : G \longrightarrow \phi(G)$. A functorial θ is hereditary radical in the class $\mathfrak{N}$ (in the sense of Plotkin) if it satisfies the following condition:

$(P1)$ $\theta(\theta(G)) = \theta(G)$ for all $G \in \mathfrak{N}$;

$(P2)$ $\theta(H) = H \cap \theta(G)$ for every normal subgroup H of G, $G \in \mathfrak{N}$;

$(P3)$ $\pi(\theta(G)) \leqslant \theta(D)$ for all epimorphisms $\pi : G \longrightarrow D$ with $G, D \in \mathfrak{N}$.

Lemma 2.1. *Let $\theta(G)$ be a hereditary radical (in the sense of Plotkin) of torsion-free group G. Then either $\mathcal{B}(G) \leqslant \theta(G)$ or $\mathcal{B}(G) \cap \theta(G) = E$.*

Corollary 2.2. *Any Baer (in particular a Fitting) torsion-free group G has only the trivial hereditary proper radical (in the sense of Plotkin).*

Corollary 2.3. *Any torsion-free hypercentral group of lenght at most ω has only the trivial proper hereditary radicals (in the sense of Plotkin).*

Proposition 2.4. *The Baer radical $\mathcal{B}(G)$ (respectively the Fitting radical $\mathcal{F}(G)$) of G is isolated in a torsion-free locally nilpotent group G.*

Proof. If $a^n \in \mathcal{B}(G)$ for some nontrivial element a of $G \setminus \mathcal{B}(G)$ and some integer n then G has a normal series

$$\langle a^n \rangle \leqslant I_1 \leqslant \dots I_n = G$$

and consequently G has a normal series

$$I_G(\langle a^n \rangle) \leqslant I_G(I_1) \leqslant \dots \leqslant G.$$

Since the isolator $I_G(\langle a^n \rangle)$ is Abelian [6, p.413], we conclude that the subgroup $\langle a \rangle$ is subnormal in G, and consequently $a \in \mathcal{B}(G)$.

1. Курош А.Г. *Радикалы в теории групп* // Сиб. матем. ж. – 1962. – Т.3, N6. – С. 912 – 934; поправка там же. – 1965. – Т.6, N3. – С.715.

2. Рябухин Ю.М. *Классификация наследственных радикалов абелевых групп* // В кн.:Материалы 6 конференции молодых ученых Молдавии, 1964, секция физ.-мат.- Кишинев, 1965. – С.74 – 75.

3. Dickson S.E. *On torsion classes of Abelian groups* // J. Math. Soc. Japan.- 1965. – Vol.17,N1. – P.30 – 35.

4. Мишина А.П., Скорняков Л.А. Абелевы группы и модули.- М.: Наука, 1969. – 152 с.

5. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами систем подгрупп.- М.: Наука, 1980. – 384 с.

6. Курош А.Г. Теория групп.- М.: Наука, 1967. – 648 с.

7. Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М. Радикалы ассоциативных алгебр и структурная теория.- М.: Наука, 1979. – 496 с.

8. Плоткин Б.И. *О функториалах, радикалах и корадикалах в группах* // Мат. записки (Свердловск). – 1970. – Т.7, тетрадь 3. – С.150–182.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997

УДК 515.12+512.58

ON PROJECTIVE FUNCTORS IN THE CATEGORY OF COMPACTA

A.B.TELEIKO

Teleiko A.B. On projective functors in the category of compacta. We characterize projective functors in the class of normal functors of finite degree: only such ones admit functorial extensions of semigroup operations.

This note is devoted to the general problem of lifting of endofunctors in the category of compacta onto categories of compacta with some algebraic structures (see, e.g., [3, 7]). As remarked in [7] the problem of extension of a binary operation $X \times X \to X$ onto FX (F is a functor) is related to existence of a "nice" natural transformation $FX \times FX \to F(X \times X)$. It turns out that in the class of normal functors of finite degree only projective functors admit such transformations. As a consequence, we shall obtain that in this class only projective functors lift onto the category of compact semigroups.

Remark also that some characterizations of projective functors in the category of compacta are known. The interested reader may look through the articles [4, 5].

1. An endofunctor F on the category $\mathcal{C}$ is said to be *projective* if there exist natural transformations $\eta\colon 1_{\mathcal{C}} \to F$ and $\pi\colon F \to 1_{\mathcal{C}}$ with $\pi \circ \eta = \mathrm{id}$ (see [2] for related notions).

Denote by $\mathcal{C}omp$ the category of compacta and their continuous maps.

A functor $F\colon \mathcal{C}omp \to \mathcal{C}omp$ is called *normal* [1] if it is continuous, monomorphic, epimorphic, preserves weight, intersections, preimages, singletons, and empty set.

Remark 1. If F is a projective normal endofunctor in $\mathcal{C}omp$, then $F \times 1_{\mathcal{C}omp}$ and every epimorphic subfunctor of F are also projective (and normal).

For a normal functor F we shall denote by η a unique natural transformation $1_{\mathcal{C}omp} \to F$ [1].

Let F be a normal functor, $X \in \mathcal{C}omp$, $a \in FX$. The *support* $\mathrm{supp}(a)$ of the point a is defined by the formula [1]: $\mathrm{supp}(a) = \bigcap\{A \mid A \text{ is a closed set in } X, a \in FA\}$ (here we identify FA and $Fj(A)$, where $j\colon A \to X$ is the natural embedding). Denote by $\deg(a)$ the *degree* of a: $\deg(a) = |\mathrm{supp}(a)|$. The *degree* $\deg F$ of the functor F is said to be the cardinal number $\sup\{|\mathrm{supp}(a)| \mid a \in FX, X \in \mathcal{C}omp\}$. Recall that normal functors F preserve supports, i.e., $\mathrm{supp}\, Ff(a) = f(\mathrm{supp}(a))$, $a \in FX$, $f\colon X \to Y$, $X, Y \in \mathcal{C}omp$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 22A30, 54B30.

Let $(-)^2\colon \mathcal{C}omp \to \mathcal{C}omp$ be the power functor: $(-)^2X = X \times X$, $(-)^2 f = f \times f$, $f\colon X \to Y$, $X, Y \in \mathcal{C}omp$.

We identify a number $n \in \mathbb{N}$ with the set $\{0, 1, \dots, n-1\}$.

Theorem 1. *Let F be a normal functor of finite degree. Then F is projective if and only if there exists a natural transformation $\xi\colon (-)^2 F \to F(-)^2$ with $\xi \circ (-)^2\eta = \eta(-)^2$.*

Proof. ($\Longrightarrow$) Let $\pi\colon F \to 1_{\mathcal{C}omp}$ be a projection. Set $\xi = \eta(-)^2 \circ (\pi \times \pi)$.
($\Longleftarrow$) Let X_1 and X_2 be compacta. Let $j_i\colon X_i \to X_1 \sqcup X_2$, $i = 1, 2$, be the natural embeddings. We identify $a_i \in FX_i$ with $Fj_i(a_i) \in F(X_1 \sqcup X_2)$, $i = 1, 2$. Writing $\xi(X \sqcup Y)(a, b)$, we always suppose that $a \in FX \subset F(X \sqcup Y)$ and $b \in FY \subset F(X \sqcup Y)$.

Denote by pr_i the natural projection $(-)^2 \to 1_{\mathcal{C}omp}$ onto the i-th factor, $i = 1, 2$.

Claim 1. *The following equalities hold: $F\,\mathrm{pr}_2 \circ \xi(X_1 \sqcup X_2)\big(a, \eta X_2(x)\big) = \eta X_2(x)$, $a \in FX_1, x \in X_2$, and $F\,\mathrm{pr}_1 \circ \xi(X_1 \sqcup X_2)\big(\eta X_1(x), b\big) = \eta X_1(x)$, $b \in FX_2, x \in X_1$.* Prove the first equality. Let $x_1 \in X_1$ and $r\colon X_1 \sqcup X_2 \to \{x_1\} \sqcup X_2$ be the retraction $r(X_1) = \{x_1\}$. Then $Fr(a) = \eta X_1(x_1)$, $Fr\big(\eta X_2(x)\big) = \eta X_2(x)$. Therefore, $Fr \circ \xi(X_1 \sqcup X_2)\big(a, \eta X_2(x)\big) = \eta(X_1 \sqcup X_2)^2(x_1, x)$. Since F preserves supports, we see that $\operatorname{supp} \xi(X_1 \sqcup X_2)\big((a, \eta X_2(x)\big) \subset X_1 \times \{x\}$. This inclusion implies the first equality. The second one is obtained in the similar manner.

Claim 2. *For every $a, a', a'' \in FX_1$, $b, b', b'' \in FX_2$ one has*

$$F\,\mathrm{pr}_1 \circ \xi(X_1 \sqcup X_2)(a, b') = F\,\mathrm{pr}_1 \circ \xi(X_1 \sqcup X_2)(a, b'') \text{ and}$$
$$F\,\mathrm{pr}_2 \circ \xi(X_1 \sqcup X_2)(a', b) = F\,\mathrm{pr}_1 \circ \xi(X_1 \sqcup X_2)(a'', b).$$

Show only the first equality. Since $\xi \circ (-)^2\eta = \eta(-)^2$, we have $\operatorname{supp} \xi(a, b') \subset \operatorname{supp}(a) \times \operatorname{supp}(b')$. Let $x_0 \in X_2$. Consider the retraction $r\colon X_1 \sqcup X_2 \to X_1 \sqcup \{x_0\}$ such that $r(X_2) = \{x_0\}$. We obtain

$$\begin{aligned} F\,\mathrm{pr}_1 \circ \xi(X_1 \sqcup X_2)(a, b') &= Fr \circ F\,\mathrm{pr}_1 \circ \xi(X_1 \sqcup X_2)(a, b') = \\ &= F\,\mathrm{pr}_1 \circ F(r \times r) \circ \xi(X_1 \sqcup X_2)(a, b') = F\,\mathrm{pr}_1 \circ \xi(X_1 \sqcup X_2)\big(a, \eta X_2(x_0)\big). \end{aligned}$$

Hence, for every $a \in FX_1$ the point $F\,\mathrm{pr}_1 \circ (\xi) X_1 \sqcup X_2(a, b')$ does not depend on $b' \in FX_2$.

Let $\deg F = n$. For $m \leqslant n$ denote by F_m the subfunctor $F_m X = \{a \in FX \mid \deg(a) \leqslant m\}$, $X \in \mathcal{C}omp$, of F. Set

$$m_1 = \max\big\{\deg F\,\mathrm{pr}_1 \circ \xi(n \sqcup n)\big(a, \eta n(0)\big) \mid a \in Fn\big\},$$
$$m_2 = \max\big\{\deg F\,\mathrm{pr}_2 \circ \xi(n \sqcup n)\big(\eta n(0), b\big) \mid b \in Fn\big\}.$$

Consider the following case: $\max\{m_1, m_2\} < n$.
Without restricting generality, we may suppose that $m_1 \geqslant m_2$. Let $a \in Fn$ be such that $m_1 = \deg F\,\mathrm{pr}_1 \circ \xi(n \sqcup n)\big(a, \eta n(0)\big)$. Set $n_1 = m_2$.

Now we desire to construct a natural transformation $p\colon F \to F_{n_1}$ with $p \circ \eta = \eta$. For $k \leqslant n$ let $pk\colon Fk \to F_{n_1}k$ act by the formula $pk(b) = F\,\mathrm{pr}_2 \circ \xi(n \sqcup k)(a, b)$, $b \in Fk$. For a map $f\colon k_1 \to k_2$, $k_1, k_2 \leqslant n$, setting $h\colon n \sqcup k_1 \to n \sqcup k_2$, $h|n = \mathrm{id}$, $h|k_1 = f$, we obtain ($b \in Fk_1$)

$$\begin{aligned} Ff \circ pk_1(b) &= Fh \circ F\,\mathrm{pr}_2 \circ \xi(n \sqcup k_1)(a, b) = F\,\mathrm{pr}_2 \circ \xi(n \sqcup k_2)\big(Fh(a), Fh(b)\big) = \\ &= F\,\mathrm{pr}_2 \circ \xi(n \sqcup k_2)\big(a, Ff(b)\big) = pk_2 \circ Ff(b). \end{aligned}$$

Moreover, by Claim 1, $pk \circ \eta k(x) = \eta k(x)$, $x \in k$, $k \leqslant n$. Therefore, there exists a natural transformation $p: F \to F_{n_1}$ with $p \circ \eta = \eta$ (see, e.g., Pr.3.10 of ch.1 from [6]).

Now set $\xi_1 = p(-)^2 \circ \xi$. Then ξ_1 is a natural transformation $(-)^2F \to F_{n_1}(-)^2$ with $\xi_1 \circ (-)^2\eta = \eta(-)^2$. Hence, if $\max\{m_1, m_2\} < n$, we obtain the number $n_1 < n$ and the natural transformation ξ_1.

Therefore, without restricting generality, we can suppose that there exist a number N, a point $a \in FN$, and a natural transformation $\xi': (-)^2F \to F_N(-)^2$ such that $\xi' \circ (-)^2\eta = \eta(-)^2$ and

$$N = \deg F_N \operatorname{pr}_1 \circ \xi'(N \sqcup n)\big(a, \eta n(0)\big).$$

Remark that for a point $A \in FN$, $\deg A = N$, the functor

$$(F_N/A)X = \{b \in F_N(N \times X) \mid F_N \operatorname{pr}_1(b) = A\}$$

is projective [5]. To obtain this fact it is sufficient to consider the natural transformation $\pi_0: F_N/A \to 1_{\mathcal{C}omp}$, $\pi_0 X(b) = y$, where $(0, y) \in \operatorname{supp}(b)$, $b \in \big(F_N/A\big)(X)$, $X \in \mathcal{C}omp$.

Now set $\pi X: FX \to F_N(N \times X)$, $\pi X(b) = \xi'(N \sqcup X)(a, b)$, $b \in FX$, $X \in \mathcal{C}omp$. Let $A = F_N \operatorname{pr}_1 \circ \xi'(N \sqcup n)\big(a, \eta n(0)\big)$. Applying Claim 2, we obtain that $\pi X(FX) \subset \big(F_N/A\big)(X)$. Hence, π is a natural transformation $F \to F_N/A$. By Claim 1 for the natural transformation $\pi_0 \circ \pi: F \to 1_{\mathcal{C}omp}$ we have $\pi_0 \circ \pi \circ \eta = \mathrm{id}$.

2. Denote by $\mathcal{CS}$ the category of compact semigroups and their continuous homomorphisms. Let $U: \mathcal{CS} \to \mathcal{C}omp$ be the forgetful functor. A functor $\bar{F}: \mathcal{CS} \to \mathcal{CS}$ is called a *lifting* of F onto the category $\mathcal{CS}$ if $U\bar{F} = FU$. A lifting $\bar{F}$ is *natural* if for every $(S, m) \in \mathcal{CS}$ the mapping ηS is a homomorphism $(S, m) \to \bar{F}(S, m)$.

Theorem 2. *Let F be a normal functor of finite degree. Then F has a natural lifting onto $\mathcal{CS}$ if and only if F is projective.*

Proof. ($\Longleftarrow$) Let $\pi: F \to 1_{\mathcal{C}omp}$ be a projection. For every $(S, m) \in \mathcal{CS}$ it is sufficient to consider the following multiplication on FS: $\overline{m}: FS \times FS \to FS$, $\overline{m}(a, b) = \eta S \circ m\big(\pi(a), \pi(b)\big)$, $a, b \in FS$.
($\Longrightarrow$) Let $i: 1_{\mathcal{C}omp} \to (-)^2$ be the natural transformation $iX(x) = (x, x)$, $x \in X$, $X \in \mathcal{C}omp$. For every $X \in \mathcal{C}omp$ consider the following multiplication mX on $X \times X$:

$$mX\big((x, y), (z, t)\big) = (x, t).$$

It is easy to see that mX is associative. Let $\bar{F}(X \times X, mX) = \big(F(X \times X), \overline{m}X\big)$. Set $\xi X = \overline{m}X \circ (FiX \times FiX): FX \times FX \to F(X \times X)$. Show that ξ is a natural transformation $(-)^2F \to F(-)^2$ with $\xi \circ (-)^2\eta = \eta(-)^2$. Indeed, $\xi \circ (\eta \times \eta) = \overline{m} \circ (Fi \times Fi) \circ (\eta \times \eta) = \overline{m} \circ \big(\eta(-)^2 \times \eta(-)^2\big) \circ (i \times i) = \eta(-)^2 \circ m \circ (i \times i) = \eta(-)^2$, because $m \circ (i \times i) = \mathrm{id}$. Moreover, let $f: X \to Y$, $X, Y \in \mathcal{C}omp$, be arbitrary. Then $\xi Y \circ (Ff \times Ff) = \overline{m}Y \circ (-)^2(FiY \circ Ff) = \overline{m}Y \circ (-)^2F(f \times f) \circ (-)^2FiX$. Since $f \times f: (X \times X, mX) \to (Y \times Y, mY)$ is a homomorphism, we have $\xi Y \circ (-)^2Ff = F(f \times f) \circ \overline{m}X \circ (-)^2FiX = F(f \times f) \circ \xi X$. By Theorem 1, we immediately obtain that F is projective.

Remark 2. It is interested whether Theorems 1 and 2 hold for weakly normal functors. (Recall that a functor is weakly normal if it satisfies all conditions of the definition of normal functor excepting the condition of preserving preimages.) The author knows only some answers to this question.

Let F be a weakly normal functor of finite degree n. A point $a \in FX$ is called invariant if $Fh(a) = a$ for every automorphism h of X such that $h(\mathrm{supp}(a)) = \mathrm{supp}(a)$.

It is easy to prove the following statement: let $a \in Fn$ be an invariant point with $\deg(a) > \sqrt{n}$; then there exists no natural transformation $\xi\colon (-)^2F \to F(-)^2$ with $\xi \circ (-)^2\eta = \eta(-)^2$. In particular, this implies that the functors $\lambda_n, G_n, (N_m)_n$, $m \geqslant 2$, (see for definitions [6]) have no natural lifting onto $\mathcal{CS}$.

1. Shchepin E.V. *Functors and uncountable powers of compacta*// Uspekhi Mat. Nauk. – 1981. – Vol.36, N 3. – P.3–62 (Russian).
2. Vinárek J. *Projective monads and extensions of functors*// Math. Centr. Afd. – 1983. – Vol.195. – P.1–12
3. Zarichnyi M.M. *Multiplicative normal functor is a power one*// Mat. Zametki. – 1987. – Vol. 141, N 1. – P.93–110 (Russian).
4. Zarichnyi M.M. // Profinite multiplicativity of functors and characterization of projective triples in the category of compacta// Ukr. Mat. Zh. – 1990. – Vol. 42, N 9. – P.1271–1275 (Russian).
5. Zarichnyi M.M.*Distributivity law for the normal triples in the category of compacta and lifting of functors to the categories of algebras*// Comment. Math. Univ. Carolinae. –1991. – Vol.32, N 4. – P.785–790
6. Zarichnyi M.M. Topology of functors and monads in the category of compacta. – Kyiv,, Inst. System Research. Education. – 1993 (Ukrainian).
7. Zarichnyi M.M, Teleiko A.B. *Semigroup and monads*// (in book Algebra and Topology). – Lviv. – 1996. – P.84–93 (Ukrainian).

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997

УДК 517.537.72

ОЦІНКИ МАКСИМУМУ МОДУЛЯ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

О.М.Мулява , Я.Я.Притула

Mul'ava O.M., Prytula Ya.Ya. Estimates of maximum modulus of an entire Dirichlet series. Let $S(\Lambda)$ be a class of entire Dirichlet series $F(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n)$, $s = \sigma + it$, where $\Lambda = (\lambda_n) > 0 \uparrow +\infty$. For $F \in S(\Lambda)$ let $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, and $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ be the maximal term.

By Ω we denote a class of positive unbounded on $(-\infty, +\infty)$ functions Φ such that the derivative Φ' is a continuous positive and growing to $+\infty$ on $(-\infty, +\infty)$ function. For $\Phi \in \Omega$ via $S(\Lambda, \Phi)$ we denote a subclass of entire Dirichlet series such that $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

In the class $S(\Lambda, \Phi)$ it is shown necessary and sufficient condition on Λ for fulfilling the correlation $M(\sigma, F) \leqslant \mu\Big(\dfrac{\sigma}{1-\beta}, F\Big)^{1-\beta}$, $\beta \in (0,1)$ for all $\sigma \geqslant \sigma_0$.

Нехай $\Lambda = (\lambda_n)$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, а $S(\Lambda)$ — клас цілих (абсолютно збіжних в $\mathbb{C}$) рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n), \quad s = \sigma + it. \tag{1}$$

Серед коефіцієнтів a_n ряду (1) можуть зустрічатись рівні нулеві, але вважаємо, що цей ряд не зводиться до експоненціального многочлена.

Для $F \in S(\Lambda)$ нехай $M(\sigma) = M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, а $\mu(\sigma) = \mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ — максимальний член ряду (1). Добре відомо [1, с. 182; 2, с. 21], що $\mu(\sigma, F) \leqslant M(\sigma, F)$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$. Оцінки $M(\sigma)$ через $\mu(\sigma)$ зверху залежать від щільності показників λ_n ряду (1). Ще в 1924 році Ж.Валірон [3] (див. також [1, с. 184] і [2, с. 32]) показав, що якщо $\ln n \leqslant (\tau + o(1))\lambda_n$ $(n \to \infty)$, то

$$M(\sigma, F) \leqslant \mu(\sigma + \tau + o(1), F), \quad \sigma \to \infty. \tag{2}$$

Цей результат уточнено в [4], де доведена така

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50.

Теорема А. *Нехай $\tau \in [0, +\infty)$. Для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda)$ справджувалось співвідношення (2), необхідно і досить, щоб $\ln n \leqslant (\tau + o(1))\lambda_n$ $(n \to \infty)$.*

З цієї теореми випливає, що якщо $\ln n = O(\lambda_n)$, $n \to \infty$, то для кожної сталої $A > 1$ і всіх досить великих σ справедлива нерівність $M(\sigma) \leqslant \mu(A\sigma)$. Виникає питання, чи існує послідовність $\Lambda, \ln n \neq O(\lambda_n), n \to \infty$, і стала $A > 1$ такі, що $M(\sigma, F) \leqslant \mu(A\sigma, F), \sigma \geqslant \sigma_0$, для кожної $F \in S(\Lambda)$. Негативна відповідь на це питання міститься в наступній теоремі.

Теорема Б [4]. *Для кожних послідовності Λ такої, що $\ln n \neq O(\lambda_n)$, $n \to \infty$, і сталої $A \in (1, +\infty)$ існують функція $F \in S(\Lambda)$ і послідовність $(\sigma_j) \uparrow +\infty$ такі, що $M(\sigma_j, F) \geqslant \mu(A\sigma_j, F)$ для всіх $j \in \mathbb{N}$.*

Проте в певних підкласах функцій із $S(\Lambda)$, які визначаються обмеженням на зростання $\mu(\sigma)$ (чи спаданням коефіцієнтів), можна вказати умову на Λ, при виконанні якої існує стала A така, що $M(\sigma, F) \leqslant\leqslant \mu(A\sigma, F)$, $\sigma \geqslant \sigma_0$, для кожної функції F з даного підкласу.

Через Ω позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' є неперервною, додатною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ функцією. Нехай φ — обернена до Φ' функція, а $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ — функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [5; 2, с. 17] функція Ψ неперервна на $(-\infty, +\infty)$ і зростає до $+\infty$.

Для $\Phi \in \Omega$ через $S(\Lambda, \Phi)$ позначимо підклас цілих рядів Діріхле (1) таких, що $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Справедлива така

Теорема 1. *Нехай $\Phi \in \Omega$ і $\beta \in [0, 1)$. Для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda, \Phi)$ виконувалась нерівність*

$$M(\sigma, F) \leqslant \mu\Big(\frac{\sigma}{1 - \beta - \varepsilon}, F\Big)^{1-\beta-\varepsilon} \tag{3}$$

для кожного $\varepsilon \in (0, 1 - \beta)$ і всіх $\sigma \geqslant \sigma_0(\varepsilon)$, необхідно і досить, щоб

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))} \leqslant \beta. \tag{4}$$

Оцінку (3) ми отримаємо із загальнішої нерівності, яка в дещо іншому вигляді є тільки в [6] і уточнює відповідні результати з [7] і [2, с. 21].

Через L позначимо клас неперервних зростаючих до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ функцій, а для $q \in L$ покладемо

$$p(\sigma) = \sup\Big\{\frac{\sigma - t}{q^{-1}(\sigma) - q^{-1}(t)}:\ -\infty \leqslant t < \sigma\Big\}.$$

Лема 1. *Якщо $q \in L$ і*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \exp\left\{\lambda_n q\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right)\right\} = K_0 < +\infty, \tag{5}$$

то для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$

$$M(\sigma) \leqslant K_0 \mu\left(q^{-1}(\sigma)\right)^{p(\sigma)} + K_0 + |a_0|. \tag{6}$$

Доведення. Покладемо $r_n = \dfrac{1}{\lambda_n}\ln\dfrac{1}{|a_n|}$, $n \geqslant 1$. Оскільки ряд (1) збігається абсолютно в $\mathbb{C}$, то $r_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$. Зрозуміло також, що

$$M(\sigma, F) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} = |a_0| + \left(\sum_{r_n < q^{-1}(\sigma)} + \sum_{r_n \geqslant q^{-1}(\sigma)}\right) |a_n| e^{\sigma\lambda_n}. \tag{7}$$

Якщо $r_n < q^{-1}(\sigma)$, то

$$|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} = |a_n|^{1-p(\sigma)} \left(|a_n| e^{\lambda_n q^{-1}(\sigma)}\right)^{p(\sigma)} e^{(\sigma - p(\sigma) q^{-1}(\sigma))\lambda_n} \leqslant$$
$$\leqslant \mu\left(q^{-1}(\sigma)\right)^{p(\sigma)} |a_n| \exp\left\{\lambda_n\left(\sigma - \frac{\sigma - q(r_n)}{q^{-1}(\sigma) - q^{-1}(q(r_n))}\left(q^{-1}(\sigma) - r_n\right)\right)\right\}$$
$$= \mu\left(q^{-1}(\sigma)\right)^{p(\sigma)} |a_n| \exp\{\lambda_n q(r_n)\},$$

а якщо $r_n \geqslant q^{-1}(\sigma)$, то $|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \leqslant |a_n| \exp\{\lambda_n q(r_n)\}$. Тому з (7), завдяки (5), випливає нерівність (6).

Лема 2. *Нехай $\gamma > 0$ і $\delta = A(\gamma - 1)$ — довільні числа. Якщо*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{(\gamma - 1)\ln|a_n| + \delta\lambda_n}{\ln n} = h(\gamma, \delta) > 1, \tag{8}$$

то для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$ справедлива оцінка

$$M(\sigma) \leqslant K\mu\left(\frac{\sigma + \delta}{\gamma}\right)^{\gamma}, \quad K \equiv const. \tag{9}$$

Доведення. Виберемо функцію $q(x) = \gamma x - \delta$. Тоді умова (5) набуде вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp\{-((\gamma - 1)\ln|a_n| + \delta\lambda_n)\} \leqslant K_0 < \infty,$$

яка, зрозуміло, виконується, якщо виконується умова (8). Тому за лемою 1 справедлива оцінка (6) з $q(x) = \gamma x - \delta$. Але $q^{-1}(\sigma) = \dfrac{\sigma + \delta}{\gamma}$, $p(\sigma) = \gamma$, і тому з (8) маємо

$$M(\sigma) \leqslant K_0\mu\left(\frac{\sigma + \delta}{\gamma}\right)^{\gamma} + K_0 + |a_0| \leqslant K\mu\left(\frac{\sigma + \delta}{\gamma}, F\right)^{\gamma}, \quad K = 2K_0 + |a_0|.$$

Лема 2 доведена.

Припустимо, що

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{-\ln|a_n|} \leqslant \beta < 1, \tag{10}$$

і виберемо $\delta = 0$ і $\gamma = 1 - \beta - \varepsilon/2$. Тоді

$$h(\gamma, \delta) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{-(\beta + \varepsilon/2)\ln|a_n|}{\ln n} \geqslant \frac{\beta + \varepsilon/2}{\beta} > 1,$$

і за лемою 2

$$M(\sigma,F) \leqslant K\mu\Big(\frac{\sigma}{1-\beta-\varepsilon/2},F\Big)^{1-\beta-\varepsilon/2}, \quad K=K(\varepsilon)\equiv\mathrm{const}>0. \tag{11}$$

В [5; 2, с. 18] показано, що якщо $\Phi \in \Omega$, то для того щоб $\ln\mu(\sigma) \leqslant \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб $\ln|a_n| \leqslant -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geqslant 0$. Тому, якщо $\ln\mu(\sigma,F) \leqslant \Phi(\sigma)$ і виконується умова (4), то виконується і умова (10), тобто, справедлива нерівність (11).

Нерівність (5) легко випливає з (11), оскільки, з огляду на рівність

$$\ln\mu(\sigma,F)=\ln\mu(\sigma_0,F)+\int_{\sigma_0}^{\sigma}\lambda_{\nu(t)}\,dt, \quad \sigma>\sigma_0,$$

де $\nu(\sigma)$ — центральний індекс ряду (1), для будь-якого $\delta>0$ виконується

$$\ln\mu\big((1+\delta)\sigma,F\big)-(1+\delta)\ln\mu(\sigma,F)=$$

$$=\int_{\sigma}^{(1+\delta)\sigma}\lambda_{\nu(t)}\,dt-\delta\ln\mu(\sigma,F)\geqslant\delta\sigma\lambda_{\nu(\sigma)}-\delta\big(\ln|a_{\nu(\sigma)}|+\sigma\lambda_{\nu(\sigma)}\big)=$$

$$=\delta\ln\frac{1}{|a_{\nu(\sigma)}|}\to+\infty \quad (\sigma\to+\infty).$$

Достатність умови (4) в теоремі 1 доведена.

Для доведення її необхідності нам буде потрібна наступна

Лема 3. *Нехай γ — додатна, неперервна і неспадна на $[0,\infty)$ функція, а*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n\gamma(\lambda_n)}>1, \tag{12}$$

Тоді існує зростаюча підпослідовність $(\lambda_k^\star)$ послідовності Λ така, що

$$\ln k \leqslant \lambda_k^\star\gamma(\lambda_k^\star)+1 \quad (k\in\mathbb{N}) \tag{13}$$

і

$$\ln k_j \geqslant \lambda_{k_j}^\star\gamma(\lambda_{k_j}^\star) \tag{14}$$

для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.

Доведення. З умови (12) випливає існування числа

$$k_1=\min\{k\geqslant 2:\ln k\geqslant\lambda_k\gamma(\lambda_k)\}.$$

Ясно, що $\ln k<\lambda_k\gamma(\lambda_k)$ при $1\leqslant k<k_1$, $\ln k_1\geqslant\lambda_{k_1}\varphi(\lambda_{k_1})$ і

$$\ln k_1=\ln(k_1-1)+\ln\Big(1+\frac{1}{k_1-1}\Big)\leqslant\lambda_{k_1-1}\gamma(\lambda_{k_1-1})+1<\lambda_{k_1}\gamma(\lambda_{k_1})+1.$$

Отже, якщо покладемо $\lambda_k^\star=\lambda_k$ для $1\leqslant k\leqslant k_1$, то для таких k мають місце нерівності (13) і (14).

Покладемо тепер

$$j_1 = \min\{j \in \mathbb{N} : \ln(k_1+1)' < \lambda_{k_1+j}\gamma(\lambda_{k_1+j})\}$$

і з послідовності Λ викинемо числа $\lambda_{k_1+1}, \dots, \lambda_{k_1+j_1}$, тобто покладемо $\lambda^*_{k_1+1} = \lambda_{k_1+j_1+1}$.

Завдяки (12), існує

$$k_2 = \min\{k \geqslant k_1+2 : \ln k \geqslant \lambda_{k+j_1}\gamma(\lambda_{k+j_1})\}.$$

Тоді $\ln k < \lambda_{k+j_1}\gamma(\lambda_{k+j_1})$ при $k_1+1 \leqslant k < k_2, \ln k_2 \geqslant \lambda_{k_2+j_1}\gamma(\lambda_{k_2+j_1})$ і $\ln k_2 \leqslant \ln(k_2-1)+1 \leqslant \lambda_{k_2+j_1}\gamma(\lambda_{k_2+j_1})+1$. Тому, якщо покладемо $\lambda^*_k = \lambda_{k+j_1}$ для $k_1+1 \leqslant k \leqslant k_2$, то для таких k також виконуються нерівності (13) і (14).

Якщо k_l і j_{l-1}, $l \geqslant 2$ вже вибрані, то покладемо

$$j_l = \min\{j \in \mathbb{N} : \ln(k_l+1) < \lambda_{k_l+j_1+\dots+j_{l-1}+1}\gamma(\lambda_{k_l+j_1+\dots+j_{l-1}+1})\}$$

і з послідовності Λ викинемо члени $\lambda_{k_l+j_1+\dots+j_{l-1}+1}, \dots, \lambda_{k_l+j_1+\dots+j_{l-1}+j_l}$, тобто покладемо $\lambda^*_{k_l+1} = \lambda_{k_l+j_1+\dots+j_l+1}$. З огляду на (12), існує

$$k_{l+1} = \min\{k \geqslant k_l+2 : \ln k \geqslant \lambda_{k+j_1+\dots+j_l}\gamma(\lambda_{k+j_1+\dots+j_l})\}.$$

Тоді

$$\ln k < \lambda_{k+j_1+\dots+j_l}\gamma(\lambda_{k+j_1+\dots+j_l}), \quad k_l+1 \leqslant k < k_{l+1},$$

і, як вище

$$\lambda_{k_{l+1}+j_1+\dots+j_l}\gamma(\lambda_{k_{l+1}+j_1+\dots+j_l}) \leqslant \ln k_{l+1} \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_{k_{l+1}+j_1+\dots+j_l}\gamma(\lambda_{k_{l+1}+j_1+\dots+j_l})+1.$$

Тому, якщо покладемо $\lambda^*_k = \lambda_{k+j_1+\dots+j_l}$, $k_l+1 \leqslant k \leqslant k_{l+1}$, то для таких k знову маємо (13) і (14). Лема 3 доведена.

Доведемо необхідністі умови (4) в теоремі 1. Припустимо, що вона не виконується, тобто,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))} = B > \beta.$$

Покладемо $\gamma = b\Psi(\varphi(x))$, $\beta < b < \min\{1, B\}$. Тоді виконується (14), і за лемою 1 існує підпослідовність (λ^*_k), для якої виконуються нерівності (13) і (14). Покладемо, далі, $a_n = 0$ при $\lambda_n \neq \lambda^*_k$ і $a_n = a^*_k = \exp\{-\lambda^*_k\Psi(\varphi(\lambda^*_k))\}$ при $\lambda_n = \lambda^*_k$. Так ми прийдемо до ряду Діріхле

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-\lambda_k\Psi(\varphi(\lambda_k)) + s\lambda_k\}, \tag{15}$$

де для простоти $\lambda_k = \lambda^*_k$. Оскільки $b \in (0,1)$ і виконується (13) з $\gamma(x) = b\Psi(\varphi(x))$, то ряд (15) є цілим. Для цього ряду з критерію, наведеного при доведенні достатності випливає, що $\ln\mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$. Далі, якщо виберемо $q_j = \left[\frac{1}{2}k_j\right]$, то з (13) і (14) маємо

$$b\lambda_{q_j}\Psi(\varphi(\lambda_{q_j})) \geqslant \ln q_j - 1 \geqslant \ln k_j - 4 \geqslant b\lambda_{k_j}\Psi(\varphi(\lambda_{k_j})) - 4.$$

Тому для кожного $\sigma \in \mathbb{R}$ маємо

$$M(\sigma, F) \geqslant \sum_{q_j \leqslant k \leqslant k_j} \exp\{-\ln a_k + \sigma\lambda_k\} \geqslant \frac{1}{2} k_j \exp\{-\lambda_{k_j}\Psi(\varphi(\lambda_{k_j})) + \sigma\lambda_{q_j}\} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\exp\{-\lambda_{k_j}\Psi(\varphi(\lambda_{k_j}))(1-b) + \sigma\lambda_{q_j}\} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\exp\left\{-(1-b)\lambda_{q_j}\Psi(\varphi(\lambda_{q_j})) + \sigma\lambda_{q_j} - \frac{4(1-b)}{b}\right\} =$$
$$= K_1\left(\exp\left\{-\lambda_{q_j}\Psi(\varphi(\lambda_{q_j})) + \frac{\sigma}{1-b}\lambda_{q_j}\right\}\right)^{1-b}, \quad K_1 = \frac{1}{2}\exp\{-\frac{4(1-b)}{b}\}.$$

Якщо виберемо $\sigma_j = (1-b)\varphi(\lambda_{q_j})$, то звідси матимемо

$$M(\sigma_j, F) \geqslant K_1\big(\exp\{\Phi(\varphi(\lambda_{q_j}))\}\big)^{1-b} =$$
$$= K_1\left(\exp\left\{\Phi\left(\frac{\sigma_j}{1-b}\right)\right\}\right)^{1-b} \geqslant K_1\mu\left(\frac{\sigma_j}{1-b}, F\right)^{1-b}.$$

Оскільки $b > \beta$, то, як при доведенні достатності, звідси отримуємо, що для функції (15) нерівність (3) не виконується. Теорема 1 повністю доведена.

1. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент . – М.: Наука. – 1976. – 536 с.
2. Шеремета М.М. Цілі ряди Діріхле . – К.: ІСДО. – 1993. – 168 с.
3. Valiron G. *Sur l'abscisse de convergence des series de Dirichlet* // Bull. Soc. Math de France. – 1924. – Vol. 52. – P. 86–98.
4. Притула Я.Я. *Про максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле* // Вісник Львівського ун-ту "Питання алгебри та мат. фізики". – 1995. – Вип. 43. – С. 25–30.
5. Шеремета М.Н. *Двучленная асимптотика целых рядов Дирихле* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1990. – Вып. 54. – С. 16–25.
6. Шеремета М.М., Притула Я.Я., Фединяк С.І. *Зростання рядів Діріхле* – Львів. – 1995. – 30 с. – Препринт N 18-95. – Наук.-учб. центр мат. моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України.
7. Винницкий Б.В. *О росте целых функций, заданых рядами* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(\lambda_n z)$ // Укр. матем. журн. – 1979. – Т. 31, N 5. – С. 534–540.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997

УДК 517.576

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

О. Б. Скасків, Р. Д. Боднар

Skaskiv O. B., Bodnar R. D. The speed of convergence of the Dirichlet series. One finds necessary condition for the thruth of the relation $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{h(n)}\ln\frac{1}{\sigma_n(F)}=+\infty$ in the class of absolutely convergent in the half plane $\{z: Re z<0\}$ Diriclet series

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{z\lambda_n},\ a_0=1,\ a_n\geqslant 0\ \ (n\geqslant 1),$$

where $h(x)\uparrow+\infty\ \ (x\to-0)$ is a certain function,

$$\sigma_n=\sup\left\{\frac{1}{\sum_{k=1}^n a_ke^{x\lambda_k}}-\frac{1}{F(z)}: x<0\right\}.$$

Через $H_a(\Lambda)$ позначимо клас аналітичних у півплощині $\Pi_a=\{z: Re\, z<a\}$, $-\infty<a\leqslant+\infty$, функцій F, зображуваних абсолютно збіжними в Π_a рядами Діріхле вигляду

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{z\lambda_n},\quad a_0=1,\quad a_n\geqslant 0\quad (n\geqslant 1),\tag{1}$$

де $\Lambda=(\lambda_n)$, $0=\lambda_0<\lambda_n\uparrow+\infty$ $(1\leqslant n\to+\infty)$. Визначимо подібно, як і в праці [1], для функції $F\in H_a(\Lambda)$

$$\sigma_n(F)=\sup\left\{\frac{1}{S_n(x)}-\frac{1}{F(x)}: x<a\right\},$$

де $S_n(x)=\sum_{j=0}^n a_je^{x\lambda_j}$. Відзначимо, що оцінки величин, визначених подібно як і $\sigma_n(F)$, для цілих функцій вигляду $f(x)=\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$, $a_0=1$, $a_n\geqslant 0$ $(n\geqslant 1)$, за допомогою часткових сум ряду Тейлора, використовуються у раціональній апроксимації на $[0,+\infty)$ таких функцій (див. [2]).

Нехай L – клас функцій $h(x)$ – додатних, неперервних, зростаючих до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ і L_1 – клас функцій $h\in L$ таких, що $h(x)\geqslant x$ $(x\geqslant 0)$, $h(0)=0$. У статті [3] доведено таку теорему.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50.

Робота виконана при частковій підтримці Міжнародної Соросівської Програми підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP), гранти N APU 071097 і N GSU 071164.

Теорема A[3]. *Нехай $h \in L_1$. Для того, щоб для кожного цілого ряду Діріхле $F \in H_{+\infty}(\Lambda)$ виконувалось співвідношення*

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{h(\ln n)} \ln \frac{1}{\sigma_n(F)} = +\infty \tag{2}$$

необхідно і досить, щоб

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{h(\ln n(t))}{t^2} dt < +\infty, \tag{3}$$

де $n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1$ – лічильна функція послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$.

У даній замітці встановлено, що в класі $H_0(\Lambda)$ ніяка умова на зростання лише послідовності Λ (у тому числі і умова (3)) не може забезпечувати справедливість співвідношення (2).

Теорема 1. *Для будь-яких функцій $h \in L_1$, $\Phi \in L$ і для кожної послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \leqslant n \to +\infty)$ існує функція $F \in H_0(\Lambda)$ вигляду (1) така, що*

$$\mu(x, F) := \sup\{a_n e^{x\lambda_n} : n \geqslant 0\} \leqslant \exp\left\{\Phi\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\} \quad (x_0 \leqslant x < 0), \ \sup\{a_n : n \geqslant 0\} = +\infty$$

і співвідношення (2) не виконується.

Доведення. Позначимо $c_n = \ln(n+1) - \ln n$ $(n \geqslant 1)$, $\varphi(t)$ – функцію, обернену до $\Phi(t)$. Припустимо, що

$$\varphi(\ln(n+1)) \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{c_k}{\lambda_k} \leqslant 1 \quad (n \geqslant 1) \tag{4}$$

і розглянемо ряд Діріхле вигляду (1) з коефіцієнтами, що визначаються у такий спосіб:

$$\ln a_n = \ln a_{n-1} + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k} \ \ (n \geqslant 1), \ \ a_0 = 1.$$

Зауважимо, що з (4) випливає $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$, а тому

$$\ln a_n = \ln(n+1) + \lambda_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{c_k}{\lambda_k} = o(\lambda_n) \quad (n \to +\infty) \tag{5}$$

і, отже, при фіксованому $x < 0$,

$$\ln a_n + x\lambda_n = (1 + o(1))x\lambda_n = -E_n \ln n \ \ (n \to +\infty),$$

де $E_n \to +\infty$, тому ряд (1) абсолютно збіжний в Π_0, тобто $F \in H_0(\Lambda)$. Відзначимо, що із (5) випливає $a_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$.

Оскільки

$$\kappa_n := \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \ln \frac{a_{n-1}}{a_n} = -\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{c_k}{\lambda_k} \uparrow 0 \ \ (n \to +\infty),$$

то для $x \in [\kappa_n, \kappa_{n+1}]$ (див., наприклад, [4, с. 19]) $\mu(x, F) = \max\{a_j e^{x\lambda_j} : j \geqslant 0\} = a_n e^{x\lambda_n}$, тому з (5) і (4) маємо для $x \in [\kappa_n, \kappa_{n+1}]$ і $n \geqslant 1$

$$\ln \mu(x, F) \leqslant \ln \mu(\kappa_{n+1}, F) = \ln(n+1) \leqslant \Phi\left(\frac{1}{|\kappa_n|}\right) \leqslant \Phi\left(\frac{1}{|x|}\right). \tag{6}$$

Зауважимо тепер, що для $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\sigma_n(F) &\geqslant \frac{1}{S_n(\kappa_{n+1})} - \frac{1}{F(\kappa_{n+1})} \geqslant \frac{1}{S_n(\kappa_{n+1})} - \frac{1}{S_{n+1}(\kappa_{n+1})} = \\ &= \mu(\kappa_{n+1}, F)(S_n(\kappa_{n+1})S_{n+1}(\kappa_{n+1}))^{-1} \geqslant ((n+1)(n+2)\mu(\kappa_{n+1}, F))^{-1}.\end{aligned} \tag{7}$$

Звідси, враховуючи (6) і нерівність $x \leqslant h(x)$, маємо при $n \to +\infty$

$$\ln \frac{1}{\sigma_n(F)} \leqslant 3\ln(n+1) + o(1) \leqslant (3 + o(1))h(\ln n) \tag{8}$$

і, отже, якщо виконується умова (4), то твердження теореми встановлено.

Припустимо тепер, що умова (4) не виконується. Виберемо підпослідовність $\lambda_k^* = \lambda_{n_k}$ таку, що

$$\frac{\varphi(\ln(k+1))c_k}{\lambda_k^*} \leqslant \frac{1}{2^k} \quad (k \geqslant 1).$$

Тоді

$$\varphi(\ln\,(n+1)) \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{c_k}{\lambda_k^*} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \leqslant 1 \quad (n \geqslant 1),$$

тобто для $\Lambda^* = (\lambda_k^*)$ умова (4) виконується.

Якщо тепер $\lambda_n \notin \Lambda^*$, то покладаємо $a_n = 0$. Якщо ж $\lambda_n \in \Lambda^*$, то коефіцієнт визначаємо, як і вище, тобто, знайшовши (a_k^*) за послідовністю Λ^* (як вище a_n за Λ), покладаємо $a_{n_k} = a_k^*$ $(k \geqslant 1)$, $a_0 = 1$, $\lambda_0^* = 0$. Нехай κ_k^* визначено за (a_k^*) і Λ^*. Тоді для $n_j \leqslant k < n_{j+1}$ маємо $S_k(\kappa_{j+1}^*) = S_{n_j}(\kappa_{j+1}^*)$ і, отже, з (7) (подібно до (8)) послідовно отримуємо

$$\sigma_k(F) \geqslant \frac{1}{S_{n_j}(\kappa_{j+1}^*)} - \frac{1}{F(\kappa_{j+1}^*)} \geqslant ((j+1)(j+2)\mu(\kappa_{j+1}^*, F))^{-1},$$

а також при $k \to +\infty$

$$\ln \frac{1}{\sigma_k(F)} \leqslant (3 + o(1))h(\ln j).$$

Залишилось зауважити, що $k \geqslant n_j \geqslant j$ $(j \geqslant 1)$. Крім цього, для $x \in [\kappa_n^*, \kappa_{n+1}^*]$ за допомогою (5) і (4), які виконуються тепер для (a_k^*) і (λ_k^*) маємо

$$\ln \mu(x, F) \leqslant \ln(n+1) \leqslant \Phi\left(\frac{1}{|\kappa_n^*|}\right) \leqslant \Phi\left(\frac{1}{|x|}\right).$$

Теорему доведено.

Якщо в теоремі 1 не вимагати, щоб для функції $F \in H_0(\Lambda)$ виконувалась умова $\sup\{a_n : n \geqslant 0\} = +\infty$, то шукана функція будується елементарно, досить вибрати підпослідовність $\{\lambda_n^*\} \subset \{\lambda_n\}$ таку, щоб $(\lambda_n^* - \lambda_{n-1}^*) \uparrow (n \to +\infty)$ і $\kappa_n^* = -(\lambda_n^* - \lambda_{n-1}^*)^{-1}\dfrac{1}{n^2} \uparrow 0$ $(n \to +\infty)$. Тоді

$$\ln a_n^* = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}$$

і для $x \in [\kappa_n^*, \kappa_{n+1}^*)$

$$\mu(x, F) = a_n^* e^{x\lambda_n^*} < \sup\{a_n^* : n \geqslant 0\} = A < +\infty.$$

Завершується доведення, подібно як і в теореми 1, з тією різницею, що тепер отримуємо при $n \to +\infty$

$$\ln \frac{1}{\sigma_n(F)} \leqslant 2 \ln n + \ln A + o(1).$$

1. Sheremeta M. N. *On the convergence rate of the partial sums of positive entire Dirichlet series* // Anal. Math.–1991.–V.17,N 1.–C. 47–53.
2 Erdos P., Reddy A. R. *Rational approximation on the positive real axis* // Proc. London Math. Soc.–1975.–V.31–P. 439-456.
3 Орищин О. Г., Скасків О. Б *Про швидкість збіжності часткових сум цілих рядів Діріхле* // Матем. Студії.–1997.–Т.7,N 2.–С.167–175.
4 Шеремета М. М. *Цілі ряди Діріхле*.–К:УСДО.–1993.–168 с.

Стаття надійшла до редколегії 12.10.97

УДК 517.53

МАКСИМАЛЬНИЙ ЧЛЕН І СУМА РЕГУЛЯРНО ЗБІЖНОГО ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РЯДУ

О.Б.Скасків , О.М.Трусевич

Skaskiv O. B., Trusevych O. M. Maximal term and sum of regulary convergent functional series For regulary convergent functional series $F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \varphi_n(z)$ (($\varphi_n(z)$ is G_α - proper sequence) we are obtained the conditions that the asymptotic equality

$$M(\alpha) \sim \mu(\alpha), \alpha \to +\infty$$

holds out an exceptional set where $M_F(\alpha) = \sup\{|F(z)| : z \in G_\alpha\}$, $\mu_F(\alpha) = \max_n \sup\{|a_n||\varphi_n(z)| : z \in G_\alpha\}$.

Нехай D— область на комплексній площині $\mathbb{C}$ (не виключаючи випадку $D = \mathbb{C}$), а $\{G_\alpha\}_{\alpha \geqslant 0}$ — сім'я областей, яка вичерпує D. Тобто, а) $G_{\alpha_1} \subset G_{\alpha_2}$ для всіх $\alpha_1 < \alpha_2$; б) $\bigcup_{\alpha > 0} G_\alpha = D$.

Розглянемо послідовність аналітичних в D функцій $(\varphi_n(z))$ таких, що $\varphi_n(\alpha) = \sup\{|\varphi_n(z)| : z \in G_\alpha\} < +\infty$ $(\forall \alpha \geqslant 0)$ і $\sup\{|\varphi_n(z)| : z \in D\} = +\infty$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Послідовність $(\varphi_n(z))$ називаємо G_α-правильною (порівняй з [1]), якщо знайдуться неспадні на $[0; +\infty)$ функції $l(\alpha) > 0$ $(\alpha \geqslant 0)$ і $h(\alpha) > 0$ $(\alpha \geqslant 0)$, і послідовності $0 \leqslant \beta_n \uparrow (1 \leqslant n \to +\infty)$ і $0 \leqslant \lambda_n \uparrow (1 \leqslant n \to +\infty)$ такі, що

$$\varphi_n(\alpha) = (1 + o(1))(l(\alpha))^{\beta_n} e^{h(\alpha)\lambda_n} \tag{1}$$

при $\alpha \to +\infty$ рівномірно за $n \in \mathbb{N}$.

Зауважимо, що G_α-правильними послідовностями при відповідному виборі $\{G_\alpha\}$ є ряд функціональних послідовностей: $(z^n)_{n \geqslant 0}$, якщо $G_\alpha = \{z : |z| < \alpha\}$; $(e^{z\lambda_n})_{n \leqslant 0}$, якщо $G_\alpha = \{z : Rez < \alpha\}$ і $0 \leqslant \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$; $(E_\rho(\mu_n z))_{n \geqslant 0}$, якщо $\rho \geqslant 0.5$ і $0 \leqslant \mu_n \uparrow +\infty$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50.

$(n \to +\infty)$, де $E\rho(z)$ — ціла функція Міттаг-Леффлера порядку $\rho > 0$, при відповідному виборі $\{G_\alpha\}$, а також деякі інші. Функціональний ряд

$$F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \varphi_n(z) \tag{2}$$

за G_α-правильною послідовністю $(\varphi_n(z))$ називаємо регулярно збіжним, якщо для всіх $\alpha \geqslant 0$ є збіжним ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|\varphi_n(\alpha)$. Відзначимо, що ряди, які широко використовуються за досить загальних припущень, як правило, є регулярно збіжними. Для регулярно збіжного ряду (2) позначимо $M_F(\alpha) = \sup\{|F(z)| : z \in G_\alpha\}$, $\mu_F(\alpha) = \max\{|a_n|\varphi_n(z) : n \in \mathbb{N}\}$ — максимальний член, $\nu(\alpha) = \nu_F(\alpha) = \max\{n : |a_n|\varphi_n(\alpha) = \mu_F(\alpha) : n \in \mathbb{N}\}$ — центральний індекс.

У замітці [2] доведено таку теорему.

Теорема А [2]. *Якщо для функції F вигляду (2) виконується умова*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty,$$

то

$$F(z) = a_\nu \varphi_\nu(z) + o(\mu_F(\alpha)) \tag{3}$$

при $\alpha \to +\infty$ $(\alpha \notin E)$ рівномірно за $z \in G_\alpha$, де $\nu = \nu_F(\alpha)$, E - деяка множина скінченної h-міри, тобто h-meas$E$=$\int_{E\cap[0;+\infty)} dh(x) < +\infty$.

Наступна теорема уточнює теорему А.

Теорема 1. *Нехай h і l — диференційовні на $[0;+\infty)$ функції, $l(\alpha) \uparrow +\infty$ $(\alpha \to +\infty)$, $\dfrac{dh(\alpha)}{d\ln l(\alpha)} \geqslant 1$ $(\alpha \geqslant \alpha_0)$. Якщо для функції F вигляду (2) виконується умова*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n + \beta_{n+1} - \beta_n} < +\infty, \tag{4}$$

то співвідношення (3) виконується при $\alpha \to +\infty, \alpha \notin E$ рівномірно за $z \in G_\alpha$, де E — деяка множина така, що $\int_{E\cap[0;+\infty)} d\ln l(\alpha) < +\infty$, тобто $\ln l - meas(E) < +\infty$.

Замість рядів (2) зручно розглянути ряди вигляду $M_1(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n (l(\alpha))^{\beta_n} e^{h(\alpha)\lambda_n}$ або, використовуючи підстановку $x = \ln l(\alpha)$, перейти до рядів вигляду

$$M(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{x\beta_n + \tau(x)\lambda_n}, \tag{5}$$

де $\tau(x) = h(l^{-1}(e^x))$, очевидно, задовольняє умову $\tau'(x) \geqslant 1 (x \geqslant x_0)$, якщо $dh(\alpha) \geqslant d\ln l(\alpha)$ $(\alpha \geqslant \alpha_0)$. При цьому доведемо теорему, яка з огляду на співвідношення (1), містить в собі теорему 1.

Теорема 2. *Якщо $\tau'(x) \geqslant 1$ $(x \geqslant x_0)$ і $b_n \geqslant 0$ $(n \geqslant 1)$, то для того, щоб для будь-якої функції $M(x)$, зображеної збіжним при $x \geqslant x_0$ рядом (5) із заданими послідовностями $(\beta_n), (\lambda_n)$ такими, що $\ln n = o(\lambda_n + \beta_n)$ $(n \to +\infty)$ виконувалося при $x \to +\infty$ $(x \notin E_1, \int_{E_1 \cap [x_0; +\infty)} dx < +\infty)$ співвідношення*

$$M(x) = (1 + o(1))\mu(x)$$

необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова (4), де $\mu(x) = \max\{b_n exp\{x\beta_n +] \lambda_n \tau(x)\} : n \in \mathbb{N}\}$

Зауважимо, що важливу роль при доведенні теореми 2 відіграє умова $\tau'(x) \geqslant 1$. Для послідовності $(\mu_n), 0 \leqslant \mu_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, вважаючи, що ряд $\sum_{p=0}^{+\infty}(\mu_{p+1} - \mu_p)^{-1}$ — збіжний, позначимо $\delta_k = \max\{(j - l + 1)^{-3/2} \sum_{p=l}^{j}(\mu_{p+1} - \mu_p)^{-1} : 1 \leqslant l \leqslant k - 1 \leqslant j < \infty\}$. У статті [3] встановлено лему (леми 1,3 [3]).

Лема 1. *Існує послідовність $c_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ така, що*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k < +\infty, \text{ де } \varepsilon_k = c_k \delta_k \in (0; 1/2),$$

при цьому

$$\sum_{n \neq \nu} \exp\{-\varepsilon_\nu |\mu_n - \mu_\nu|\} = o(1) \quad (\nu \to +\infty).$$

Наступна лема є варіантом леми 2 [3] и леми 1 [4] і доводиться подібно, повторюючи, наприклад, дослівно доведення першої частини леми 1 [4].

Лема 2. *Нехай $\nu(x)$ — довільна неспадна, додатна східчата функція, яка набуває натуральних значень при $x \in \mathbb{R}_+$. Якщо $(\varepsilon_k)_{k \geqslant 1}, \varepsilon_k \geqslant 0$ — довільна послідовність, то рівності $\nu(x \pm \varepsilon_{\nu(x)}) = \nu(x)$ виконуються для всіх $x \in [0; +\infty) \setminus E$, де E — деяка множина така, що $meas(E \bigcap [0; R]) = \int_{E \cap [0;R]} dx \leqslant 2(C + \sum_{n=1}^{\nu(R-0)} \varepsilon_n)$, а $C \geqslant 0$ — стала, що залежить тільки від функції $\nu(x)$.*

Доведення леми 3 дослівно повторює першу частину доведення леми 1, оскільки $\nu(x)$ володіє найпростішими властивостями центрального індекса.

Доведення теореми 2.

Доведемо спочатку достатність умови (4). Для цього виберемо $\mu_p = \beta_p + \lambda_p$. Тоді за лемою 2, якщо вибрати $\nu(x) = \nu_M(x)$ — центральний індекс ряду (5), одержимо, що рівності $\nu(x \pm \varepsilon_{\nu(x)}) = \nu(x)$ виконуються для всіх $x \in [0; +\infty) \setminus E$, де $measE \leqslant 2(C + \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k) < +\infty$.

Для всіх $x \in [0; +\infty) \setminus E$ за означенням максимального члена $\mu(x)$ при виборі $\nu = \nu_M(x)$ послідовно маємо

$$b_n \exp\{(x \pm \varepsilon_\nu)\beta_n + \tau(x \pm \varepsilon_\nu)\lambda_n\} \leqslant \mu(x \pm \varepsilon_\nu),$$

звідси,

$$b_n \exp\{x\beta_n + \tau(x)\lambda_n\} \leqslant \exp\{\mp\varepsilon_\nu\beta_n + (\tau(x) - \tau(x \pm \varepsilon_\nu)\lambda_n\}\mu(x \pm \varepsilon_\nu) =$$

$$= \mu_\nu \exp\{\pm\varepsilon_\nu(\beta_\nu - \beta_n) + (\lambda_\nu - \lambda_n)(\tau(x \pm \varepsilon_\nu) - \tau(x))\}.$$

Зауважимо, що $\tau(x \pm \varepsilon_\nu) - \tau(x) = \pm\varepsilon_\nu \tau'(x \pm \theta\varepsilon_\nu), 0 \leqslant \theta \leqslant 1$ тому, вибираючи перед ε_ν знак мінус у випадку $n < \nu$, а у випадку $n > \nu$ знак плюс, остаточно, із врахуванням умови $\tau'(x) \geqslant 1$, одержимо

$$b_n \exp\{x\beta_n + \tau(x)\lambda_n\} \leqslant \mu(x)\exp\{-\varepsilon_\nu|\beta_\nu + \lambda_\nu - \beta_n - \lambda_n|\} = \exp\{-\varepsilon_\nu|\mu_\nu - \mu_n|\}\mu(x)\}$$

для всіх $n \geqslant 0$ і $x \in [0; +\infty) \setminus E$, де $\nu = \nu_M(x)$. Звідси, для всіх $x \notin E$ для $\nu = \nu_M(x)$

$$M(x) \leqslant \mu(x)\big(1 + \sum_{n \neq \nu} \exp\{-\varepsilon_\nu|\mu_\nu - \mu_n|\}\big),$$

що разом з лемою 1 доводить достатність умови (4).

Доведемо необхідність умови (4) у теоремі 2. Нехай

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} + \beta_{n+1} - \lambda_n - \beta_n} = +\infty.$$

Покажемо, що існує $b_n \geqslant 0$ така, що для функції

$$M(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \exp\{x\beta_n + \tau(x)\lambda_n\}$$

існує множина E-нескінченної міри $measE = +\infty$, для яких $M(x) > (1+h)\mu(x)(x \in E)$, де $h > 0$ – деяка стала. Визначимо $\varkappa_{n+1} = \min\{\varkappa_n + \dfrac{\beta}{\mu_{n+1} - \mu_n}; \tau^{-1}(\tau(\varkappa_n) + \dfrac{\beta}{\mu_{n+1} - \mu_n})\}$, $\mu_n = \lambda_n + \beta_n$, $\beta > 0$, $\varkappa_1 = 0$, а також визначимо (b_n) рекурентним співвідношенням

$$\ln \frac{b_n}{b_{n+1}} = \varkappa_{n+1}(\beta_{n+1} - \beta_n) + \tau(\varkappa_{n+1})(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \quad (n \geqslant 1)$$

тобто

$$\ln b_n = -\sum_{j=1}^{n-1}(\varkappa_{j+1}(\beta_{j+1} - \beta_j) + \tau(\varkappa_{j+1})(\lambda_{j+1} - \lambda_j)), \quad b_1 = 1 \tag{6}$$

Зауважимо, що $\varkappa_{n+1} > \varkappa_n$,і, крім цього,

$$\tau(\varkappa_n) \geqslant \sum_{j=1}^{n-1}(\tau(\varkappa_{j+1}) - \tau(\varkappa_j)) = \sum_{j=1}^{n-1}\Big(\frac{(1-\delta_j)\beta}{\mu_{j+1} - \mu_j} + \delta_j\big(\tau(\varkappa_j + \frac{\beta}{\mu_{j+1} - \mu_j}) - \tau(\varkappa_j)\big)\Big),$$

де $\delta_j = 1$ у випадку $\varkappa_{j+1} = \varkappa_j + \dfrac{\beta}{\mu_{j+1} - \mu_j}$ і $\delta_j = 0$ у протилежному випадку.

Тому, враховуючи, що

$$\tau(\varkappa_j + \frac{\beta}{\mu_{j+1} - \mu_j}) - \tau(\varkappa_j) = \frac{\beta}{\mu_{j+1} - \mu_j}\tau'(\varkappa_j + \frac{\theta\beta}{\mu_{j+1} - \mu_j}) \geqslant \frac{\beta}{\mu_{j+1} - \mu_j}, \tag{7}$$

де $0 < \theta < 1$, отримуємо, що $\tau(\varkappa_n) \geqslant \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\beta}{\mu_{j+1}-\mu_j} \to +\infty (n \to +\infty)$. Звідси і з (6) маємо $\left(-\frac{1}{\mu_n}\ln b_n\right) \to +\infty$ $(n \to +\infty)$. Пригадуючи, що $\ln n = o(\mu_n)$ $(n \to +\infty)$, негайно маємо, що ряд $M(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{x\beta_n + \lambda_n \tau(x)}$ збіжний для всіх $x \geqslant 0$. Безпосередньо перевіряється, що $\nu_M(x) = n$ при $x \in [\varkappa_n; \varkappa_{n+1})$. Оскільки, як випливає з нерівності (7)

$$\varkappa_{n+1} = \tau^{-1}\Big(\tau(\varkappa_n) + \frac{\beta}{\mu_{n+1}-\mu_n}\Big) \quad (n \geqslant 1),$$

то для всіх $x \in [\varkappa_n; \varkappa_{n+1})$ маємо

$$\begin{aligned}\frac{M(x)}{\mu(x)} &\geqslant 1 + \frac{b_{n+1}\exp\{x\beta_{n+1} + \tau(x)\lambda_{n+1}\}}{b_n\exp\{x\beta_n + \tau(x)\lambda_n\}} \geqslant \\ &\geqslant 1 + \frac{b_{n+1}}{b_n}\exp\{\tau_n(\beta_{n+1}-\beta_n) + \tau(\varkappa_n)(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\} = \\ &= 1 + \exp\Big\{-\Big(\tau^{-1}\Big(\tau(\varkappa_n) + \frac{\beta}{\mu_{n+1}-\mu_n}\Big) - \varkappa_n\Big)(\beta_{n+1}-\beta_n) - \frac{\beta(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}{\mu_{n+1}-\mu_n}\Big\}.\end{aligned}$$

Залишилося врахувати, що

$$\tau^{-1}\Big(\tau(\varkappa_n) + \frac{\beta}{\mu_{n+1}-\mu_n}\Big) - \varkappa_n = \frac{1}{\tau'\Big(\tau^{-1}\Big(\tau(\varkappa_n) + \frac{\theta\beta}{\mu_{n+1}-\mu_n}\Big)\Big)}\frac{\beta}{\mu_{n+1}-\mu_n} \leqslant \frac{\beta}{\mu_{n+1}-\mu_n},$$

$0 < \theta < 1$. Тому $\dfrac{M(x)}{\mu(x)} \geqslant 1 + e^{-\beta}$ для всіх $x \geqslant \varkappa_1$. Теорему 2 доведено.

1. Осколков В.А. О росте целых функций, представленных регулярно сходящимися функциональными рядами // Матем. сб. – 1976. – Т.100, №2. – С.312 –334.
2. Величко С.Д., Скасків О.Б. Асимптотичні властивості одного класу функціональних рядів // Вісник ЛДУ, сер. мех. – мат. – 1989. – Вип. 32. – С. 50 – 51.
3. Скаскив О.Б. О минимуме модуля суммы ряда Дирихле с ограниченной последовательностью показателей // Матем. заметки. – 1994. – Т.56, №5. – С. 117 – 128.
4 Скаскив О.Б., Шеремета М.Н. Об асимптотическом поведении целых рядов Дирихле // Матем. сборн. – 1986 – Т.131, №11 – С. 385 – 402.

Стаття надійшла до редколегії 03.12.1997

УДК 517.537.2

ОЦІНКИ ПОХІДНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

С.І. Фединяк, М.М. Шеремета.

Fedynyak S.I., Sheremeta M.M. Estimates of Dirichlet series derivatives Let $\lambda = (\lambda_n)$ be a sequence of non-negative numbers. For an entire (absolutely convergent in $\mathbb{C}$) Dirichlet series $F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{sigma\lambda_n}$ we denot $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ and $S_1(\sigma, F) = M(\sigma, F')/M(\sigma, F)$, $\sigma < A$. By L we denot a class of non-negative, continuous, differentiable and growing to $+\infty$ on $[0, +\infty)$ functions β such that $x^2\beta'(x) \geqslant 1$ when $x \geqslant x_0$. For $\beta \in L$ and for a positive sequence $\gamma = (\gamma_n)$ via $A_1(\beta, \lambda, \gamma)$ we denote a class of complex sequences $a = (a_n)$ such that $|a_n| \leqslant \gamma_n \exp\{-\lambda_n\beta(\lambda_n)\}$ when $n \geqslant n_0$. Finally, let B be an inverse function to β, and $\Pi(\infty, B)$ be a class of entire Dirichlet series such that $S_1(\sigma, F) \leqslant (1 + o(1))B(\sigma)$ as $\sigma \to +\infty$.

It was shown that $F \in \Pi(\infty, B)$ for all $\beta \in L$ and $a \in A_1(\beta, \lambda, \gamma)$ iff $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$.

The analogous result was obtained for Dirichlet series with zero abscissa of absolutely convergence.

Нехай $\lambda = (\lambda_n)$ – послідовність невід'ємних чисел, а ряд Діріхле

$$F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

має абсцису абсолютної збіжності $A \in (-\infty, +\infty]$. Покладемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ і $S_1(\sigma, F) = \dfrac{M(\sigma, F')}{M(\sigma, F)}$, $\sigma < A$. Величина $S_1(\sigma, F)$ відіграє важливу роль у дослідженні асимптотичних властивостей аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь (див., напр., [1], глава III), а її поводження при $\sigma \to A$ зовні тієї чи іншої виняткової множини у випадку цілих рядів Діріхле (тобто, $A = +\infty$) добре вивчене в [2], а у випадку $A = 0$ – в [3]. Оцінкам $S_1(\sigma, F)$ для всіх $A \in (-\infty, +\infty]$, присвячена стаття [4]. Тут ми продовжимо ці дослідження.

Через Λ позначимо клас невід'ємних послідовностей $\lambda = (\lambda_n)$, а через L — клас невід'ємних, неперервно диференційовних, зростаючих до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функцій. Будемо говорити, що $\beta \in L_1$, якщо $\beta \in L$ і $x^2\beta'(x) \geqslant 1$ при $x \geqslant x_0$, і $\beta \in L_2$, якщо $\beta \in L$, $\beta > 0$ і $x^2\beta'(x)/\beta^2(x) \geqslant 1$ при $x \geqslant x_0$.

Для $\beta \in L$, $\lambda \in \Lambda$ і додатної послідовності $\gamma = (\gamma_n)$ через $A_1(\beta, \lambda, \gamma)$ позначимо клас комплексних послідовностей $a = (a_n)$ таких, що $|a_n| \leqslant \gamma_n \exp\{-\lambda_n\beta(\lambda_n)\}$ при $n \geqslant n_0$, а через $A_2(\beta, \lambda, \gamma)$ — клас послідовностей $a = (a_n)$ таких, що $|a_n| \leqslant \gamma_n \exp\{\lambda_n/\beta(\lambda_n)\}$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50.

Нехай, нарешті, B — функція, обернена до β, $\Pi(\infty, B)$ — клас цілих рядів Діріхле (1), для яких виконується співвідношення $S_1(\sigma, F) \leqslant (1+o(1))B(\sigma)$ при $\sigma \to +\infty$, а $\Pi(0, B)$ — клас рядів Діріхле (1), абсциса абсолютної збіжності яких дорівнює нулю і для яких $S_1(\sigma, F) \leqslant (1+o(1))B\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)$, $\sigma \to -0$.

Теорема 1. *Для того щоб $F \in \Pi(\infty, B)$ для кожних $\beta \in L_1, \lambda \in \Lambda$ і $a \in A_1(\beta, \lambda, \gamma)$, необхідно і досить, щоб $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$.*

Доведення. Припустимо, що $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$, і покладемо $R(s) = \sum\limits_{\lambda_n > B(\sigma)} a_n \exp(s\lambda_n)$. Тоді з умови $a \in A_1(\beta, \lambda, \gamma)$ для всіх досить великих σ маємо

$$|R(s)| \leqslant \sum_{\lambda_n > B(\sigma)} \gamma_n \exp\{-\lambda_n(\beta(\lambda_n) - \sigma)\} \leqslant \sum_{\lambda_n > B(\sigma)} \gamma_n = o(1) \tag{2}$$

при $\sigma \to +\infty$, звідки, зокрема, випливає, що ряд Діріхле (1) є цілим. Далі, оскільки при $\lambda_n > B(\sigma)$, завдяки умові $\beta \in L_1$, виконується

$$h(n, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(\lambda_n) - \sigma - \frac{1}{\lambda_n}(\ln \lambda_n - \ln B(\sigma)) \geqslant \int_{B(\sigma)}^{\lambda_n} (\beta'(t) - \frac{1}{t^2})\, dt \geqslant 0,$$

то для всіх досить великих σ маємо

$$\begin{aligned} |R'(s)| &\leqslant \sum_{\lambda_n > B(\sigma)} \gamma_n \lambda_n \exp\{-\lambda_n(\beta(\lambda_n) - \sigma)\} = \\ &= \sum_{\lambda_n > B(\sigma)} \gamma_n B(\sigma) \exp\{-\lambda_n h(n, \sigma)\} \leqslant \\ &\leqslant B(\sigma) \sum_{\lambda_n > B(\sigma)} \gamma_n = o(B(\sigma)),\ \sigma \to +\infty. \end{aligned} \tag{3}$$

У [4] показано, що якщо $P(s) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant B(\sigma)} a_n \exp(s\lambda_n)$, то для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, $M(\sigma, P') \leqslant B(\sigma)M(\sigma, P)$. Зауважимо, що ця нерівність доведена в [4] для додатних зростаючих до $+\infty$ послідовностей λ, але доведення аналогічне і для випадку $\lambda \in \Lambda$.

Тому з (2) і (3) випливає, що

$$\begin{aligned} M(\sigma, F') &\leqslant M(\sigma, P') + M(\sigma, R') \leqslant B(\sigma)M(\sigma, P) + o(B(\sigma)) \leqslant \\ &\leqslant B(\sigma)\{M(\sigma, F) + M(\sigma, R) + o(1)\} \leqslant B(\sigma)\{M(\sigma, F) + o(1)\} \end{aligned}$$

при $\sigma \to +\infty$, звідки випливає, що $F \in \Pi(\infty, B)$.

Нехай тепер $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = +\infty$, а $\alpha_n = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_j\right)^{-1/2}$. Тоді $\alpha_n \downarrow 0$ $(n \to \infty)$ і $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \gamma_j \geqslant \alpha_n \sum_{j=1}^{n} \gamma_j = \alpha_n^{-1} \to +\infty$ $(n \to \infty)$, тобто, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_n = +\infty$. Виберемо довільну функцію $\beta \in L_1$. Оскільки $x\beta(x) \uparrow +\infty$ $(x \to +\infty)$, то ми можемо вибрати послідовність $\lambda \in \Lambda$ так, щоб $\alpha_n = \exp\{-\lambda_n \beta(\lambda_n)\}$. Тоді, якщо $a_n = \gamma_n \exp\{-\lambda_n \beta(\lambda_n)\}$, то ряд Діріхле з такими коефіцієнтами є розбіжним для кожного $\sigma \geqslant 0$. Отже, якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n = +\infty$, то існують $\beta \in L_1, \lambda \in \Lambda$ і $a \in A_1(\beta, \lambda, \gamma)$, такі, що $F \notin \Pi(\infty, B)$. Теорему 1 доведено.

Перейдемо до рядів Діріхле, збіжних у деякій лівій півплощині. Можемо, не зменшуючи загальності, вважати, що такою півплощиною є $\{s : \operatorname{Re} s < 0\}$. Аналогом теореми 1 є така теорема.

Теорема 2. *Для того щоб $F \in \Pi(0, B)$ для кожних $\beta \in L_2, \lambda \in \Lambda$ і $a \in A_2(\beta, \lambda, \gamma)$, необхідно і досить, щоб $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$.*

Доведення цієї теореми таке ж, як і доведення теореми 1. Треба тільки при доведенні достатності в означенні $R(s)$ замість $\lambda_n > B(\sigma)$ взяти $\lambda_n > B(1/|\sigma|)$, а при доведенні необхідності вибрати $\beta(x) = \sqrt{x}$ і λ так, щоб $\alpha_n = \exp\{\sqrt{\lambda_n} - \lambda_n\}$. Тоді ряд з коефіцієнтами $a_n = \gamma_n \exp\{\lambda_n/\beta(\lambda_n)\}$ буде розбіжним для всіх $\sigma \geqslant -1$.

1. Стрелиц Ш.И. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. – Вильнюс: Минтис. – 1972. – 468 с.

2. Шеремета М.Н. *О производной целого ряда Дирихле* // Мат. сб. – 1988. – Т.137, N 1. – С.128–139.

3. Скасків О.Б. *Асимптотичні властивості аналітичних функцій, представлених степеневими рядами і рядами Діріхле.* – Автореф. докт. дис. – Львів. –1996. – 29 с.

4. Фединяк С.І. *Про похідну ряду Діріхле* // Мат. студії. – 1996. – Вип.6. – С. 53–58.

Стаття надійшла до редколегії 24.10.1997

УДК 517.956

РОЗВ'ЯЗОК ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРАМИ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Л. С. Баб'як

Babjak L.S. Solution of one problem in the Banach space for an evolutionary equation. We consider the evolutionary equation $\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + a_0 + a_1 \cos t + a_2 \sin t$, $t \in [0, \infty)$, $y(t_1) = y_1$, $y(t_2) = y_2$, $0 < t_1 < t_2 < \infty$, $(c,1)\lim_{t\to\infty} y(t) = y_n$ (the Cesaro limit) where the linear operator A is a infinitesimal generator of a bounded C_0 semigroup, a_0, a_1, a_2 are unknown parameters. We described the solution of this equation.

Для еволюційного рівняння першого порядку

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + a_0 + a_1 \cos t + a_2 \sin t, \qquad t \in [0, \infty),$$

де A – лінійний замкнений оператор у банаховому просторі B і a_0, a_1, a_2 – невідомі параметри з простору B, розглядається чотирьохточкова задача Коші:

$$y(0) = y_0; \quad y(t_1) = y_1; \quad y(t_2) = y_2; \quad (c,1) \lim_{t\to\infty} y(t) = y_\infty,$$

де $t_1, t_2 \in (0, \infty), t_1 \neq t_2$, а $y_0, y_1, y_2, y_\infty \in B$.

Встановлено умови існування розв'язку цієї задачі за умови, що банаховий простір B є рефлексивним і оператор A є генератором (твірним оператором) обмеженої півгрупи класу c_0.

У роботах Ейдельмана Ю.С. [1], [2] розглядалось еволюційне рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + p, \qquad t \in [0, \infty), \tag{1}$$

де p – невідомий параметр з рефлексивного банахового простору B, A – генератор півгрупи класу c_0. У них розв'язувалась двохточкова задача: за заданими $y(0)$ і $y(t_1)$, $t_1 > 0$, знайти пару $(y(t), p)$ таку, щоб $y(t)$ задовольняла рівняння (1) і в точках 0 та t_1 набувала відповідних значень $y(0)$ та $y(t_1)$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 34G10, 58D25.

У роботі Горбачука О.Л. [3] розглянуто те ж еволюційне рівняння (1) з параметрами p, але з іншими умовами:

$$y(0) = y_0; \quad (c,1) \lim_{t\to\infty} y(t) = y_\infty,$$

де $(c,1)\lim_{t\to\infty} y(t)$ – границя за Чезаро на нескінченності функції $y(t)$. Принагідно нагадаємо, що

$$(c,1) \lim_{t\to\infty} y(t) \stackrel{df}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(\xi) d\xi.$$

У праці [6] розглянуто еволюційне рівняння першого порядку у банаховому просторі з генератором обмеженої півгрупи класу c_0 з неоднорідною частиною у вигляді многочлена та досліджено пряму і обернену асимптотичні задачі.

У даній статті ми розглядаємо для неоднорідного еволюційного рівняння першого порядку

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + a_0 + a_1 \cos t + a_2 \sin t, \qquad t \in [0,\infty) \tag{2}$$

у рефлексивному банаховому просторі B, де a_0, a_1, a_2 – невідомі параметри з простору B, чотирьохточкову задачу Коші:

$$y(0) = y_0; \quad y(t_1) = y_1; \quad t(t_2) = y_2; \quad (c,1) \lim_{t\to\infty} y(t) = y_\infty, \tag{3}$$

де $t_1, t_2 \in (0,\infty), t_1 \neq t_2, y_0, y_1, y_2, y_\infty \in B$.

Потрібно, маючи фіксовані чотири елементи y_0, y_1, y_2, y_∞ з простору B, знайти параметри $a_0, a_1, a_2 \in B$ такі, щоб функція вигляду

$$y(t) = u(t) + x_0 + x_1 \cos t + x_2 \sin t,$$

де $x_0, x_1, x_2 \in B$, $u(t)$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння до рівняння (2) з умовою $(c,1)\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$, була розв'язком задачі Коші (2), (3).

Відомо, що коли A – генератор обмеженої півгрупи класу c_0 (див. [4], с. 50), то банаховий простір B розкладається на пряму суму замикання образу $\overline{R(A)}$ і ядра $\mathrm{Ker}A$ оператора A, тобто $B = \overline{R(A)} \dot{+} \mathrm{Ker}A$ (див. [5], т. 18.6.2). Через P позначимо проектор на ядро оператора A.

Теорема. *Нехай A – генератор обмеженої півгрупи класу c_0 у рефлексивному банаховому просторі B. Задача Коші (2), (3) має розв'язок*

$$y(t) = u(t) + x_0 + x_1 \cos t + x_2 \sin t,$$

де $x_0, x_1, x_2 \in B$, $u(t)$ - розв'язок відповідного однорідного рівняння для рівняння (2) з умовою $(c,1)\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ тоді, коли $y_0, y_1, y_2, y_\infty \in D(A)$ і

$$P\Big(y_0 - y_\infty - \frac{(y_1 - y_\infty - u(t_1))\sin t_2 - (y_2 - y_\infty - u(t_2))\sin t_1}{\sin(t_2 - t_1)}\Big) = 0,$$

$$t_2 - t_1 \neq \pi n, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

причому $a_0 = -Ay_\infty$;

$$a_1 = -A\Big[\frac{(y_1 - y_\infty - u(t_1))\sin t_2 - (y_2 - y_\infty - u(t_2))\sin t_1}{\sin(t_2 - t_1)}\Big] +$$

$$+\frac{(y_2-y_\infty-u(t_2))\cos t_1-(y_1-y_\infty-u(t_1))\cos t_2}{\sin(t_2-t_1)};$$

$$a_2=-A\Big[\frac{(y_2-y_\infty-u(t_2))\cos t_1-(y_1-y_\infty-u(t_1))\cos t_2}{\sin(t_2-t_1)}\Big]-$$

$$-\frac{(y_1-y_\infty-u(t_1))\sin t_2-(y_2-y_\infty-u(t_2))\sin t_1}{\sin(t_2-t_1)};$$

$$y(t)=u(t)+y_\infty+\frac{(y_1-y_\infty-u(t_1))\sin t_2-(y_2-y_\infty-u(t_2))\sin t_1}{\sin(t_2-t_1)}\cos t+$$

$$+\frac{(y_2-y_\infty-u(t_2))\cos t_1-(y_1-y_\infty-u(t_1))\cos t_2}{\sin(t_2-t_1)}\sin t.$$

Доведення. Нехай існує подання розв'язку задачі Коші (2), (3) у вигляді

$$y(t)=u(t)+x_0+x_1\cos t+x_2\sin t, \tag{4}$$

де $u(t)$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння для рівняння (2) з умовою

$$(c,1)\lim_{t\to\infty}u(t)=0,$$

коефіцієнти x_0, x_1, x_2 є елементами банахового простору B. Тоді, підставивши (4) у еволюційне рівняння (2), отримаємо рівність:

$$-x_1\sin t+x_2\cos t=A(x_o+x_1\cos t+x_2\sin t)+a_0+a_1\cos t+a_2\sin t. \tag{5}$$

Покажемо, що коефіцієнти x_0, x_1, x_2 повинні належати області визначення $D(A)$ оператора A. Оскільки частковий розв'язок рівняння (2) ми шукаємо у вигляді $x_0+x_1\cos t+x_2\sin t$, то маємо, що $(x_0+x_1\cos t+x_2\sin t)\in D(A)$ при $t\geqslant 0$. Отже, при $t=0$ отримаємо, що $(x_0+x_1)\in D(A)$, при $t=\pi$ отримаємо, що $(x_0-x_1)\in D(A)$, а тому $x_0\in D(A)$ (як їх сума) і $x_1\in D(A)$ (як їх різниця).

Тепер, при $t=\frac{\pi}{2}$ маємо, що $(x_0+x_2)\in D(A)$, при $t=\frac{3\pi}{2}$ маємо, що $(x_0-x_2)\in D(A)$, а тому $x_2\in D(A)$ (як їх різниця). Отже, x_0, x_1, x_2 належать $D(A)$.

Тому рівність (5) можна записати:

$$-x_1\sin t+x_2\cos t=Ax_0+Ax_1\cos t+Ax_2\sin t+a_0+a_1\cos t+a_2\sin t$$

або

$$x_2\cos t-x_1\sin t=(Ax_0+a_0)+(Ax_1+a_1)\cos t+(Ax_2+a_2)\sin t. \tag{6}$$

Прирівнюючи відповідні коефіцієнти лівої та правої частин у рівності (6), отримаємо такі співвідношення між коефіцієнтами-параметрами a_0, a_1, a_2 та елементами x_0, x_1, x_2 :

$$\begin{cases} Ax_0+a_0=0;\\ Ax_1+a_1=x_2;\\ Ax_2+a_2=-x_1.\end{cases} \tag{7}$$

Співвідношення (7) є системою трьох рівнянь. Знайдемо із (7) a_0, a_1, a_2 :

$$\begin{cases} a_0 = -Ax_0; \\ a_1 = -Ax_1 + x_2; \\ a_2 = -Ax_2 - x_1. \end{cases} \tag{8}$$

Оскільки x_0, x_1, x_2 належать області визначення $D(A)$ оператора A, то співвідношення (8) визначають параметри a_0, a_1, a_2.

Для того, щоб розв'язок вигляду (4) був розв'язком задачі Коші (2), (3), повинні виконуватись для функції $y(t)$ умови (3), тобто функція $y(t)$ повинна задовольняти рівняння (2), а в заданих точках $0, t_1, t_2$ повинна набувати заданих фіксованих значень y_0, y_1, y_2 відповідно, а границя за Чезаро функції $y(t)$ на нескінченності повинна бути рівною y_∞. Отже,

$$\begin{gathered} y(0) = u(0) + x_0 + x_1 = y_0; \\ y(t_1) = u(t_1) + x_0 + x_1 \cos t_1 + x_2 \sin t_1 = y_1; \\ y(t_2) = u(t_2) + x_0 + x_1 \cos t_2 + x_2 \sin t_2 = y_2; \\ (c,1) \lim_{t\to\infty} (u(t) + x_0 + x_1 \cos t + x_2 \sin t) = x_0 = y_\infty \end{gathered} \tag{9}$$

(границя за Чезаро функцій $\cos t$ і $\sin t$ при $t \to \infty$ рівна нулю, а $(c,1)\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$.) Звідси отримуємо, що

$$\begin{cases} x_0 = y_\infty; \\ x_1 \cos t_1 + x_2 \sin t_1 = y_1 - u(t_1) - x_0; \\ x_1 \cos t_2 + x_2 \sin t_2 = y_2 - u(t_2) - x_0; \\ u(0) + x_0 + x_1 = y_0, \end{cases}$$

де $u(0), u(t_1), u(t_2)$ – значення розв'язку $u(t)$ однорідного рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t), \qquad t \in [0, \infty)$$

відповідно у точках $0, t_1, t_2$. З другого рівняння системи виразимо x_1 і підставимо у третє рівняння:

$$\begin{cases} x_0 = y_\infty; \\ x_1 = \frac{y_1 - u(t_1) - y_\infty - x_2 \sin t_1}{\cos t_1}; \\ \frac{y_1 - u(t_1) - y_\infty - x_2 \sin t_1}{\cos t_1} \cos t_2 + x_2 \sin t_2 = y_2 - u(t_2) - y_\infty; \\ u(0) + y_\infty + x_1 = y_0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_0 = y_\infty; \\ x_1 = \dfrac{y_1 - u(t_1) - y_\infty - x_2 \sin t_1}{\cos t_1}; \\ x_2 = \dfrac{y_2 - y_\infty - u(t_2)) \cos t_1 - (y_1 - y_\infty - u(t_1)) \cos t_2}{\sin(t_2 - t_1)}; \\ u(0) + y_\infty + x_1 = y_0 \end{cases}$$

Отже, x_0, x_1, x_2 визначаються так:

$$\begin{cases} x_0 = y_\infty; \\ x_1 = \dfrac{(y_1 - y_\infty - u(t_1))\sin t_2 - (y_2 - y_\infty - u(t_2))\sin t_1}{\sin(t_2 - t_1)}; \\ x_2 = \dfrac{(y_2 - y_\infty - u(t_2))\cos t_1 - (y_1 - y_\infty - u(t_1))\cos t_2}{\sin(t_2 - t_1)}; \\ u(0) + y_\infty + x_1 = y_0. \end{cases} \tag{10}$$

Для того, щоб у (10) коефіцієнти x_1 і x_2 визначались потрібно, щоб $\sin(t_2 - t_1 \neq 0$, тобто $t_2 - t_1 \neq \pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$.

Слід зазначити, що $u(0)$ пов'язується з елементами y_0, y_1, y_2, y_∞ за допомогою рівності:

$$u(0) = y_0 - x_0 - x_1$$

або, враховуючи (10),

$$u(0) = y_0 - y_\infty - \frac{(y_1 - y_\infty - u(t_1))\sin t_2 - (y_2 - y_\infty - u(t_2))\sin t_1}{\sin(t_2 - t_1)}.$$

Щоб узгодити між собою частковий розв'язок неоднорідного еволюційного рівняння (2) із загальним розв'язком цього рівняння потрібно, щоб $P(y_0 - x_0 - x_1) = 0$, або за співвідношеннями (10)

$$P\Big(y_0 - y_\infty - \frac{(y_1 - y_\infty - u(t_1))\sin t_2 - (y_2 - y_\infty - u(t_2))\sin t_1}{\sin(t_2 - t_1)}\Big) = 0$$

(див. [3]).

Отже, розв'язок задачі Коші (2), (3) функція $y(t)$ визначається так:

$$y(t) = u(t) + x_0 + x_1\cos t + x_2 \sin t =$$
$$= u(t) + y_\infty + \frac{(y_1 - y_\infty - u(t_1))\sin t_2 - (y_2 - y_\infty - u(t_2))\sin t_1}{\sin(t_2 - t_1)}\cos t +$$
$$+ \frac{(y_2 - y_\infty - u(t_2))\cos t_1 - (y_1 - y_\infty - u(t_1))\cos t_2}{\sin(t_2 - t_1)}\sin t =$$
$$u(t) + y_\infty + \frac{(y_1 - y_\infty - u(t_1))\sin(t_2 - t) - (y_2 - y_\infty - u(t_2))\sin(t_1 - t)}{\sin(t_2 - t_1)}, \tag{11}$$

де $t_2 - t_1 \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$, $u(t)$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння до рівняння (2) з умовою $(c, 1)\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$.

Враховуючи (10) у співвідношеннях (8), визначимо параметри a_0, a_1, a_2:

$$a_0 = -Ay_\infty;$$
$$a_1 = -A\Big[\frac{(y_1 - y_\infty - u(t_1))\sin t_2 - (y_2 - y_\infty - u(t_2))\sin t_1}{\sin(t_2 - t_1)}\Big] +$$
$$+ \frac{(y_2 - y_\infty - u(t_2))\cos t_1 - (y_1 - y_\infty - u(t_1))\cos t_2}{\sin(t_2 - t_1)};$$
$$a_2 = -A\Big[+ \frac{(y_2 - y_\infty - u(t_2))\cos t_1 - (y_1 - y_\infty - u(t_1))\cos t_2}{\sin(t_2 - t_1)}\Big] -$$
$$- \frac{(y_1 - y_\infty - u(t_1))\sin t_2 - (y_2 - y_\infty - u(t_2))\sin t_1}{\sin(t_2 - t_1)}. \tag{12}$$

Із співвідношень (12) бачимо, що всі елементи y_0, y_1, y_2, y_∞ з простору B повинні належати області визначення $D(A)$ оператора A.

Отже, для чотирьох фіксованих елементів y_0, y_1, y_2, y_∞ банахового простору B, які належать $D(A)$ оператора A, визначаються параметри a_0, a_1, a_2 співвідношеннями (12) такі, що функція $y(t)$ у представленні (11), де $u(t)$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння до рівняння (2) з умовою $(c,1)\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$, є розв'язком задачі Коші для рівняння (2) з умовами (3).

Розв'язок задачі Коші (2), (3) єдиний, бо оператор A є генератором обмеженої півгрупи класу c_0.

Задача вимагає подальшого дослідження, коли $t_1 - t_2 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

1. Ейдельман Ю.С. *Двоточкова крайова задача для диференціального рівняння з параметром*// Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1983. – N4. – C.16 – 19.
2. Эйдельман Ю.С. *Естественность решения обратной задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве*// Дифференц. уравнения. – 1987. – Т.23, N9. – C.1674 – 1676.
3. Горбачук Е.Л. *Решение одной обратной задачи для эволюционального уравнения в банаховом пространстве* // Укр. мат. журн. – 1990. – Т.42, N9 – C.1262 – 1265.
4. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы.-М.:Изд-во иностр.лит. – 1962. – 830 с.
5. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.- М.: Наука, 1967. – 464 с.
6. Баб'як Л.С., Горбачук О.Л. *Пряма і обернена асимптотична задача для диференціального рівняння першого порядку у банаховому просторі* // "Алгебра і топологія".-К., 1993. – C.13 – 16.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997

УДК 517.95

СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

М.О.Оліскевич

Oliskevych M.O. Lyapunov's stability for a hyperbolic system with nonlocal boundary conditions. The mixed problem for a hyperbolic system of partial differential equations of the first order with unlocal boundary conditions is considered. The theorem of Liapunov's stability of the trivial solution is proved.

Стійкість розв'язків мішаних задач для гіперболічних ситем розглядалась багатьма авторами. У праці [1] досліджено стійкість тривіального розв'язку задачі Коші спеціального класу напівлінійних і квазілінійних гіперболічних систем. У [2] розглянуто стійкість розв'язку початкової задачі для лінійної гіперболічної системи в класі функцій з $L^2(S)$. У роботі [3] доведено теорему про стійкість за Ляпуновим стаціонарного розв'язку мішаної задачі для лінійної гіперболічної системи. У даній праці досліджено стійкість нульового розв'язку мішаної задачі з нелокальними крайовими умовами. Існування та єдиність розв'язку такої задачі доведено методом характеристик у праці [4].

Розглянемо в смузі $P = \{(x,t) : 0 < x < 1, t > 0\}$ мішану задачу для лінійної гіперболічної системи

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_j(x,t) = 0 \quad (i = \overline{1,n}), \tag{1}$$

де $\lambda_i(x,t)$ – дійсні і не обертаються в нуль, причому

$$\lambda_1(x,t) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_p(x,t) < 0 < \lambda_{p+1}(x,t) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(x,t). \tag{2}$$

Припускатимемо, що квадратична форма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j$ додатна, тобто існує $b_0 \geqslant 0$ таке, що $\forall(x,t) \in P$ виконується нерівність

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant b_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \forall\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{3}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35B35, 35L50.

Для системи (1) задано початкові

$$u_i(x,0)=\varphi_i(x) \quad (i=\overline{1,n}) \tag{4}$$

і крайові умови

$$u_i(0,t)=\alpha_i(t)\,u_i(1,t)+\int_{x_1}^{x_2} f_i(x,t)u_i(x,t)dx \quad (i=\overline{1,n}), \tag{5}$$

де $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$ і $\int_{x_1}^{x_2} f_i^2(x,t)dx>0$ $(i=\overline{1,n})$. Припускатимемо, що функції φ_i задовольняють умови узгодження

$$\varphi_i(0)=\alpha_i(0)\,\varphi_i(1)+\int_{x_1}^{x_2} f_i(x,0)\varphi_i(x)dx \quad (i=\overline{1,n}).$$

Позначатимемо $L_i(t)=\left|\dfrac{\lambda_i(1,t)}{\lambda_i(0,t)}\right|$, $\quad B_i(x,t)=\dfrac{\partial\lambda_i(x,t)}{\partial x}+2b_0$, $\quad |\lambda_i|=|\lambda_i(x,t)|$,
$\Omega_i(t)=|\lambda_i(0,t)|\int_{x_1}^{x_2} f_i^2(x,t)dx$, $\quad A_{1i}=\sup\limits_{(x,t)\in P}\alpha_i^2(t)$, $\quad A_{2i}=\inf\limits_{(x,t)\in P}\alpha_i^2(t)$,
$K_{1i}(x,t)=\sqrt{\Omega_i^2(t)+4\Omega_i(t)|\lambda_i(x,t)|}-\Omega_i(t)$, $K_{2i}(x,t)=\sqrt{\Omega_i^2(t)+4\Omega_i(t)|\lambda_i(x,t)|}+\Omega_i(t)$,
$K_i(x,t)=\dfrac{K_{1i}(x,t)}{K_{2i}(x,t)}$, $\qquad R_i(x,t)=|\lambda_i(x,t)|\Big(1-\ln\dfrac{|\lambda_i(x,t)|}{\Omega_i(t)}\Big)$,
$P_{ji}(x,t)=\dfrac{2B_i(x,t)-K_{ji}(x,t)}{2|\lambda_i(x,t)|}$, $\quad (j=1,2\,;i=\overline{1,n})$.

Нехай при $i\leqslant p$ виконується умова $\inf\limits_{(x,t)\in P}B_i(x,t)>\sup\limits_{(x,t)\in P}R_i(x,t)$ і для довільного $(x,t)\in P$,

$$\text{якщо}\ \ B_i\geqslant\frac{1}{2}K_{2i}\,,\quad \text{то}\quad A_{1i}\leqslant\inf_{(x,t)\in P}L_iK_ie^{P_{2i}(x,t)}\,, \tag{6}$$

$$\text{якщо}\ \ \frac{1}{2}K_{2i}>B_i>\Omega_i\,,\quad \text{то}\quad A_{1i}\leqslant\inf_{(x,t)\in P}L_i\frac{B_i-\Omega_i}{B_i}\,, \tag{7}$$

$$\text{якщо}\ |\lambda_i|>\Omega_i\ \text{і}\ \Omega_i\geqslant B_i>R_i,\quad \text{то}\quad A_{1i}<\inf_{(x,t)\in P}\Big(L_i\sup_{\delta_i\geqslant\delta_{1i}}\frac{e^{-T_{1i}(x,t,\delta_i)}}{1+\delta_i}\Big), \tag{8}$$

$$\text{де}\quad \delta_{1i}=\max\left(\sup_{(x,t)\in P}\frac{\Omega_i(t)}{|\lambda_i|-\Omega_i}\,;\ \sup_{(x,t)\in P}\frac{\Omega_i(t)}{|\lambda_i|\exp\Big(\frac{B_i-|\lambda_i|}{|\lambda_i|}\Big)-\Omega_i}\right),$$

$$T_{1i}(x,t,\delta_i)=\min_{z\geqslant 0}\Big(B_i(x,t)+z|\lambda_i|=\big(1+\frac{1}{\delta_i(x,t)}\big)\Omega_i(t)e^z\Big)\,;$$

а при $i>p$

$$\text{якщо}\ B_i(x,t)>0\,,\quad \text{то}\quad A_{2i}>\sup_{(x,t)\in P}\Big(L_i\inf_{\delta_i\geqslant\delta_{2i}}\frac{\exp(-T_{2i}(x,t,\delta_i))}{1-\delta_i}\Big), \tag{9}$$

$$\text{де}\quad \delta_{2i}=\sup_{(x,t)\in P}\frac{\Omega_i(t)}{B_i(x,t)+\Omega_i(t)}\,,$$

$$T_{2i}(x,t,\delta_i)=\big\{z\geqslant 0:B_i(x,t)-z|\lambda_i|=\big(\frac{1}{\delta_i(x,t)}-1\big)\Omega_i(t)e^z\big\}\,,$$

$$\text{якщо}\ B_i(x,t)\leqslant 0\,,\quad \text{то}\quad A_{2i}>\sup_{(x,t)\in P}L_iK_i^{-1}e^{-P_{1i}(x,t)}\,. \tag{10}$$

Теорема. *Нехай функції* λ_i, $\dfrac{\partial\lambda_i}{\partial x}$, b_{ij}, f_i *неперервні і обмежені в* $\overline{P}$, *функція* $\varphi_i \in C[0,1]$ *і виконуються умови (6), (7), (8), (9), (10).*

Тоді узагальнений [4] (неперерінний в $\overline{P}$*) розв'язок задачі (1), (4), (5) експоненціально стійкий, тобто виконується нерівність*

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^n u_i^2(x,t)\,dx \leqslant Ce^{-\beta t}\int_0^1 \sum_{i=1}^n \varphi_i^2(x)\,dx\,, \tag{11}$$

де $0<\beta<\beta_0$; $\beta_0\,, C$ *– додатні сталі, які залежать від коефіцієнтів системи і крайових умов.*

Доведення. Домножимо i-те рівняння системи (1) на $2e^{\gamma_i x}e^{\beta t}u_i(x,t)$ і проінтегруємо по $P_t=\{(x,\tau): 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant\tau\leqslant t\}$. Матимемо

$$\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}e^{\gamma_i x}\frac{\partial u_i^2(x,\tau)}{\partial\tau}dxd\tau-\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}e^{\gamma_i x}\lambda_i(x,\tau)\frac{\partial u_i^2(x,\tau)}{\partial x}dxd\tau+$$
$$+2\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}e^{\gamma_i x}\sum_{j=1}^n b_{ij}(x,\tau)u_j(x,\tau)u_i(x,\tau)dxd\tau=0\quad (i=\overline{1,n}),$$

$$\int_0^t\int_0^1 e^{\gamma_i x}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(e^{\beta\tau}u_i^2(x,\tau)\right)dxd\tau-\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\gamma_i x}\lambda_i(x,\tau)u_i^2(x,\tau)\right)dxd\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}\Big(\frac{\partial\lambda_i(x,\tau)}{\partial x}-\beta+\gamma_i\lambda_i(x,\tau)\Big)e^{\gamma_i x}u_i^2(x,\tau)dxd\tau+$$
$$+2\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}e^{\gamma_i x}\sum_{j=1}^n b_{ij}(x,\tau)u_j(x,\tau)u_i(x,\tau)dxd\tau=0\quad (i=\overline{1,n}),$$

$$\int_0^1 e^{\beta t}e^{\gamma_i x}u_i^2(x,t)dx-\int_0^1 e^{\gamma_i x}u_i^2(x,0)dx+\int_0^t e^{\beta\tau}\big[\lambda_i(0,\tau)u_i^2(0,\tau)-\lambda_i(1,\tau)e^{\gamma_i}u_i^2(1,\tau)\big]d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}\Big(\frac{\partial\lambda_i(x,\tau)}{\partial x}-\beta+\gamma_i\lambda_i(x,\tau)\Big)e^{\gamma_i x}u_i^2(x,\tau)dxd\tau+$$
$$+2\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}e^{\gamma_i x}\sum_{j=1}^n b_{ij}(x,\tau)u_j(x,\tau)u_i(x,\tau)dxd\tau=0\quad (i=\overline{1,n}).$$

Додавши і віднявши від лівої частини рівності $\int_0^t\int_0^1 2b_0e^{\beta\tau}e^{\gamma_i x}u_i^2dxd\tau$, отримаємо

$$\int_0^1 e^{\beta t}e^{\gamma_i x}u_i^2(x,t)dx-\int_0^1 e^{\gamma_i x}\varphi_i^2(x)dx+\int_0^t e^{\beta\tau}\big[\lambda_i(0,\tau)u_i^2(0,\tau)-\lambda_i(1,\tau)e^{\gamma_i}u_i^2(1,\tau)\big]d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}\Big(B_i(x,\tau)-\beta+\gamma_i\lambda_i(x,\tau)\Big)e^{\gamma_i x}u_i^2(x,\tau)dxd\tau+$$
$$+2\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}e^{\gamma_i x}\Big(\sum_{j=1}^n b_{ij}(x,\tau)u_i(x,\tau)u_j(x,\tau)-b_0u_i^2(x,\tau)\Big)dxd\tau\equiv \tag{12}$$
$$\equiv\int_0^1 e^{\beta t}e^{\gamma_i x}u_i^2(x,t)dx-\int_0^1 e^{\gamma_i x}\varphi_i^2(x)dx+D_i+$$

$$+2\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}e^{\gamma_i x}\Big(\sum_{j=1}^n b_{ij}(x,\tau)u_i(x,\tau)u_j(x,\tau)-b_0u_i^2(x,\tau)\Big)dxd\tau=0 \quad (i=\overline{1,n}).$$

Якщо $D_i\geqslant 0$ для кожного $i=\overline{1,n}$, то будемо мати:

$$e^{\beta t}\int_0^1 u_i^2(x,t)dx-e^{|\gamma_i|}\int_0^1\varphi_i^2(x)dx+$$
$$+2\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}\Big(\sum_{j=1}^n b_{ij}(x,\tau)u_i(x,\tau)u_j(x,\tau)-b_0u_i^2(x,\tau)\Big)dxd\tau\leqslant 0 \quad (i=\overline{1,n}).$$

Підсумувавши ці нерівності від 1 до n, отримаємо

$$e^{\beta t}\int_0^1\sum_{i=1}^n u_i^2(x,t)dx-\exp\big(\max_i|\gamma_i|\big)\int_0^1\sum_{i=1}^n\varphi_i^2(x)dx+$$
$$+2\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}\Big(\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,\tau)u_i(x,\tau)u_j(x,\tau)-b_0\sum_{i=1}^n u_i^2(x,\tau)\Big)dxd\tau\leqslant 0.$$

Оскільки виконується умова (3), то для $0<\beta<\beta_0$ матимемо

$$\int_0^1\sum_{i=1}^n u_i^2(x,t)dx\leqslant Ce^{-\beta t}\int_0^1\sum_{i=1}^n\varphi_i^2(x)dx,$$

що і треба було довести.

Отже, нерівність (11) виконуватиметься, якщо в (12) $D_i\geqslant 0$. Розглянемо доданок D_i і виберемо γ_i,β так, щоб $D_i\geqslant 0$. Врахувавши умови (4), для кожного $i=\overline{1,n}$ матимемо

$$\pm u_i^2(0,t)=\pm\alpha_i^2(t)u_i^2(1,t)\pm\Big(\int_{x_1}^{x_2} f_i(x,t)u_i(x,t)dx\Big)^2\pm 2\alpha_i u_i(1,t)\int_{x_1}^{x_2} f_i(x,t)u_i(x,t)dx\geqslant$$
$$\geqslant\pm\alpha_i^2(t)u_i^2(1,t)\pm\Big(\int_{x_1}^{x_2} f_i(x,t)u_i(x,t)dx\Big)^2-\delta_i(x,t)\alpha_i^2(t)u_i^2(1,t)-$$
$$-\frac{1}{\delta_i(x,t)}\Big(\int_{x_1}^{x_2} f_i(x,t)u_i(x,t)dx\Big)^2\geqslant(\pm1-\delta_i(x,t))\alpha_i^2(t)u_i^2(1,t)-$$
$$-\big(\frac{1}{\delta_i(x,t)}\mp1\big)\Big(\int_{x_1}^{x_2} f_i(x,t)u_i(x,t)dx\Big)^2\geqslant(\pm1-\delta_i(x,t))\alpha_i^2(t)u_i^2(1,t)-$$
$$-\big(\frac{1}{\delta_i(x,t)}\mp1\big)\int_{x_1}^{x_2} f_i^2(\theta,t)d\theta\int_{x_1}^{x_2} u_i^2(x,t)dx,$$

якщо $\dfrac{1}{\delta_i(x,t)}\pm1>0,\ \delta_i(x,t)>0\ (i=\overline{1,n})$.

Згідно з цими оцінками і умовами (2) отримаємо для виразів D_i такі нерівності: для $i\leqslant p$

$$D_i\geqslant\int_0^t\big(-(1+\delta_i(x,\tau))|\lambda_i(0,\tau)|\alpha_i^2(\tau)+|\lambda_i(1,\tau)|e^{\gamma_i}\big)u_i^2(1,\tau)d\tau-$$
$$-\int_0^t\Big(\big(\frac{1}{\delta_i(x,\tau)}+1\big)|\lambda_i(0,\tau)|\int_{x_1}^{x_2} f_i^2(\theta,t)d\theta\int_{x_1}^{x_2} u_i^2(x,t)dx\Big)d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}\big(B_i(x,\tau)-\beta+\gamma_i\lambda_i(x,\tau)\big)e^{\gamma_i x}u_i^2(x,\tau)dxd\tau$$

і для $i > p$

$$D_i \geqslant \int_0^t \big((1-\delta_i(x,\tau))|\lambda_i(0,\tau)|\alpha_i^2(\tau) - |\lambda_i(1,\tau)|e^{\gamma_i}\big)u_i^2(1,\tau)d\tau -$$
$$-\int_0^t \Big(\big(\frac{1}{\delta_i(x,\tau)}-1\big)|\lambda_i(1,\tau)|\int_{x_1}^{x_2} f_i^2(\theta,t)d\theta \int_{x_1}^{x_2} u_i^2(x,t)dx\Big)d\tau +$$
$$+\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}\big(B_i(x,\tau)-\beta+\gamma_i\lambda_i(x,\tau)\big)e^{\gamma_i x}u_i^2(x,\tau)dxd\tau\,.$$

Позначивши $\Delta_i(x,t) = \begin{cases} 1+\dfrac{1}{\delta_i(x,t)}, & \text{якщо } i \leqslant p, \\ \dfrac{1}{\delta_i(x,t)}-1, & \text{якщо } i > p, \end{cases}$ отримаємо: для $i \leqslant p$

$$D_i \geqslant \int_0^t \big(-(1+\delta_i(x,\tau))|\lambda_i(0,\tau)|\alpha_i^2(\tau) + |\lambda_i(1,\tau)|e^{\gamma_i}\big)u_i^2(1,\tau)d\tau -$$
$$+\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}\big((B_i(x,\tau)-\beta+\gamma_i\lambda_i)e^{\gamma_i x} - \Delta_i(x,\tau)\Omega_i(\tau)\big)u_i^2(x,\tau)dxd\tau$$

і для $i > p$

$$D_i \geqslant \int_0^t \big((1-\delta_i(x,\tau))|\lambda_i(0,\tau)|\alpha_i^2(\tau) - |\lambda_i(1,\tau)|e^{\gamma_i}\big)u_i^2(1,\tau)d\tau -$$
$$+\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}\big((B_i(x,\tau)-\beta+\gamma_i\lambda_i)e^{\gamma_i x} - \Delta_i(x,\tau)\Omega_i(\tau)\big)u_i^2(x,\tau)dxd\tau\,,$$

причому $0 < \delta_i(x,t) < 1$.

Отже, $D_i \geqslant 0$, якщо $\forall (x,t) \in P$ виконуються умови

$$(1+\delta_i(x,t))\alpha_i^2(t) \leqslant L_i(t)e^{\gamma_i} \quad \text{для } i \leqslant p\,, \tag{13}$$

$$(1-\delta_i(x,t))\alpha_i^2(t) \geqslant L_i(t)e^{\gamma_i} \quad \text{для } i > p\,, \tag{14}$$

$$(B_i(x,t)-\beta+\gamma_i\lambda_i(x,t))e^{\gamma_i x} \geqslant \Delta_i(x,t)\Omega_i(t) \quad \text{для } i=\overline{1,n}\,. \tag{15}$$

Розглянемо спочатку умову (15).

Якщо $i \leqslant p$, то $\lambda_i(x,t) < 0$ і умова (15) буде мати вигляд

$$(B_i-\beta-\gamma_i|\lambda_i|)e^{\gamma_i x} \geqslant \Delta_i\Omega_i(t) \quad \text{для } i=\overline{1,n}\,.$$

Якщо $\forall (x,t) \in P$

$$B_i(x,t)-\Delta_i(x,t)\Omega_i(t) \geqslant 0\,,\ \text{для}\, 0 \leqslant \beta \leqslant \inf_{(x,t)\in P}(B_i(x,t)-\Delta_i(x,t)\Omega_i(t)) \tag{16}$$

то γ_i можна вибрати:

1) невід'ємним, а саме

$$0 \leqslant \gamma_i \leqslant \inf_{(x,t)\in P} \left(\frac{B_i(x,t) - \Delta_i(x,t)\Omega_i(t) - \beta}{|\lambda_i(x,t)|} \right), \tag{17}$$

оскільки у цьому випадку маємо

$$(B_i(x,t) - \beta - \gamma_i|\lambda_i|)e^{\gamma_i x} \geqslant B_i(x,t) - \beta - \gamma_i|\lambda_i| \geqslant \Delta_i\Omega_i(t)$$

або

2) від'ємним

$$\sup_{(x,t)\in P} (-T_i(x,t,\delta_i)) \leqslant \gamma_i < 0\,, \tag{18}$$

де $T_i(x,t,\delta_i)$ – точка перетину графіків функцій $y(z) = B_i(x,t) - \beta + z|\lambda_i(x,t)|$ і $y(z) = \Delta_i(x,t)\Omega_i(t)e^z$, $z \geqslant 0$, оскільки у цьому випадку умова (15) набуде вигляду

$$(B_i(x,t) - \beta - \gamma_i|\lambda_i|)e^{\gamma_i} \geqslant \Delta_i\Omega_i(t)\,.$$

Якщо

$$\Delta_i(x,t)\Omega_i(t) \geqslant B_i(x,t) \geqslant R_i(x,t) + \frac{\ln \Delta_i(x,t)}{|\lambda_i(x,t)|} \tag{19}$$

$$\text{і} \qquad |\lambda_i(x,t)| > \Delta_i(x,t)\Omega_i(t)\,, \tag{20}$$

то для

$$0 \leqslant \beta \leqslant \inf_{(x,t)\in P} \left(B_i(x,t) - R_i(x,t) - \frac{\ln \Delta_i(x,t)}{|\lambda_i(x,t)|} \right) \tag{21}$$

γ_i можна вибрати лише недодатним, а саме

$$\sup_{(x,t)\in P} (-T_{2i}(x,t,\delta_i)) \leqslant \gamma_i \leqslant \inf_{(x,t)\in P} (-T_{1i}(x,t,\delta_i))\,, \tag{22}$$

де $T_{1i}(x,t,\delta_i)$, $T_{2i}(x,t,\delta_i)$ — точки перетину графіків функцій $y(z) = \Delta_i(x,t)\Omega_i(t)e^z$ і $y(z) = B_i(x,t) - \beta + z|\lambda_i(x,t)|$, $z \geqslant 0$, причому $T_{2i}(x,t,\delta_i) > T_{1i}(x,t,\delta_i)$.

Для вказаного β умови (19), (20) є необхідними умовами того, що ці графіки перетинаються.

Якщо $i > p$, то $\lambda_i(x,t) > 0$ і умова (15) набуде вигляду

$$(B_i(x,t) - \beta + \gamma_i|\lambda_i(x,t)|)\, e^{\gamma_i x} \geqslant \Delta_i(x,t)\Omega_i(t)\,.$$

У цьому випадку γ_i можна вибрати невід'ємним, а саме

$$\gamma_i \geqslant \max\Big(0; \sup_{(x,t)\in P} \Big(-\frac{B_i(x,t) - \beta - \Delta_i\Omega_i(t)}{\lambda_i} \Big)\Big)\,, \tag{23}$$

оскільки

$$(B_i(x,t) - \beta + \gamma_i|\lambda_i|)e^{\gamma_i x} \geqslant B_i(x,t) - \beta + \gamma_i|\lambda_i| \geqslant \Delta_i\Omega_i(t)\,.$$

Якщо ж $B_i(x,t) \geqslant \Delta_i(x,t)\Omega_i(t)$ $\forall (x,t) \in P$, то γ_i можна вибрати недодатним для $0 \leqslant \beta \leqslant \inf\limits_{(x,t)\in P}(B_i(x,t) - \Delta_i\Omega_i(t))$:

$$\sup_{(x,t)\in P}(-T_{2i}(x,t,\delta_i)) \leqslant \gamma_i \leqslant 0\,, \tag{24}$$

де $T_{2i}(x,t,\delta_i)$ — точка перетину графіків функцій $y(z) = B_i(x,t) - \beta - z\lambda_i$ і $y(z) = \Delta_i\Omega_i(t)e^z$, причому $T_{2i}(x,t,\delta_i) \leqslant B_i(x,t)/|\lambda_i(x,t)|$.

Розглянемо умову (13).

1) Якщо $B_i(x,t) > \Omega_i(t)$, то вибираємо $\delta_i(x,t)$ так, щоб

$$B_i(x,t) > \left(1 + \frac{1}{\delta_i(x,t)}\right)\Omega_i(t)\,,$$

тобто $\delta_i(x,t) > \dfrac{\Omega_i(t)}{B_i(x,t) - \Omega_i(t)}$. Тоді γ_i можна вибрати невід'ємним для $0 < \beta < \inf\limits_{(x,t)\in P}(B_i - \Delta_i\Omega_i)$. Згідно з (17) виберемо $\gamma_i = \inf\limits_{(x,t)\in P}\left(\dfrac{1}{|\lambda_i|}(B_i(x,t) - \beta - \Delta_i\Omega_i(t))\right)$ і отримаємо умову (13) у вигляді

$$A_{1i} < \inf_{(x,t)\in P} L_i(t)\frac{\exp\left(\dfrac{1}{|\lambda_i|}\left(B_i(x,t) - \Omega_i - \dfrac{\Omega_i}{\delta_i}\right)\right)}{1+\delta_i}\exp\Big(\frac{-\beta}{\lambda_i(x,t)}\Big)\,.$$

Знайдемо максимум функції $f(\delta_i) = \dfrac{\exp\left(\dfrac{1}{|\lambda_i|}(B_i(x,t) - \Omega_i) - \dfrac{\Omega_i(t)}{|\lambda_i|\delta_i}\right)}{1+\delta_i}$ для $\delta_i(x,t) > \dfrac{\Omega_i(t)}{B_i(x,t) - \Omega_i(t)}$:

$$f'(\delta_i) = \frac{1}{1+\delta_i}\exp\Big(\frac{B_i(x,t) - \Omega_i(t)}{|\lambda_i(x,t)|} - \frac{\Omega_i(t)}{|\lambda_i|\delta_i}\Big)\Big(\frac{\Omega_i(t)}{|\lambda_i|\delta_i^2} - \frac{1}{1+\delta_i}\Big) = 0\,,$$

якщо $\delta_i(x,t) = \dfrac{\Omega_i(t) \pm \sqrt{\Omega_i^2(t) + 4\Omega_i(t)|\lambda_i|}}{2|\lambda_i(x,t)|}$.

Оскільки ми вибираємо $\delta_i(x,t) > 0$, то $f(\delta_i(x,t))$ досягає максимуму в точці $\delta_i(x,t) = \dfrac{K_{2i}}{2|\lambda_i|}$, якщо $\dfrac{K_{2i}}{2|\lambda_i|} > \dfrac{\Omega_i(t)}{B_i(x,t) - \Omega_i(t)}$, тобто якщо

$$B_i(x,t) > \frac{1}{2}K_{2i}(x,t) > \Omega_i(t)\,. \tag{25}$$

Отже, при виконанні умови (25) вибираємо $\delta_i = \dfrac{K_{2i}}{2|\lambda_i|}$, і $D_i \geqslant 0$ для $0 < \beta < \beta_{1i}$ при

$$A_{1i} < \inf_{(x,t)\in P} L_i(t)K_i(x,t)\exp(P_{2i}(x,t))\,,$$

де $\beta_{1i} = \min\Big(\inf\limits_{(x,t)\in P}\Big(B_i - \dfrac{K_{2i}}{2}\Big); \inf\limits_{(x,t)\in P}\Big(|\lambda_i|\ln\Big(L_i\dfrac{K_i}{\alpha_i^2}\exp(P_{2i}(x,t))\Big)\Big)\Big)$.

Якщо ж $\dfrac{K_{2i}(x,t)}{2} \geqslant B_i(x,t) > \Omega_i(t)$, то вибираємо $\delta_i > \dfrac{\Omega_i(t)}{B_i(x,t)-\Omega_i(t)-\varepsilon}$, де ε — достатньо мале додатне число , і якщо

$$A_{1i} \leqslant \inf_{(x,t)\in P} L_i(t)\frac{B_i(x,t)-\Omega_i(t)}{B_i(x,t)}\,, \text{ то } D_i \geqslant 0 \text{ для } 0<\beta<\varepsilon.$$

2) Якщо

$$|\lambda_i(x,t)| > \Omega_i(t) \quad \text{ і } \quad \Omega_i(t) \geqslant B_i(x,t) > R_i(x,t)\,,$$

то згідно з (22) вибираємо $\gamma_i = \inf\limits_{(x,t)\in P} T_{1i}(x,t,\delta_i)$ і вимагаємо, щоб

$$A_{1i} < \inf_{(x,t)\in P}\Big(L_i(t)\frac{\exp(-T_{1i}(x,t,\delta_i))}{1+\delta_i(x,t)}\Big)\,.$$

Вибираємо $\delta_i(x,t)$ з умов:

$$B_i(x,t) > \Big(R_i(x,t) + \frac{1}{|\lambda_i(x,t)|}\ln\big(1+\frac{1}{\delta_i(x,t)}\big)\Big); \quad |\lambda_i(x,t)| > \big(1+\frac{1}{\delta_i(x,t)}\big)\Omega_i(t)\,;$$

значення функції $f(\delta_i(x,t)) = \dfrac{\exp(-T_{1i})}{1+\delta_i}$ максимальне. У цьому випадку $0<\beta<\beta_{2i}$, де $\beta_{2i} = \inf\limits_{(x,t)\in P}\Big(B_i(x,t) - |\lambda_i(x,t)|\Big(1-\ln\dfrac{|\lambda_i(x,t)|}{\Delta_i(x,t)\Omega_i(t)}\Big)\Big)$. Зауважимо, що оскільки $T_{1i}(x,t,\delta_i) < |z^0(x,t)|$, то $D_i \geqslant 0$ при

$$A_{1i} < \inf_{(x,t)\in P} L_i(t)\frac{\exp(-z^0(x,t)|)}{1+\delta_i(x,t)} < \inf_{(x,t)\in P} L_i(t)\frac{\Omega_i(t)}{|\lambda_i(x,t)|\delta_{1i}}\,.$$

Якщо $B_i(x,t) < R_i(x,t)$, то $\beta \geqslant 0$ вибрати не вдається.

Розглянемо тепер умову (14).

1) Якщо $B_i(x,t) > 0$, то для $0<\beta<\beta_{3i}$, де $\beta_{3i} = \inf\limits_{(x,t)\in P} B_i(x,t)$, враховуючи (24) вибираємо $\gamma_i = \sup\limits_{(x,t)\in P}(-T_{2i}(x,t,\delta_i))$ і отримаємо $A_{2i} > \sup\limits_{(x,t)\in P}\Big(L_i(t)\dfrac{\exp(-T_{2i}(x,t,\delta_i))}{1-\delta_i(x,t)}\Big)$. Вибираємо $\delta_i(x,t) \geqslant \dfrac{\Omega_i(t)}{B_i(x,t)-\beta+\Omega_i(t)}$ і так, щоб значення функції $f(\delta_i(x,t)) = \dfrac{\exp(-T_{2i}(x,t,\delta_i))}{1-\delta_i(x,t)}$ було найменшим.

Зауважимо, що оскільки $\dfrac{\exp(-T_{2i}(x,t,\delta_i))}{1-\delta_i(x,t)} \leqslant \dfrac{B_i(x,t)+\Omega_i(t)}{B_i(x,t)}$, то $D_i \geqslant 0$ при

$$A_{2i} > \sup_{(x,t)\in P} L_i(t)\frac{B_i(x,t)+\Omega_i(t)}{B_i(x,t)}\,.$$

2) Якщо $B_i(x,t) \leqslant 0$, то згідно з (23) вибираємо $\gamma_i = \sup\limits_{(x,t)\in P} \dfrac{\Omega_i(t) - (B_i(x,t) - \beta)}{|\lambda_i|}$ і маємо

$$A_{2i} > \inf_{(x,t)\in P} \left(L_i(t) \frac{1}{1-\delta_i} \exp\left(\frac{-\Omega_i(t) - B_i(x,t)}{|\lambda_i|} + \frac{\Omega_i(t)}{|\lambda_i|\delta_i} \right) e^{\beta/|\lambda_i|} \right) .$$

Вибираємо $\delta_i(x,t)$ так, щоб значення функції $f(\delta_i) = \dfrac{1}{1-\delta_i} \exp\Big(\dfrac{-\Omega_i(t) - B_i(x,t)}{|\lambda_i|} + \dfrac{\Omega_i(t)}{|\lambda_i|\delta_i} \Big)$ було найменшим. Функція $f(\delta_i(x,t))$ досягає свого мінімуму в точці $\delta_i^{min} = \dfrac{K_{1i}}{2|\lambda_i|}$. Отже, якщо

$$A_{2i} > \inf_{(x,t)\in P} L_i(t) K_i^{-1}(x,t) \exp(-P_{1i}(x,t)) , \text{ то } D_i \geqslant 0 \text{ для } 0 < \beta < \beta_{4i},$$

де $\beta_{4i} = \inf\limits_{(x,t)\in P} |\lambda_i(x,t)| \ln\Big(\dfrac{\alpha_i^2(t)}{L_i(t) K_i(x,t) \exp(-P_{1i}(x,t))} \Big)$. Тому нерівність (11) виконується для $0 < \beta < \min\big(\inf\limits_{i\leqslant p} (\delta_{1i}, \delta_{2i}) ; \inf\limits_{i>p} \delta_{3i}, \beta_{4i} \big)$. Теорему доведено.

Приклад . Розглянемо мішану задачу для рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - b \frac{\partial u}{\partial x} + u = 0 , \quad -1 < b < 0, \tag{26}$$

з крайовою умовою

$$u(0,t) = \alpha\, u(1,t) + \int_0^1 u(x,t) dx , \qquad \alpha > 1 .$$

Функція

$$u(x,t) = \exp(C_0 x + (C_0 b - 1)t) \tag{27}$$

є розв'язком даної задачі, де C_0 є розв'язком рівняння

$$1 + 1/C = e^C (\alpha + 1/C) . \tag{28}$$

Розвязок задачі стійкий, якщо згідно з теоремою виконується умова (6), тобто

$$\alpha^2 \leqslant \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} \exp\left(\frac{4 - |b|(1+\sqrt{5})}{2|b|} \right) .$$

Ця нерівність рівносильна умові

$$|b| \leqslant b_1 = \frac{4}{1 + \sqrt{5} + 2\ln\left(\alpha^2 \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} \right)} .$$

Якщо $\alpha = 100000$, то $b_1 = 0.08$, тобто за теоремою розв'язок стійкий, якщо $|b| < 0,08$.

Виходячи з вигляду розв'язку (27), отримуємо, що розв'язок не є стійким, якщо $C_0 b - 1 > 0$. Оскільки корінь рівняння (29) від'ємний, а саме $C_0 < -1$, то отримаємо $|b| > b_2 = \dfrac{1}{|C_0|}$.

Якщо $\alpha = 100000$, то $C_0 = -11.606$ і $b_2 = 0.08$. Отже, з вигляду розв'язку (27) отримуємо, що розв'язок не є стійкий, якщо $|b| > 0,08$.

Приклад показує, що умова (6) в теоремі є близька до непокращуваної.

1. A.Jeffrey, J.Kato. *Liapunov's direct method in stability problems for semilinear and quasilinear hyperbolic systems*// Journal of mathematics and mechanics. – 1969. – Vol. 18, N 7. – P. 659–682.

2. Knut S. Eckhoff. *On stability for symmetryc hyperbolic systems*// Journal of Differential equations. – 1981. – Vol. 40, P. 94–115.

3. Елтышева Н.А. *О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости*// Матем. сб. – 1988. – Т. 135, N (177):2. – С. 186–209.

4. Мельник З.О., Кирилич В.М. *Задачи без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем на прямой*// Укр.мат.журн. – 1983. – Т.40, N1. – С. 121–123.

Стаття надійшла до редколегії 10.10.1997

УДК 517.95

МАКСИМАЛЬНА ГЛАДКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ОКОЛІ КУТОВОЇ ТОЧКИ

В.З. Чернецький

Chernetskiy V.Z. The maximal smoothness of solutions of a mixed boundary value problem for linear elliptic second order equations in a neighbourhood of an angular boundary point. It has been investigated the behaviour of solutions of a mixed boundary value problem for linear elliptic second order nondivergense equations in a neighbourhood of an angular boundary point in the weight Sobolev spaces and the Hölder spases .

Розглянемо мішану задачу для лінійного еліптичного рівняння:

$$a^{ij}(x)u_{x_ix_j} + a^i(x)u_{x_i} + a(x)u = f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma_2} = 0. \tag{2}$$

Тут і далі вважається, що за індексами, які повторюються, ведеться сумування від 1 до 2; $G \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена ліпшицьова область з межею ∂G такою, що $\partial G \setminus \{\mathcal{O}\}$ – гладка крива, $\partial G = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$, де Γ_1, Γ_2 – зв'язні криві без кінців, $\overline{\Gamma}_1$ та $\overline{\Gamma}_2$ перетинаються в точці $\mathcal{O}$ під кутом ω_0 і в деякому околі цієї точки є кусками прямих; $\mathbf{n}$ – одинична зовнішня нормаль до ∂G. Припускається, що $\mathcal{O}$ – початок декартової системи координат.

Нехай (r, ω) – полярні координати точки (x_1, x_2), а вісь $\mathcal{O}x_1$ збігається з прямою, куском якої є частина Γ_2, що лежить в деякому околі точки $\mathcal{O}$.

Введемо позначення: $G_a^b = G \cap \{(r,\omega) |\ 0 \leqslant a < r < b\}$; $\Gamma_{i,a}^b = \Gamma_i \cap \partial G_a^b$, $i = 1, 2$. Нехай $C^l(\overline{G})$ – банахів простір функцій, що мають неперервні похідні в $\overline{G}$ до порядку $l \geqslant 0$ включно, якщо l – ціле, і до порядку $[l]$, якщо l – неціле, причому похідні порядку $[l]$ задовольняють умову Гельдера з показником $l - [l]$; $W^{k,p}(G)$ – соболєвський простір функцій з $L_p(G)$, які мають узагальнені похідні до порядку k включно, сумовні зі степенем p в області G; $W_0^{k,p}(G; \Gamma)$ – банахів простір функцій, отриманий замиканням простору

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35J25.

$C_0^k(G;\Gamma) = \{f : f \in C^k(\overline{G}), f|_\Gamma = 0\}$ в метриці $W^{k,p}(G)$, де $\Gamma \subset \partial G$; $V_{p,\alpha}^k(G)$ – ваговий соболєвський простір функцій $u(x)$ з нормою

$$||u||_{V_{p,\alpha}^k(G)} = \left(\iint\limits_G \sum_{|\beta|=0}^k r^{p(|\beta|-k+\alpha/p)} |D^\beta u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ p \geqslant 1, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ k \geqslant 0 \text{ – ціле число.}$$

Означення. Під розв'язком задачі (1),(2) ми розумітимемо функцію

$$u \in W^{2,2}(G) \cap W_0^{1,2}(G;\Gamma_1),$$

яка задовольняє рівняння (1) та другу з крайових умов (2).

Зауваження. Згідно з означенням області, існує $d > 0$ таке, що $G_0^d = \{(r,\omega) \mid \ 0 \leqslant r < d, \ 0 < \omega < \omega_0\}$.

Припустимо, що виконуються такі умови:

a) однорідної еліптичності:
$\nu\xi^2 \leqslant a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \ \forall x \in \overline{G}, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^2$, де $\nu, \mu = const > 0$;

b) $a^{ij}(0) = \delta_j^i, \ i,j = 1,2$;

c) $a^{ij}(x) \in C^0(\overline{G}), \ a^i(x) \in L_p(G) \cap L_2(G), \ i,j = 1,2, \ a(x) \in L_p(G)$ для деякого $p > 1$;

$$\sum_{i,j=1}^2 |a^{ij}(x) - a^{ij}(0)| + |x| \sum_{i=1}^2 |a^i(x)| + |x|^2 |a(x)| \leqslant A(|x|), \ x \in G_0^d,$$

де $A(r) \geqslant 0$ – зростаюча та неперервна за Діні в нулі функція, $A(0) = 0$;

d) $f(x) \in L_p(G) \cap L_2(G) \cap V_{2,2}^0(G)$, $p > 1$; існують $k_1, k_2 > 0$ та $s > \frac{\pi}{2\omega_0}$, такі, що

$$||f||_{V_{2,2}^0(G_0^\rho)} \leqslant k_1 \rho^s, \quad ||f||_{L_p(G_{\frac{\rho}{2}}^\rho)} \leqslant k_2 \rho^{\frac{\pi}{2\omega_0} - 2 + \frac{2}{p}}, \quad \rho \in (0,d).$$

В [1] (теореми 2,3) доведено, що при виконанні умов $a) - d)$ та, якщо $0 < \omega_0 \leqslant \frac{\pi}{4}$, $p > 1$ або $\frac{\pi}{4} < \omega_0 < 2\pi$, $1 < p < \frac{4\omega_0}{4\omega_0 - \pi}$, то $u \in V_{p,0}^2(G)$ та $||u||_{V_{p,0}^2(G_0^\rho)} \leqslant C\rho^{\frac{\pi}{2\omega_0} - 2 + \frac{2}{p}}$. Крім того, у цій же праці нами встановлено, що коли $\frac{\pi}{4} < \omega_0 < 2\pi$, $\omega_0 \neq \frac{\pi}{2}$, $p \geqslant \frac{4\omega_0}{4\omega_0 - \pi}$, то $u \in C^{\frac{\pi}{2\omega_0}}(\overline{G_0^d})$, а коли $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, $p = 2$, то $u \in C^{1-\varepsilon}(\overline{G_0^d})$, $\forall \varepsilon > 0$.

На прикладі мішаної задачі для рівняння Лапласа в кутовому секторі з однорідними крайовими умовами переконуємось, що навіть при безмежній гладкості даних (коефіцієнтів рівняння, правої частини, крайових умов) ми не маємо безмежної гладкості розв'язку. Максимально можлива гладкість визначається величиною розхилу кута ω_0. Вивчимо це питання у даній праці.

Щодо цієї тематики досліджень, то близькими є роботи [2,3,4,5]. Зокрема в [2] вивчено дане питання для задачі Діріхле. У працях [3,4] при дослідженні вже мішаної задачі та задачі Діріхле в негладких областях (зокрема і в областях з кутовими точками) отримано, що якщо $a^{ij}, a^i, a, f \in C^{k+\alpha}(\overline{G})$, то $u \in C^{k+2+\alpha}(\overline{G})$, але, що дуже важливо, при умові $k + 2 + \alpha < \frac{\pi}{2\omega_0}$ (в наших позначеннях). Вагомою є також праця [5], де достатньо широко досліджено поведінку розв'язків мішаної задачі в просторах $H_a^{(b)}$ (вагових гельдерівських просторах). Зокрема в теоремі 4 ([5], ст.569) доведено, що $u \in C^\lambda(\overline{G})$, проте, знову ж таки, при $2 < \lambda < \frac{\pi}{2\omega_0}$. Тобто у вищезгаданих роботах отримано належність розв'язків мішаної задачі до простору $C^{\frac{\pi}{2\omega_0} - \varepsilon}(\overline{G})$, $\forall \varepsilon > 0$. Ми ж при дещо інших вимогах на гладкість коефіцієнтів рівняння доводимо належність розв'язку u до простору $C^{\frac{\pi}{2\omega_0}}(\overline{G})$ і стверджуємо про максимальність такої гладкості при даному значенні ω_0.

Теорема 1. *Нехай $u \in V^2_{p,0}(G)$ – розв'язок задачі (1),(2). Припустимо, що для деякого цілого $m \geqslant 1$ виконується нерівність*

$$0 < \omega_0 \leqslant \frac{\pi}{2(m+2-\frac{2}{p})}. \tag{3}$$

Припустимо, що виконуються умови a)-d), а також умови:

e) частинні похідні функцій $a^{ij}(x)$, $a^i(x)$, $a(x)$ до порядку m включно існують, та задовольняють умову

$$|x|^m \sum_{i,j=1}^{2} |\nabla^m a^{ij}(x)| + |x|^{m+1} \sum_{i=1}^{2} |\nabla^m a^i(x)| + |x|^{m+2} |\nabla^m a(x)| \leqslant B(|x|), \ \forall x \in \overline{G},$$

де $B(r)$ – неперервна функція, $r \geqslant 0$;

f) $f \in V^m_{p,0}(G)$ та існує $k > 0$ таке, що $||f||_{V^m_{p,0}(G^\rho_{\rho/2})} \leqslant k\rho^{\frac{\pi}{2\omega_0}-m-2+\frac{2}{p}}$, $\rho \in (0,d)$.

Тоді існують числа $d_0 \in (0,d)$ та $C_m > 0$, такі, що $u \in V^{m+2}_{p,0}(G^{d_0}_0)$ і при цьому

$$||u||_{V^{m+2}_{p,0}(G^\rho_0)} \leqslant C_m \rho^{\frac{\pi}{2\omega_0}-m-2+\frac{2}{p}}, \ \forall \rho \in (0, d_0), \tag{4}$$

де $C_m > 0$ – деяка стала, яка визначається лише величинами p, ν, μ, s, $M_0 = \max\limits_{\overline{G}} |u|$, k, ω_0 та функціями A та B.

Доведення. Застосуємо метод кілець Кондратьєва для отримання необхідних оцінок в околі кутової точки. Розглянемо дві множини $G^\rho_{\rho/2}$ та $G^{2\rho}_{\rho/4} \supset G^\rho_{\rho/2}$, $\forall \rho > 0$. Після перетворень координат $x = \rho x'$ приходимо до висновку, що функція $w(x') = \rho^{-\frac{\pi}{2\omega_0}} u(\rho x')$ буде розв'язком задачі

$$a^{ij}(\rho x') w_{x'_i x'_j} + \rho a^i(\rho x') w_{x'_i} + \rho^2 a(\rho x') w = \rho^{2-\frac{\pi}{2\omega_0}} f(\rho x'), \ \ x' \in G^2_{1/4}, \tag{5}$$

$$w|_{\Gamma^2_{1,1/4}} = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma^2_{2,1/4}} = 0. \tag{6}$$

Тепер застосовуючи L_p-оцінки Шаудера (теорема 15.3, [6]) всередині області та поблизу гладкого куска межі, дістанемо

$$||w||_{W^{m+2,p}(G^1_{1/2})} \leqslant C'_m \left(||w||_{L_p(G^2_{1/4})} + \rho^{2-\frac{\pi}{2\omega_0}} ||f||_{W^{m,p}(G^2_{1/4})} \right),$$

де C'_m не залежить від w, а визначається лише $\nu, \mu, A(r), B(r)$ та ω_0 (див. доведення теореми 1, [1]). Використання оцінки Шаудера в даній ситуації стало можливим завдяки тому, що в області $G^2_{1/4}$ кусок межі, де задано умову Діріхле, та кусок межі де задано умову Неймана, лежать на деякій додатній відстані один від одного. Повертаючись до старих змінних та використовуючи умови теореми на функцію f а також те, що $|u(x)| \leqslant C_o |x|^{\frac{\pi}{2\omega_0}}$ ([1], теорема 1, п.2), отримаємо

$$||u||_{V^{2+m}_{p,0}(G^\rho_{\rho/2})} \leqslant C_m \rho^{\frac{\pi}{2\omega_0}-2-m+2/p}. \tag{7}$$

Зауважимо, що ми довели оцінку (7), не використовуючи (3). Замінивши ρ на $2^{-k}\rho$ $k = 0, 1, \ldots$ та підсумувавши отримані нерівності за всіма k, дістанемо

$$||u||_{V_{p,0}^{2+m}(G_0^\rho)} \leqslant C_m \rho^{\frac{\pi}{2\omega_0}-2-m+2/p} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(\frac{\pi}{2\omega_0}-2-m+2/p)},$$

що завдяки зробленому припущенню (3), доводить нам твердження теореми 2.

Теорема 2. *Нехай виконуються всі припущення теореми 1, крім умови (3), замість якої виконується умова*

$$\frac{\pi}{2(m+2-\frac{2}{p})} < \omega_0 < \frac{\pi}{2(m+1)}, \ p > 2, \, m \geqslant 0. \tag{8}$$

Тоді $u \in C^{\frac{\pi}{2\omega_0}}\left(\overline{G_0^{d_0}}\right)$ *і при цьому існують сталі* C_k, *такі, що*

$$|\nabla^k u(x)| \leqslant C_k |x|^{\frac{\pi}{2\omega_0}-k}, \ x \in \overline{G_0^{r_0}}, \ k = 1, \ldots, m+1. \tag{9}$$

Якщо ж $\omega_0 = \frac{\pi}{2m+2}$, $p \geqslant 2$, *то* $u \in C^{\frac{\pi}{2\omega_0}-\varepsilon}(\overline{G_0^{r_0}})$, $\varepsilon > 0$.

Зауваження. Очевидно, що теорема залишається справедливою і при $p = \infty$. Зокрема, у цьому випадку ми отримуємо максимальну гладкість розв'язку при $0 < \omega_0 < \frac{\pi}{2}$ (виключаються лише значення типу $\omega_0 = \frac{\pi}{2(m+1)}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$).

Доведення. Повернемось ще раз до задачі (5),(6). За теоремою вкладення Соболєва

$$W^{m+2,p}(G_{1/4}^2) \subset C^{m+1+\alpha}(\overline{G_{1/4}^2}), \ 0 < \alpha \leqslant 1 - \frac{2}{p}, \ p > 2,$$

і при цьому

$$||w||_{C^{m+1+\alpha}(\overline{G_{1/4}^2})} \leqslant ||w||_{W^{m+2,p}(G_{1/4}^2)}. \tag{10}$$

Переходячи до старих змінних, та розглядаючи окремо кожен доданок лівої частини (10), отримаємо оцінки

$$|u(x)| \leqslant \tilde{C}_1 \rho^{m+2-\frac{n}{p}} ||u||_{V_{p,0}^{2+m}(G_{2\rho}^{\rho/4})};$$
$$|\nabla u(x)| \leqslant \tilde{C}_2 \rho^{m+1-\frac{n}{p}} ||u||_{V_{p,0}^{2+m}(G_{2\rho}^{\rho/4})};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|\nabla^{m+1} u(x)| \leqslant \tilde{C}_{m+1} \rho^{1-\frac{n}{p}} ||u||_{V_{p,0}^{2+m}(G_{2\rho}^{\rho/4})}, \ x \in G_{2\rho}^{\rho/4};$$

$$\sup_{x,y \in G_{2\rho}^{\rho/4}} \frac{|\nabla^{m+1} u(x) - \nabla^{m+1} u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{2}{p}}} \leqslant \tilde{C}_{m+2} ||u||_{V_{p,0}^{2+m}(G_{2\rho}^{\rho/4})}, \ x, y \in G_{2\rho}^{\rho/4}.$$

Після застосування (7), дістанемо

$$\begin{gathered}|u(x)| \leqslant C_1 \rho^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \\ |\nabla u(x)| \leqslant C_2 \rho^{\frac{\pi}{2\omega_0}-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |\nabla^{m+1} u(x)| \leqslant C_{m+1} \rho^{\frac{\pi}{2\omega_0}-m-1}, \quad \forall x \in G_{2\rho}^{\rho/4};\end{gathered} \tag{11}$$

$$\sup_{x,y \in G_{2\rho}^{\rho/4}} \frac{|\nabla^{m+1} u(x) - \nabla^{m+1} u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{n}{p}}} \leqslant C_{m+2} \rho^{\frac{\pi}{2\omega_0}-2-m+\frac{2}{p}} \ \forall x,y \in G_{2\rho}^{\rho/4}. \tag{12}$$

Беручи $|x| = \rho$ в (11) отримуємо твердження (9). Далі, враховуючи умову (8), маємо

$$|x-y|^{\frac{\pi}{2\omega_0}-2-m+\frac{2}{p}} \geqslant (4p)^{\frac{\pi}{2\omega_0}-2-m+\frac{2}{p}} \ \forall x,y \in G_{2\rho}^{\rho/4}.$$

Використовуючи це, оцінку (12), а також доведені оцінки (9) при $k = m+1$, дістаємо що $u \in C^{\frac{\pi}{2\omega_0}}\left(\overline{G_0^{d_0}}\right)$ (див. доведення теореми 3, [1]). Аналогічно до проробленого вище, із застосуванням теорем вкладення при дещо інших умовах, отримуємо, що коли $\omega_0 = \frac{\pi}{2(m+1)}$, $p \geqslant 2$, то $u \in C^{\frac{\pi}{2\omega_0}-\varepsilon}\left(\overline{G_0^{r_0}}\right)$, $\varepsilon > 0$. Теорему доведено.

1. Чернецький В.З. *Непокращувальні оцінки розв'язків мішаної задачі для лінійних еліптичних рівнянь другого порядку в околі кутової точки* // Укр. мат. журнал.–1997.–Т.49,N 11.–С.1529-1542.
2. Борсук М.В. Задача Діріхле для еліптичних рівнянь другого порядку в області з конічною точкою на межі. – Київ, 1994. –74с. – (Препринт).
3. Azzam A. *Smootheness properties of solutions of mixed boundary value problems for elliptic equations in sectionally smooth n-dimensional domains.* // Ann.Polon.Math.–1981.–V.40.–P.81-93.
4. Azzam A. and Kreyszig E. *On solution of elliptic equations satisfing mixed boundary conditions* // SIAM J.Math.Anal.–1982.–V.13.–P.254-262.
5. Lieberman G.M. *Optimal Hölder regularity for mixed boundary value problem* // J. Math. Anal. and Appl.–1989.–P.572-586.
6. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – М., ИЛ., 1962. – 202с.

Стаття надійшла до редколегії 23.01.1998

УДК 517.95

ЗАДАЧА ФУР'Є ДЛЯ ОДНІЄЇ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

Г.П.ДОМАНСЬКА

Domanska G.P. The Fourier problem for one pseudoparabolic system. The Fourier problem for a pseudoparabolic system in unbounded (respect to space variables) domain is considered. The condition of existence and uniqueness of a generalized solution of the problem was obtained.

Добре відомо, що питання фільтрації рідини в середовищах з подвійною пористістю [1], передачі тепла в гетерогенному середовищі [2], перенесення вологи в грунті [3] приводять до крайових задач для псевдопараболічного рівняння. Псевдопараболічні рівняння з частинними похідними третього порядку також описують дифузію у тріщинуватому середовищі з поглинанням або частковим насиченням, процес застигання клею, а також з'являються у слабкому формулюванні 2-фазної задачі Стефана, у механіці флюїдів,в механіці суцільного середовища та в інших задачах [4].

Коректність формулювання різних задач для псевдопараболічних рівнянь досліджено у працях багатьох авторів. Зокрема, у праці [5] встановлено умови єдиності розв'язку без початкових умов (задачі Фур'є) для лінійного псевдопараболічного рівняння в обмеженій (за просторовими змінними) області. У праці [6] показано, що задача Коші для псевдопараболічного рівняння має єдиний розв'язок у класі функцій, які зростають не швидше, ніж $e^{-a|x|}$, при $|x| \to \infty$.

У даній праці розглянуто задачу Фур'є для псевдопараболічної системи в необмеженій (за просторовими змінними) області. Доведено існування та єдиність розв'язку в класі функцій, які експоненціально зростають при $t \to -\infty$ та при $|x| \to \infty$ зі швидкістю, що визначається коефіцієнтами системи.

Нехай $Q \subset \mathbb{R}^n \times (-\infty, T), T < \infty$; $Q \cap \{t = \tau\} = \Omega_\tau$; $\partial Q \cap \{t = \tau\} = S_\tau, S = \bigcup\limits_{\tau \in (-\infty, T]} S_\tau$. Припускатимемо, що для всіх $\tau \in (-\infty, T]$ $\Omega_0 \subset \Omega_\tau^* \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, де Ω_τ^* є доповненням проекції Ω_τ на площину $\{t = 0\}$ до цієї площини, mes $\Omega_0 > 0$, а Ω - обмежена множина.

Розглянемо в області Q систему рівнянь вигляду

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D^\alpha(A_{\alpha\beta} D^\beta u_t) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D^\alpha(B_{\alpha\beta} D^\beta u) + \sum_{|\alpha|=1} C_\alpha D^\alpha u + \\ + A(x,t)u - u_t + f(x,t) = 0 \qquad (1)$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35K70.

з крайовими умовами

$$u|_S = 0. \tag{2}$$

Тут $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$, C_α, A квадратні матриці розміру $n \times n$; $u = (u_1, ..., u_n)^T$; $f(x,t) = (f_1(x,t), ..., f_n(x,t))^T$; $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \alpha_i \geqslant 0$;

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n.$$

Говоритимемо, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються відповідно умови (A_0), $(A_1), (A_2)$, (B_0), (B_1), якщо:

$$(A_0) : a_0(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 \, dx \leqslant \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (A_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha u) \, dx \leqslant a^0(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 \, dx,$$
$$\forall t \in (-\infty, T] \,, \forall u \in (H_0(\Omega_t))^n; \quad a_0(t) \geqslant a > 0, t \in (-\infty, T] \,;$$
$$a_0(t), a^0(t) \in L^\infty((-\infty, T)); \quad A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}(x,t); \quad A_{\alpha\beta} = A^*_{\alpha\beta}(x,t), \forall (x,t) \in Q;$$
$$(A_1) : \quad \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (A_{\alpha\beta t}(x,t) D^\beta u, D^\alpha u) \, dx \leqslant a^1(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 \, dx,$$
$$\forall t \in (-\infty, T] \,, \forall u \in (H_0(\Omega_t))^n; \quad a^1(t) \in L^\infty((-\infty, T));$$
$$(A_2) : \quad (-A(x,t)u, u) \geqslant M|u|^2, \quad M > 0, \forall (x,t) \in Q; \quad A(x,t) = A^*(x,t), \forall (x,t) \in Q;$$
$$(B_0) : \quad b_0(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 \, dx \leqslant \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (B_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha u) \, dx \leqslant b^0(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 \, dx,$$
$$\forall t \in (-\infty, T] \,, \forall u \in (H_0(\Omega_t))^n; \quad b_0(t) \geqslant b > 0, \ t \in (-\infty, T] \,;$$
$$b_0(t), b^0(t) \in L^\infty((-\infty, T)); \quad B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}(x,t), \quad B_{\alpha\beta} = B^*_{\alpha\beta}(x,t), \forall (x,t) \in Q;$$
$$(B_1) : \quad \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (B_{\alpha\beta t}(x,t) D^\beta u, D^\alpha u) \, dx \leqslant b^1(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 \, dx,$$
$$\forall t \in (-\infty, T] \,, \forall u \in (H_0(\Omega_t))^n; \quad b^1(t) \in L^\infty((-\infty, T)).$$

Множину вимірних в Q функцій, квадрат модуля яких інтегровний в замиканні довільної обмеженої підобласті Q^* області Q, позначимо через $L^2_{\text{loc}}(Q)$.

Означення. *Функцію $u(x,t)$, яка задовольняє включення*

$$u, u_t \in L^2_{\text{loc}}((-\infty, T] \,, (H_0(\Omega_t))^n)$$

і рівність

$$\int\limits_Q \Bigg[(u_t, v) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (A_{\alpha\beta} D^\beta u_t, D^\alpha v) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (B_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha v) -$$
$$- \sum_{|\alpha|=1} (C_\alpha D^\alpha u, v) - (A(x,t)u, v) - (f(x,t), v) \Bigg] \, dx dt = 0 \tag{3}$$

для довільної функції $v \in C_0^\infty(Q)$, називатимемо узагальненим розв'язком задачі (1), (2).

Введемо такі позначення:

$$a(t) = \max_{|\beta|=1} \sup_{Q_{t,T}} \sum_{|\alpha|=1} \|A_{\alpha\beta}(x,\tau)\|^2, \quad \hat{a} = \sup_{(-\infty,T]} a(t); \quad b(t) = \max_{|\beta|=1} \sup_{Q_{t,T}} \sum_{|\alpha|=1} \|B_{\alpha\beta}(x,\tau)\|^2,$$

$$\hat{b} = \sup_{(-\infty,T]} b(t); \quad c(t) = \sup_{Q_{t,T}} \sum_{|\alpha|=1} \|C_\alpha(x,\tau)\|^2, \quad \hat{c} = \sup_{(-\infty,T]} c(t);$$

$$A_0(t) = \max\left\{\frac{a^0(t)+b^0(t)}{2}, \sup_{x\in\Omega_t}\left[\frac{\|I-A(x,t)\|}{2}\right]\right\},$$

де $Q_{t_1,t_2} = Q \cap \{t_1 < t < t_2\}, t_1, t_2 \in (-\infty, T]$; $I-$ одинична матриця розміру $n \times n$.

Розглянемо систему нерівностей:

$$\begin{aligned}
&2 - \lambda\varepsilon_2 - \varepsilon_3 > \frac{\lambda^2\hat{a}}{2a},\\
&\inf_Q\left[M - \frac{\|A_t(x,t)\|}{2}\right] - \frac{\lambda\delta_2+\delta_3}{2} - \frac{\lambda^2\hat{a}(2-\lambda\varepsilon_2-\varepsilon_3)}{4a(2-\lambda\varepsilon_2-\varepsilon_3)-2\lambda^2\hat{a}} > 0,\\
&b - \frac{1}{2}\inf_{(-\infty,T]}\sup_{(-\infty,\tau]}\left(a^1(t)+b^1(t)\right) - \frac{\lambda\hat{b}}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{1}{\delta_2}\right) - \frac{\hat{c}}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_3}+\frac{1}{\delta_3}\right) > 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Називатимемо набір чисел $\{\delta_2, \delta_3, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}(\delta_i > 0, \varepsilon_i > 0, i \in \{2,3\})$ допустимим для системи (4), якщо вона для цього набору має додатний розв'язок λ.

Позначимо через Δ_1 множину допустимих наборів для системи (4) і через Λ_1 - множину додатних розв'язків цiеi системи для всіх $\{\delta_2, \delta_3, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} \subset \Delta_1$.

Нехай

$$\rho(t,\lambda,\Delta_1) = \min\left\{\frac{\inf_{Q_{t,T}}[2M - \|A_\tau(x,\tau)\|] - \lambda\delta_2 - \delta_3}{2} - \frac{\lambda^2\hat{a}(2-\lambda\varepsilon_2-\varepsilon_3)}{4a(2-\lambda\varepsilon_2-\varepsilon_3)-2\lambda^2\hat{a}},\right.$$

$$\left.b_0(t) - \frac{a^1(t)+b^1(t)}{2} - \frac{\lambda b(t)}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{1}{\delta_2}\right) - \frac{c(t)}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_3}+\frac{1}{\delta_3}\right)\right\}; \quad \rho_1(t,\lambda,\Delta_1) = \frac{\rho(t,\lambda,\Delta_1)}{A_0(t)}.$$

Лема. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови* $(A_0), (A_1), (A_2), (B_0), (B_1)$; $A_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta t}, B_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta t}, C_\alpha, A \in L^\infty(Q)$; $\Delta_1 \neq \oslash$; $f \in L^2_{\rm loc}((-\infty,T]\,;(L^2(\Omega_t))^n)$; $S-$ *гладка поверхня; тоді існує таке $\delta > 0$, що справджується нерівність:*

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_{t_2,T}} \rho(t,\lambda,\Delta_1)\sum_{|\alpha|\leqslant 1}|D^\alpha u|^2 e^{-\lambda|x|}dxdt \leqslant A_0(t_1)\int\limits_{\Omega_{t_1}}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}|D^\alpha u|^2 \times\\
&\times e^{-\lambda|x|}dx\exp\left(-\int\limits_{t_1}^{t_2}\rho_1(\theta,\lambda,\Delta_1)d\theta\right) +\\
&+\frac{1}{\delta}\int\limits_{t_1}^{t_2}\exp\left(-\int\limits_{t}^{t_2}\rho_1(\theta,\lambda,\Delta_1)d\theta\right)\rho_1(t,\lambda,\Delta_1)\int\limits_{Q_{t,T}}|f(x,\theta)|^2 e^{-\lambda|x|}dxd\theta dt,
\end{aligned} \tag{5}$$

$\forall t_1, t_2,\ (t_1 < t_2 \leqslant T)$, *де* $|x| = \left(\sum\limits_{|\alpha|=1} x_i^2 \right)^{1/2}$.

Доведення. Нехай $u(x,t)$ - узагальнений розв'язок задачі (1), (2). Введемо функцію

$$v(x,t) = (u(x,t) + u_t(x,t))e^{-\lambda|x|}.$$

Підставимо функцію $v(x,t)$ у рівність (3) і оцінимо кожен доданок окремо:

$$I_1 = \int\limits_{Q_{\tau,T}} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta} D^\beta u_t, D^\alpha \left((u+u_t)e^{-\lambda|x|} \right) \right) dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} a_0(T) \int\limits_{\Omega_T} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 e^{-\lambda|x|} dx - \frac{1}{2} a^0(\tau) \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 e^{-\lambda|x|} dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_{\tau,T}} \left(a_0(t) - \frac{\lambda a(t)}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\delta_1} \right) \right) \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_t|^2 e^{-\lambda|x|} dxdt -$$

$$- \frac{\lambda\delta_1}{2} \int\limits_{Q_{\tau,T}} |u|^2 e^{-\lambda|x|} dxdt - \frac{\lambda\varepsilon_1}{2} \int\limits_{Q_{\tau,T}} |u_t|^2 e^{-\lambda|x|} dxdt - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{\tau,T}} a^1(t) \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 e^{-\lambda|x|} dxdt;$$

$$I_2 = \int\limits_{Q_{\tau,T}} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(B_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha \left((u+u_t)e^{-\lambda|x|} \right) \right) dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} b_0(T) \int\limits_{\Omega_T} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 e^{-\lambda|x|} dx - \frac{1}{2} b^0(\tau) \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 e^{-\lambda|x|} dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_{\tau,T}} \left(b_0(t) - \frac{\lambda b(t)}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\delta_2} \right) - \frac{b^1(t)}{2} \right) \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 e^{-\lambda|x|} dxdt -$$

$$- \frac{\lambda\delta_2}{2} \int\limits_{Q_{\tau,T}} |u|^2 e^{-\lambda|x|} dxdt - \frac{\lambda\varepsilon_2}{2} \int\limits_{Q_{\tau,T}} |u_t|^2 e^{-\lambda|x|} dxdt;$$

$$I_3 = \int\limits_{Q_{\tau,T}} \sum_{|\alpha|=1} \left(C_\alpha D^\alpha u, (u+u_t)e^{-\lambda|x|} \right) dxdt \leqslant \frac{\delta_3}{2} \int\limits_{Q_{\tau,T}} |u|^2 e^{-\lambda|x|} dxdt +$$

$$+ \frac{\varepsilon_3}{2} \int\limits_{Q_{\tau,T}} |u_t|^2 e^{-\lambda|x|} dxdt + \left(\frac{1}{2\varepsilon_3} + \frac{1}{2\delta_3} \right) \int\limits_{Q_{\tau,T}} c(t) \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 e^{-\lambda|x|} dxdt;$$

$$I_4 = \int\limits_{Q_{\tau,T}} \left(f(x,t), (u+u_t)e^{-\lambda|x|} \right) dxdt \leqslant \frac{1}{\delta} \int\limits_{Q_{\tau,T}} |f(x,t)|^2 e^{-\lambda|x|} dxdt +$$

$$+ \frac{\delta}{2} \int\limits_{Q_{\tau,T}} |u|^2 e^{-\lambda|x|} dxdt + \frac{\delta}{2} \int\limits_{Q_{\tau,T}} |u_t|^2 e^{-\lambda|x|} dxdt;$$

$$I_5 = \int\limits_{Q_{\tau,T}} \left(u_t - A(x,t)u, (u+u_t)e^{-\lambda|x|} \right) dxdt \geqslant -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \|I - A(x,\tau)\| |u|^2 e^{-\lambda|x|} dx +$$

$$+\int\limits_{Q_{\tau,T}} |u_t|^2 e^{-\lambda|x|}dxdt - \int\limits_{Q_{\tau,T}} \left(\frac{\|A_t(x,t)\|}{2} - M\right)|u|^2 e^{-\lambda|x|}dxdt.$$

Покладемо

$$\varepsilon_1 = \frac{2-\lambda\varepsilon_2-\varepsilon_3}{\lambda}, \quad \delta_1 = \frac{\lambda\hat{a}(2-\lambda\varepsilon_2-\varepsilon_3)}{2a(2-\lambda\varepsilon_2-\varepsilon_3)-\lambda^2\hat{a}}.$$

Тоді з оцінок інтегралів I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 випливає нерівність:

$$\int\limits_{Q_{\tau,T}} \rho(t,\lambda,\Delta_1)\sum_{|\alpha|\leqslant 1}|D^\alpha u|^2 e^{-\lambda|x|}dxdt \leqslant$$

$$\leqslant A_0(\tau)\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}|D^\alpha u|^2 e^{-\lambda|x|}dx + \frac{1}{\delta}\int\limits_{Q_{\tau,T}}|f(x,t)|^2 e^{-\lambda|x|}dxdt. \qquad (6)$$

Введемо функцію

$$y(\tau) = \int\limits_{Q_{\tau,T}} \rho(t,\lambda,\Delta_1)\sum_{|\alpha|\leqslant 1}|D^\alpha u|^2 e^{-\lambda|x|}dxdt.$$

Тоді нерівність (6) можна переписати у вигляді:

$$y'(\tau) + \rho_1(t,\lambda,\Delta_1)y(\tau) \leqslant \frac{\rho_1(t,\lambda,\Delta_1)}{\delta}\int\limits_{Q_{\tau,T}}|f(x,t)|^2 e^{-\lambda|x|}dxdt. \qquad (7)$$

Домноживши (7) на $\exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t_2}\rho_1(\theta,\lambda,\Delta_1)d\theta\right)$ і проінтегрувавши по відрізку $[t_1,t_2]$, отримаємо нерівність (5). Лему доведено.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови леми. Тоді задача (1), (2) не може мати більше, ніж один розв'язок в класі функцій u таких, що*

$$\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}|D^\alpha u|^2 e^{-\lambda|x|}dx = o(1)\exp\left(\int\limits_t^T \rho_1(\theta,\lambda,\Delta_1)d\theta\right), \qquad (8)$$

коли $t \to -\infty$ і $\lambda \in \Lambda_1$.

Доведення. Нехай задача (1), (2) має два розв'язки u^1 і u^2, які задовольняють умову (8). Функція $u = u^1 - u^2$ теж задовольняє умову (8) і, крім того, є розв'язком (1), (2) при $f(x,t) \equiv 0$. За попередньою лемою

$$\int\limits_{Q_{t_2,T}} \rho(t,\lambda,\Delta_1)\sum_{|\alpha|\leqslant 1}|D^\alpha u|^2 e^{-\lambda|x|}dxdt \leqslant A_0(t_1)\int\limits_{\Omega_{t_1}}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}|D^\alpha u|^2 e^{-\lambda|x|}dx\times$$

$$\times\exp\left(-\int\limits_{t_1}^{t_2}\rho_1(\theta,\lambda,\Delta_1)d\theta\right) = o(1)A_0(t_1)\exp\left(\int\limits_{t_2}^{T}\rho_1(\theta,\lambda,\Delta_1)d\theta\right),$$

коли $t_1 \to -\infty$. Тоді спрямовуючи $t_1 \to -\infty$ і врахувавши довільність t_2, отримуємо, що $u(x,t) = 0$ в Q. Отже $u^1 = u^2$. Теорему доведено.

Розглянемо тепер умови існування розв'язку задачі (1),(2).

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови* $(A_0), (A_1), (A_2), (B_0), (B_1)$. *Якщо* $A_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta t}, B_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta t}, C_\alpha, A \in \in L^\infty(Q)$; $S-$ *гладка поверхня;* $\Delta_1 \neq \oslash, \lambda \in \Lambda_1$ *і, крім того,* $0 < \lambda < \sqrt{\dfrac{2a}{\hat{a}}}$ *та*

$$\int\limits_{-\infty}^{T} \int\limits_{Q_{t,T}} \exp\left(-\int\limits_{\theta}^{T} \rho_1(\tau, \lambda, \Delta_1) d\tau\right) |f(x,t)|^2 e^{-\lambda|x|} dx d\theta dt < \infty,$$

то існує узагальнений розв'язок задачі (1), (2) такий, що

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} \sum_{|\alpha| \leqslant 1} |D^\alpha u|^2 e^{-\lambda|x|} dx dt \leqslant M_1 \exp\left(\int\limits_{t_0}^{T} \rho_1(\theta, \lambda, \Delta_1) d\theta\right), \tag{9}$$

$M_1 = \text{const}, t_1 \in (-\infty, T]$.

Доведення. Оскільки множина Ω - обмежена, то існує таке $R > 0$, що Ω міститься в кулі $O(R)$ радіуса R, $O(R) \subset \mathbb{R}^n$. Позначимо $Q_k = (O(R+k) \times (T-k, T]) \cap \ Q, k = 1, 2, ...$ Розглянемо допоміжну задачу

$$Lu = f^k(x,t), \qquad (x,t) \in Q_k; \tag{10}$$

$$u|_{\partial Q_k} = 0; \tag{11}$$

$$u(x, T-k) = 0, \qquad k = 1, 2, ..., \tag{12}$$

де

$$f^k(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & (x,t) \in Q_k; \\ 0, & (x,t) \in Q \setminus Q_k. \end{cases}$$

Нехай $u^k(x,t)$ - узагальнений розв'язок задачі (1), (2), продовжений нулем на $Q \setminus Q_k$. Тоді за лемою для $u^k(x,t)$ виконується нерівність (5).

Розглянемо функцію $\varphi(t)$ з такими властивостями: $\varphi(t) \in C^1(\mathbb{R}^1)$; $\varphi'(t) \geqslant 0$ на $\mathbb{R}^1$; $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1$; $\varphi(t) \equiv 1, t \in [t_2+1, \infty)$; $\varphi(t) \equiv 0, t \in (-\infty, t_2]$. Покладемо в тотожності (3) $v(x,t) = u_t^k(x,t)\varphi(t)e^{-\lambda|x|}$. Отримаємо:

$$\begin{aligned} \int\limits_{Q_{t_2,T}} \Bigg[& \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta} D^\beta u_t^k, D^\alpha \left(u_t^k e^{-\lambda|x|}\right)\right) + |u_t^k|^2 e^{-\lambda|x|} + \\ & + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(B_{\alpha\beta} D^\beta u^k, D^\alpha \left(u_t^k e^{-\lambda|x|}\right)\right) - \left(A(x,t) u^k, u_t^k e^{-\lambda|x|}\right) - \\ & - \sum_{|\alpha|=1} \left(C_\alpha D^\alpha u^k, u_t^k e^{-\lambda|x|}\right) - \left(f^k(x,t), u_t^k e^{-\lambda|x|}\right) \Bigg] \varphi(t) dx dt = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

Оцінимо кожен доданок (13) окремо:

$$I_6=\int\limits_{Q_{t_2,T}}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(A_{\alpha\beta}D^\beta u_t^k, D^\alpha\left(u_t^k e^{-\lambda|x|}\varphi(t)\right)\right)dxdt\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{Q_{t_2,T}}\left(a_0(t)-\frac{\lambda a(t)}{2\varepsilon_6}\right)\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u_t^k|^2 e^{-\lambda|x|}\varphi(t)dxdt-\frac{\lambda\varepsilon_6}{2}\int\limits_{Q_{t_2,T}}|u_t^k|^2 e^{-\lambda|x|}\varphi(t)dxdt;$$

$$I_7=\int\limits_{Q_{t_2,T}}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(B_{\alpha\beta}D^\beta u^k, D^\alpha\left(u_t^k e^{-\lambda|x|}\varphi(t)\right)\right)dxdt\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_2,T}}\left[\varphi'(t)b^0(t)+\varphi(t)b^1(t)+\frac{\lambda b(t)}{\varepsilon_7}\right]\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u^k|^2 e^{-\lambda|x|}dxdt-$$

$$-\frac{\lambda\varepsilon_7}{2}\int\limits_{Q_{t_2,T}}|u_t^k|^2 e^{-\lambda|x|}\varphi(t)dxdt;$$

$$I_8=\int\limits_{Q_{t_2,T}}\sum_{|\alpha|=1}\left(C_\alpha D^\alpha u^k, u_t^k e^{-\lambda|x|}\varphi(t)\right)dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\varepsilon_8}\int\limits_{Q_{t_2,T}}c(t)\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u^k|^2 e^{-\lambda|x|}\varphi(t)dxdt+\frac{\varepsilon_8}{2}\int\limits_{Q_{t_2,T}}|u_t^k|^2 e^{-\lambda|x|}\varphi(t)dxdt;$$

$$I_9=\int\limits_{Q_{t_2,T}}\left(A(x,t)u^k, u_t^k e^{-\lambda|x|}\varphi(t)\right)dxdt\leqslant\frac{\varepsilon_9}{2}\int\limits_{Q_{t_2,T}}|u_t^k|^2 e^{-\lambda|x|}\varphi(t)dxdt+$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon_9}\int\limits_{Q_{t_2,T}}\|A(x,t)\|^2|u^k|^2 e^{-\lambda|x|}\varphi(t)dxdt;$$

$$I_{10}=\int\limits_{Q_{t_2,T}}\left(f^k(x,t), u_t^k e^{-\lambda|x|}\varphi(t)\right)dxdt\leqslant\frac{\varepsilon_{10}}{2}\int\limits_{Q_{t_2,T}}|u_t^k|^2 e^{-\lambda|x|}\varphi(t)dxdt+$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon_{10}}\int\limits_{Q_{t_2,T}}|f^k(x,t)|^2 e^{-\lambda|x|}\varphi(t)dxdt.$$

Виберемо ε_6 таким чином, щоб справджувалася нерівність:

$$\frac{\lambda\hat{a}}{a}<\varepsilon_6<\frac{2}{\lambda}.$$

Тоді з довільності вибору $\varepsilon_7,\varepsilon_8,\varepsilon_9,\varepsilon_{10}$ і з оцінок інтегралів $I_6, I_7, I_8, I_9, I_{10}$ випливає нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_2+1,T}}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}|D^\alpha u_t^k|^2 e^{-\lambda|x|}dxdt\leqslant\frac{M_2(\varepsilon_6)}{\delta}\left[\int\limits_{Q_{t_2,T}}|f^k(x,t)|^2 e^{-\lambda|x|}dxdt+\right.$$

$$+\int\limits_{Q}\exp\left(-\int\limits_{t}^{T}\rho_1(\theta,\lambda,\Delta_1)d\theta\right)|f^k(x,t)|^2e^{-\lambda|x|}dxdt\exp\left(\int\limits_{t_2}^{T}\rho_1(\theta,\lambda,\Delta_1)d\theta\right)+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{T}\rho_1(\theta,\lambda,\Delta_1)\int\limits_{Q_{t,T}}\exp\left(-\int\limits_{\theta}^{T}\rho_1(\tau,\lambda,\Delta_1)d\tau\right)|f^k(x,\theta)|^2e^{-\lambda|x|}dxd\theta dt\times$$

$$\left.\times\exp\left(\int\limits_{t_2}^{T}\rho_1(\theta,\lambda,\Delta_1)d\theta\right)\right]\leqslant M_3(\Delta_1,\varepsilon_6,t_2). \tag{14}$$

Нерівність (5) для функцій $u^k(x,t)$ може бути записана у формі:

$$\int\limits_{Q_{t_2+1,T}}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}|D^\alpha u^k|^2e^{-\lambda|x|}dxdt\leqslant M_4(\Delta_1,\varepsilon_6,t_2). \tag{15}$$

Отже, для функцій $u^k(x,t)$ справедливі оцінки:

$$\|u_t^k\|_{L^2_{\rm loc}((t_2+1,T);(H_0(\Omega_t))^n)}\leqslant M_3;\quad \|u^k\|_{L^2_{\rm loc}((t_2+1,T);(H_0(\Omega_t))^n)}\leqslant M_4, \tag{16}$$

де $t_2<(T-1)$ - довільне фіксоване, а сталі M_3 та M_4 не залежать від k.

Розглянемо область $Q_{t_1,T}$, де $t_1=T-1$. Тоді з $\{u^k(x,t)\}$ можна виділити підпослідовність $\{u^{k,1}(x,t)\}$ таку, що: $\{u^{k,1}(x,t)\}\to u^1(x,t)$ слабко в $L^2_{\rm loc}((t_1,T);(H_0(\Omega_t))^n)$; $\{u_t^{k,1}(x,t)\}\to u_t^1(x,t)$ слабко в $L^2_{\rm loc}((t_1,T);(H_0(\Omega_t))^n)$, коли $k\to\infty$, причому для u^1 справедливі оцінки (16).

Далі розглядаємо послідовність $\{u^{k,1}(x,t)\}$ в області $Q_{t_2,T}$, де $t_2=T-2$, і виділяємо підпослідовність $\{u^{k,2}(x,t)\}$ таку, що: $\{u^{k,2}(x,t)\}\to u^2(x,t)$ слабко в $L^2_{\rm loc}((t_2,T);(H_0(\Omega_t))^n)$; $\{u_t^{k,2}(x,t)\}\to u_t^2(x,t)$ слабко в $L^2_{\rm loc}((t_2,T);(H_0(\Omega_t))^n)$, коли $k\to\infty$.

Продовжуючи цей процес далі, тобто, покладаючи $t_i=T-i$, ми отримаємо діагональну послідовність $\{u^{k,k}(x,t)\}$. Зауважимо, що

$$u^k(x,t)=u^s(x,t),\qquad (x,t)\in Q_{t_s,T},$$

якщо $k>s$. Побудуємо тепер функцію $u(x,t)$ за формулою:

$$u(x,t)=u^k(x,t),\qquad (x,t)\in Q_{t_k,T},\quad k=1,2,...$$

Тоді $\{u^{k,k}(x,t)\}\to u(x,t)$ слабко в $L^2_{\rm loc}((\tau_0,T);(H_0(\Omega_t))^n)$; $\{u_t^{k,k}(x,t)\}\to u_t(x,t)$ слабко в $L^2_{\rm loc}((\tau_0,T);(H_0(\Omega_t))^n)$, коли $k\to\infty$, для будь-якого фіксованого $\tau_0<T$. Крім того

$$\|u_t\|_{L^2_{\rm loc}((-\infty,T);(H_0(\Omega_t))^n)}\leqslant M_3;\quad \|u\|_{L^2_{\rm loc}((-\infty,T);(H_0(\Omega_t))^n)}\leqslant M_4.$$

Легко бачити, що $u(x,t)$ є узагальненим розв'язком задачі (1),(2) і нерівність (9) для нього виконується. Теорему доведено.

1. Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.it Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. матем. и мех. – 1960. – Т.24, Вып.5. – С.852–864.

2. Рубинштейн Л.И. *К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах* // Изв. АН СССР. Сер. география и геофизика. – 1948. – Т.12, N.1. – С.27–45.

3. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв.- Москва: Наука, 1976. – 352с.

4. Majchrowski M. *On inverse problems with nonlocal condition for parabolic systems of partial differential equations and pseudoparabolic equations* // Demonstr. math. – 1993. – Vol.26, N.1. – P.255–275.

5. Бас М.О., Лавренюк С.П. *Про єдиність розв'язку задачі Фур'є для однієї системи типу Соболєва-Галперна* // Укр. матем. журнал – 1996. – Т.48, N1. – С.124– 128.

6. Rundell W. *The uniqueness class for the cauchy problem for pseudoparabolic equations* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1979. – Vol.76, N.2. – P.253–257.

Стаття надійшла до редколегії 10.09.1997

УДК 517.95

ДЕЯКІ ПАРАБОЛІЧНІ ВАРІАЦІЙНІ НЕРІВНОСТІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

О.М. Бугрій

Buhrii O.M. Some parabolic variational inequalities without initial conditions. Some nonlinear parabolic variational inequalities without initial condition in an unbounded (with respect to a time variable) domain were studied. The existence and uniqueness condition of the solution of these inequalities was obtained.

Задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь та систем досліджувалися раніше багатьма авторами [1] – [8]. Зокрема, варіаційні нерівності без початкових умов у класах обмежених, періодичних або майже періодичних за часом функцій розглянуто у [9], [10]. У даній праці досліджено деякі параболічні варіаційні нерівності без початкових умов у необмеженій за часом циліндричній області. Отримано умови існування та єдиності розв'язку нерівності у класі функцій, які можуть експоненціально зростати, якщо час прямує до мінус нескінченності. Зазначимо, що аналогічні дослідження для інших параболічних нерівностей та їх систем проведено раніше у [11], [12].

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$, $Q_T = \Omega \times (-\infty, T)$, $T \leqslant \infty$; $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$; V – замкнений підпростір, $\overset{o}{H}{}^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$; K – опукла замкнена множина в V, яка містить нульовий елемент;
$W = \{w(x,t) | w \in L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty, T); V), w_t \in L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty, T); V^*)\}$.

Розглянемо задачу про знаходження функції $u(x,t)$, яка задовольняє включенням $u(x,t) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}((-\infty, T); L^2(\Omega)) \cap W$, $u(x,t) \in K$ майже для усіх $t \in (-\infty, T]$ і яка справджує варіаційну нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1 t_2}} \Big[v_t(v-u) + \sum_{i=1}^n a_i(x, |u_{x_i}|) u_{x_i}(v_{x_i} - u_{x_i}) + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) u_{x_i}(v-u) + c(x,t)u(v-u) +$$
$$+ g(x,t,u)(v-u) - f_0(x,t)(v-u) - \sum_{i=1}^n f_i(x,t)(v_{x_i} - u_{x_i}) \Big]\, dx\, dt \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} \int\limits_\Omega [v(x,t_2) - u(x,t_2)]^2\, dx - \frac{1}{2} \int\limits_\Omega [v(x,t_1) - u(x,t_1)]^2\, dx \qquad (1)$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35K85.

для довільної функції $v \in W$, $v \in K$ майже для усіх $t \in (-\infty, T]$ і для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$.

Будемо вважати, що функції a_i, b_i, $(i = \overline{1,n})$, c, g в нерівності (1) справджують такі умови:

(A): майже для усіх $x \in \Omega$ функція $\tau \to a(x,\tau)$ неперервна на $\mathbb{R}_+$, а функція $x \to a_i(x,\tau)$ вимірна для усіх $\tau \in \mathbb{R}_+$;
для усіх $\tau, s \in \mathbb{R}_+$, $\tau \geqslant s$, і майже усіх $x \in \Omega$ $a_i(x,\tau)\tau - a_i(x,\tau)s \geqslant a_0(\tau - s)$, $a_0 = \mathrm{const}$, $a_0 > 0$, $(i = \overline{1,n})$ для майже усіх $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$, $|a_i(x,\tau)| \leqslant a_1$, $a_1 = \mathrm{const}$;

(B): $b_i \in L^\infty(Q_T)$, $(i = \overline{1,n})$; $b_0 = \sup\limits_{Q_T} \sum\limits_{i=1}^n b_i^2(x,t)$;

(C): $c \in L^\infty(Q_T)$, $c(x,t) \geqslant c_0 > 0$ майже скрізь в Q_T;

(D): майже для усіх $(x,t) \in Q_T$ функція $\tau \to g(x,t,\tau)$ неперервна на $\mathbb{R}$, а функція $(x,t) \to g(x,t,\tau)$ вимірна для усіх $\tau \in \mathbb{R}$;
для усіх $\tau \in \mathbb{R}$ і майже усіх $(x,t) \in Q_T$ $|g(x,t,\tau)| \leqslant g_0|\tau|^{p-1}$,
$g_0 = \mathrm{const}$, $1 < p \leqslant 2$;
$\int\limits_\Omega [g(x,t,v_1) - g(x,t,v_2)](v_1 - v_2)\,dx \geqslant 0$ для довільних $v_1, v_2 \in L^p(\Omega)$.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів нерівності (1) справджуються умови* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)** *і* $b_0 < 4a_0c_0$. *Тоді нерівність (1) не може мати більше одного розв'язку* $u(x,t)$, *який справджує умову* $\lim\limits_{t\to-\infty} \int\limits_\Omega u^2(x,t)e^{\alpha_0 t}\,dx = 0$, *де* $\alpha_0 = (4a_0c_0 - b_0)/(2a_0)$.

Доведення. Нехай існує два розв'язки $u^{(1)}(x,t)$, $u^{(2)}(x,t)$ нерівності (1). Оскільки $u_1, u_2 \in W$, то з теореми 1.17 [13] випливає, що $u^{(i)} \in C((-\infty,T]; L^2(\Omega))$ і мають сенс інтеграли

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} u^{(i)} u_t^{(i)}\,dx\,dt, \quad (i = 1,2).$$

Розглянемо оператор A, який майже для усіх $t \in (-\infty, T]$ визначається рівністю

$$\langle Au, v\rangle(t) = \int\limits_\Omega \left[\sum_{i=1}^n a(x,|u_{x_i}|)u_{x_i}v_{x_i} + \sum_{i=1}^n b(x,t)u_{x_i}v + c(x,t)uv + g(x,t,u)v\right] dx$$

де $u, v \in W$. Оператор A є обмеженим і монотонним. Справді,

$$\langle Au - Av, u - v\rangle(t) = \int\limits_\Omega \Big[\sum_{i=1}^n (a_i(x,|u_{x_i}|)u_{x_i} - a_i(x,|v_{x_i}|)v_{x_i})(u_{x_i} - v_{x_i}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n b_i(x,t)(u_{x_i} - v_{x_i})(u - v) + c(x,t)(u-v)^2 + (g(x,t,u) - g(x,t,v))(u - v)\Big]\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_\Omega \Big[\left(a_0 - \frac{b_0\delta_0}{2}\right)\sum_{i=1}^n (u_{x_i} - v_{x_i})^2 + \left(c_0 - \frac{1}{2\delta_0}\right)(u-v)^2\Big]\,dx \geqslant \frac{\alpha_0}{2}\int\limits_\Omega (u-v)^2\,dx. \tag{2}$$

Легко показати, що для функцій $u_1, u_2 \in L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty,T]; V) \cap C((-\infty,T]; L^2(\Omega))$, які справджують нерівності

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (v_t - F_i)(v - u_i)\,dx\,dt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_\Omega [v(x,t_2) - u_i(x,t_2)]^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega [v(x,t_1) - u_i(x,t_1)]^2\,dx \tag{3}$$

$(i = 1, 2)$ виконується оцінка:

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (F_1(x,t) - F_2(x,t))(u_1 - u_2)\,dx\,dt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[u_1(x,t_2) - u_2(x,t_2)]^2\,dx - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[u_1(x,t_1) - u_2(x,t_1)]^2\,dx. \tag{4}$$

Зокрема, нерівності (3), (4) виконуються для функцій

$$F_i(x,t) = f_0(x,t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x,t)}{\partial x_i} - Au^{(i)}, \ (i = 1, 2),$$

оскільки $u^{(i)}(x,t)$ – розв'язки нерівності (1). Тоді з (4) отримаємо, що

$$\frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}y(t)\,dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} \langle Au^{(1)} - Au^{(2)}, u^{(1)} - u^{(2)}\rangle(t)\,dt \leqslant 0$$

для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$, де $y(t) = \int\limits_{\Omega}[u^{(1)}(x,t) - u^{(2)}(x,t)]^2\,dx$.

Врахувавши (2), з останньоі нерівності отримаємо, що

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} (y'(t) + \alpha_0 y(t))\,dt \leqslant 0$$

для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$. Отже, $y'(t) + \alpha_0 y(t) \leqslant 0$ майже скрізь на $(-\infty, T]$. Тому $y(t_2)e^{\alpha_0 t_2} \leqslant y(t_1)e^{\alpha_0 t_1}$ для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$.
Оскільки $\lim\limits_{t_1 \to -\infty} y(t_1)e^{\alpha_0 t_1} = 0$, то $y(t) \leqslant 0$. Але $y(t) \geqslant 0$. Отже, $y(t) = 0$ майже для усіх $t \in (-\infty, T]$, тому $u^{(1)}(x,t) = u^{(2)}(x,t)$ майже скрізь у Q_T.

Теорема 2. *Нехай виконуються всі умови теореми 1 і разом з тим функції $t \to b_i(x,t)$, $t \to c(x,t)$, $t \to f_k(x,t)$, $(i = \overline{1,n})$, $(k = \overline{0,n})$ неперервні на $(-\infty, T]$ майже для усіх $x \in \Omega$; для довільного $\varepsilon_0 > 0$ існує таке $\delta > 0$, що*

$$|g(x, t+\delta, \tau) - g(x,t,\tau)| \leqslant \varepsilon_0 |\tau|^{p-1}$$

для довільних $t \in (-\infty, T]$; існує таке дійсне число $\lambda \in (0, \alpha_0/2)$, що $f_k(x,t)e^{\lambda t} \in L^2(Q_T)$, $(k = \overline{0,n})$. Тоді існує розв'язок $u(x,t)$ нерівності (1), який справджує умову

$$\lim_{t \to -\infty} \int\limits_{\Omega} u^2(x,t)e^{2\lambda t}\,dx = 0.$$

Доведення. Розглянемо в $Q_{t_0,T}$ задачу

$$u_t + A(t)u + \frac{1}{\varepsilon}B(ue^{2\lambda t}) = f_{0,t_0}(x,t) - \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_{i,t_0}(x,t)}{\partial x_i}, \tag{5}$$

$$u(x,t_0) = 0, \quad t_0 \in (-\infty, T], \tag{6}$$

де $\varepsilon > 0$, $B(w) = J(w - P_k(w))$, J – оператор двоїстості між V і V^*, P_K – оператор проектування на K,

$$f_{k,t_0}(x,t) = \begin{cases} f_k(x,t), & (x,t) \in Q_{t_0,T}, \\ 0, & (x,t) \in Q_{t_0}, (k = \overline{0,n}). \end{cases}$$

Зазначимо, що оператор B є обмеженим, монотонним і ліпшиць-неперервним оператором ([9], стор. 384). За теоремою 1.2 ([9], стор. 173) існує функція $u(x,t)$, яка є розв'язком задачі (5), (6) в $Q_{t_0,T}$ і яка справджує включення $u \in L^2((t_0,T);V)$, $u_t \in L^2((t_0,T);V^*)$. Вибираючи тепер $t_0 = T-1, T-2, \ \dots, T-k, \ \dots$, отримаємо послідовність функцій $\{u^{k,\varepsilon}(x,t)\}$, які є розв'язками задачі (5), (6). Продовжимо кожну функцію $u^{k,\varepsilon}(x,t)$ нулем в область Q_{T-k}. Тоді для довільних k і довільних $v \in L^2((-\infty,T];V)$, $\tau \in (-\infty,T]$ справджується рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg[u_t^{k,\varepsilon} v + \sum_{i=1}^{n} a_i(x, |u_{x_i}^{k,\varepsilon}|) u_{x_i}^{k,\varepsilon} v_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) u_{x_i}^{k,\varepsilon} v + c(x,t) u^{k,\varepsilon} v +$$

$$+ g(x,t,u^{k,\varepsilon})v + \frac{1}{\varepsilon} B(u^{k,\varepsilon} e^{2\lambda t})v - f_0(x,t)v - \sum_{i=1}^{n} f_i(x,t) v_{x_i} \Bigg] \, dx\, dt = 0. \tag{7}$$

Провівши в (7) заміну $u^{k,\varepsilon}(x,t) = w^{k,\varepsilon}(x,t)e^{-\lambda t}$ і вибравши $v(x,t) = w^{k,\varepsilon}(x,t)e^{\lambda t}$, одержимо таку оцінку:

$$\int\limits_{\Omega} |w^{k,\varepsilon}(x,\tau)|^2 \, dx + \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[\left(a_0 - \frac{\delta_1 b_0}{2} - \delta_2 \right) \sum_{i=1}^{n} |w_{x_i}^{k,\varepsilon}|^2 +$$

$$+ \left(c_0 - \frac{1}{2\delta_1} - \lambda - \delta_3 \right) |w^{k,\varepsilon}|^2 + \frac{1}{\varepsilon} B(w^{k,\varepsilon} e^{\lambda t}) w^{k,\varepsilon} e^{\lambda t} \Bigg] \, dx\, dt \leqslant \mu_1 F_\lambda.$$

Тут $F_\lambda = \int\limits_{Q_\tau} \sum\limits_{i=1}^{\infty} f_k^2(x,t) e^{2\lambda t} \, dx\, dt$, δ_1, δ_2, δ_3 – додатні числа, які виберемо так, щоб справджувалися нерівності $a_0 - \dfrac{\delta_1 b_0}{2} - \delta_2 > 0$, $c_0 - \dfrac{1}{2\delta_1} - \lambda - \delta_3 > 0$. Це легко зробити завдяки умові $b_0 < 4a_0c_0$. Тоді, оскільки $w^{k,\varepsilon}(x,t) = u^{k,\varepsilon}(x,t)e^{\lambda t}$, одержимо, що

$$\int\limits_{\Omega} |u^{k,\varepsilon}(x,\tau)|^2 e^{2\lambda\tau} \, dx \leqslant \mu_2 F_\lambda, \quad \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[|u^{k,\varepsilon}(x,\tau)|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^{k,\varepsilon}(x,t)|^2 \Bigg] e^{2\lambda t} \, dx\, dt \leqslant \mu_2 F_\lambda,$$

$$\int\limits_{Q_\tau} B(u^{k,\varepsilon} e^{2\lambda t}) u^{k,\varepsilon} e^{2\lambda t} \, dx\, dt \leqslant \mu_2 \varepsilon F_\lambda, \ \tau \in (-\infty, T], \tag{8}$$

де стала μ_2 не залежить від k і ε. Поряд з тим на підставі умови **(D)** стосовно коефіцієнтів нерівності (1)

$$\int\limits_{Q_\tau} |g(x,t,u^{k,\varepsilon})|^2 e^{2\lambda t}\,dx\,dt \leqslant \mu_4(F_\lambda+1), \tag{9}$$

де стала μ_4 не залежить від k і ε. Отже, існує підпослідовність послідовності $\{u^{k,\varepsilon}(x,t)\}$ (збережемо для цієї підпослідовності позначення $\{u^{k,\varepsilon}(x,t)\}$) , для якої $e^{\lambda t}u^{k,\varepsilon}(x,t) \to e^{\lambda t}u^{\varepsilon}(x,t)$ $*$ – слабко в $L^\infty((-\infty,T];L^2(\Omega))$; $e^{\lambda t}u^{k,\varepsilon}(x,t) \to e^{\lambda t}u^\varepsilon(x,t)$ слабко в $L^2((-\infty,T];V)$; $e^{\lambda t}g(x,t,u^{k,\varepsilon}) \to e^{\lambda t}z(x,t)$ слабко в $L^2(Q_T)$ при $k\to\infty$.

Оскільки оператор $g(x,t,u)$ – монотонний, то $z(x,t)=g(x,t,u^\varepsilon)$. Тоді функція $u^\varepsilon(x,t)$ є розв'язком рівняння

$$u_t + A(t)u + \frac{1}{\varepsilon}B(ue^{2\lambda t}) = f_0(x,t) - \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial f_i(x,t)}{\partial x_i}, \tag{10}$$

і ця функція справджує включення

$$e^{\lambda t}u^\varepsilon \in L^\infty((-\infty,T];L^2(\Omega))\cap L^2((-\infty,T];V); e^{\lambda t}u_t^\varepsilon \in L^2((-\infty,T];V^*).$$

Крім того функція $u^\varepsilon(x,t)$ справджує оцінки (8), (9).

Нехай $v\in W$, $v\in K$ майже для усіх $t\in(-\infty,T]$. Оскільки $B(ve^{2\lambda t})=0$, то з (10) і монотонності оператора B отримаємо, що

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\Bigg[v_t(v-u^\varepsilon)+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,|u^\varepsilon_{x_i}|)u^\varepsilon_{x_i}(v_{x_i}-u^\varepsilon_{x_i})+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)u^\varepsilon_{x_i}(v-u^\varepsilon)+\\
&+c(x,t)u^\varepsilon(v-u^\varepsilon)+g(x,t,u^\varepsilon)(v-u^\varepsilon)-f_0(x,t)(v-u^\varepsilon)-\\
&-\sum_{i=1}^{n}f_i(x,t)(v_{x_i}-u^\varepsilon_{x_i})\Bigg]\,dx\,dt=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q_{t_1t_2}}\left[B(ve^{2\lambda t})-B(u^\varepsilon e^{2\lambda t})\right]\times\\
&\times(v-u^\varepsilon)\,dx\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[v(x,t_2)-u^\varepsilon(x,t_2)]^2\,dx-\\
&-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[v(x,t_1)-u^\varepsilon(x,t_1)]^2\,dx \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[v(x,t_2)-u^\varepsilon(x,t_2)]^2\,dx-\\
&-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[v(x,t_1)-u^\varepsilon(x,t_1)]^2\,dx
\end{aligned} \tag{11}$$

для довільних $t_1,t_2\in(-\infty,T]$, $t_1<t_2$.

Покажемо, що на $(-\infty,T]$ існує послідовність $\{e^{\lambda t}u^{\varepsilon_m}(x,t)\}\subset\{e^{\lambda t}u^\varepsilon(x,t)\}$ зі значеннями в $L^2(\Omega)$, одностайно неперервна на кожному відрізку $[T_1,T_2]\subset(-\infty,T]$. Справді, за лемою Фату і оцінкою (8_2) для послідовності $\{e^{\lambda t}u^\varepsilon(x,t)\}$ справедлива нерівність

$$\int\limits_{T_1-1}^{T_2} e^{2\lambda t}\liminf ||u^\varepsilon(x,t)||^2_V\,dt \leqslant \liminf\int\limits_{T_1-1}^{T_2} e^{2\lambda t}||u^\varepsilon(x,t)||^2_V\,dt \leqslant \mu_2F_\lambda.$$

Отже, $e^{2\lambda t}\liminf ||u^{\varepsilon}(x,t)||_V^2 < \infty$ майже для усіх $t \in [T_1-1, T_2]$. Тоді існує таке $\hat{T} \in [T_1-1, T_2]$, що $e^{2\lambda\hat{T}}\liminf ||u^{\varepsilon}(x,\hat{T})||_V^2 \leqslant \mu_5$.

Нехай $\hat{T} = T_1$ і $\{u^{\varepsilon_m}(x,t)\}$ – підпослідовність, на якій справджується рівність

$$\liminf ||u^{\varepsilon_m}(x,T_1)||_V^2 = \lim_{m\to\infty} ||u^{\varepsilon_m}(x,T_1)||_V^2$$

. Тоді

$$||u^{\varepsilon_m}(x,T_1)||_V^2 \leqslant \mu_6 \tag{12}$$

для усіх m. Візьмемо в (11) $t_1 = T_1$, $t_2 = T_1+\delta$, $v(x,t) = u^{\varepsilon_m}(x,T_1)$. Тоді

$$\int\limits_{\Omega} |u^{\varepsilon_m}(x,T_1+\delta) - u^{\varepsilon_m}(x,T_1)|^2\,dx \leqslant 2 \int\limits_{Q_{T_1,T_1+\delta}} \Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,|u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,t)|)u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,t)[u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,T_1)-$$

$$-u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,t)] + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,t)[u^{\varepsilon_m}(x,T_1) - u^{\varepsilon_m}(x,t)] + c(x,t)u^{\varepsilon_m}(x,t)[u^{\varepsilon_m}(x,T_1)-$$

$$-u^{\varepsilon_m}(x,t)] + g(x,t,u^{\varepsilon_m}(x,t))[u^{\varepsilon_m}(x,T_1) - u^{\varepsilon_m}(x,t)] - f_0(x,t)[u^{\varepsilon_m}(x,T_1)-$$

$$-u^{\varepsilon_m}(x,t)] - \sum_{i=1}^{n} f_i(x,t)[u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,T_1) - u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,t)]\Bigg]\,dx\,dt \leqslant \mu_7\Bigg[\delta||u^{\varepsilon_m}(x,T_1)||_V^2+$$

$$+e^{-2\lambda T_1}\int\limits_{Q_{T_1,T_1+\delta}} \left[|u^{\varepsilon_m}|^2 + \sum_{i=1}^{n}|u^{\varepsilon_m}_{x_i}|^2 + |g(x,t,u^{\varepsilon_m}(x,t))|^2 + \sum_{k=0}^{n} f_k^2(x,t)\right] e^{2\lambda t}\,dx\,dt\Bigg].$$

З цієї нерівності на підставі (8), (9), (12) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} |u^{\varepsilon_m}(x,T_1+\delta) - u^{\varepsilon_m}(x,T_1)|^2\,dx \leqslant \mu_8\delta, \tag{13}$$

де стала μ_8 залежить від T_1, але не залежить від m.

Використаємо тепер оцінку (4), в якій візьмемо

$$t_1 = T_1,\;\; t_2 = t,\;\; u_1(x,t) = u^{\varepsilon_m}(x,t),\;\; u_2(x,t) = u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta),$$

$$F_1(x,t) = f_0(x,t) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(x,t)}{\partial x_i} - A(t)u^{\varepsilon_m}(x,t),$$

$$F_2(x,t) = f_0(x,t+\delta) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(x,t+\delta)}{\partial x_i} - A(t+\delta)u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta).$$

Тоді

$$\int\limits_{\Omega} |u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta) - u^{\varepsilon_m}(x,t)|^2\,dx \leqslant \int\limits_{\Omega} |u^{\varepsilon_m}(x,T_1+\delta) - u^{\varepsilon_m}(x,T_1)|^2\,dx+$$

$$+2\int\limits_{Q_{T_1,t}} [f_0(x,t) - f_0(x,t+\delta)][u^{\varepsilon_m}(x,t) - u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)]\,dx\,dt+$$

$$+2\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_{T_1,t}}[f_i(x,t)-f_i(x,t+\delta)]\,[u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,t)-u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,t+\delta)]\,dx\,dt-$$

$$-2\int\limits_{T_1}^{t}d\tau\int\limits_{\Omega}[A(\tau+\delta)u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)-A(\tau)u^{\varepsilon_m}(x,\tau)][u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)-u^{\varepsilon_m}(x,\tau)]\,dx.$$

Звідси, використавши нерівність Гельдера, оцінки (8), (9), (13) і врахувавши монотонність оператора A та умови теореми, матимемо, що послідовність $\{e^{\lambda t}u^{\varepsilon_m}(x,t)\}$ одностайно неперервна на довільному відрізку $[T_1,T_2]\in(-\infty,T]$. Оскільки функції $\{e^{\lambda t}u^{\varepsilon_m}(x,t)\}$ справджують умови (8), (9) і оператор g монотонний, то з цієї послідовності можна вибрати таку збіжну підпослідовність (нехай це буде $\{e^{\lambda t}u^{\varepsilon_m}(x,t)\}$), що $e^{\lambda t}u^{\varepsilon_m}(x,t)\to e^{\lambda t}\tilde u(x,t)$ $*$ – слабко в $L^\infty((-\infty,T];L^2(\Omega))$; $e^{\lambda t}u^{\varepsilon_m}(x,t)\to e^{\lambda t}\tilde u(x,t)$ слабко в $L^2((-\infty,T];V)$; $e^{\lambda t}u^{\varepsilon_m}\to e^{\lambda t}\tilde u$ рівномірно в $C([T_1,T_2];L^2(\Omega))$; $e^{\lambda t}g(x,t,u^{\varepsilon_m}(x,t))\to e^{\lambda t}g(x,t,\tilde u(x,t))$ слабко в $L^2(\mathbb{Q}_T)$ при $\varepsilon_m\to 0$. Розглянувши тепер відрізки $[T-1,T]$, $[T-2,T],\ldots$ $\ldots$, $[T-m,T]$, ..., можна виділити таку діагональну послідовність $\{e^{\lambda t}u^{m,m}(x,t)\}$, що $e^{\lambda t}u^{m,m}(x,t)\to e^{\lambda t}u(x,t)$ $*$ – слабко в $L^\infty((-\infty,T];L^2(\Omega))$; $e^{\lambda t}u^{m,m}(x,t)\to e^{\lambda t}u(x,t)$ слабко в $L^2((-\infty,T];V)$; $e^{\lambda t}u^{m,m}(x,t)\to e^{\lambda t}u(x,t)$ рівномірно в $C([T_1,T_2];L^2(\Omega))$; $e^{\lambda t}g(x,t,u^{m,m}(x,t))\to e^{\lambda t}g(x,t,u(x,t))$ слабко в $L^2(Q_T)$ при $m\to\infty$ для довільного $T_1\in(-\infty,T)$. Поряд з цим функції $\{u^{m,m}(x,t)\}$ справджують нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\Bigg[v_t(v-u^{m,m})+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,|u^{m,m}_{x_i}|)u^{m,m}_{x_i}(v_{x_i}-u^{m,m}_{x_i})+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)u^{m,m}_{x_i}(v-u^{m,m})+c(x,t)u^{m,m}(v-u^{m,m})+g(x,t,u^{m,m})(v-$$
$$-u^{m,m})-f_0(x,t)(v-u^{m,m})-\sum_{i=1}^{n}f_i(x,t)(v_{x_i}-u^{m,m}_{x_i}\Bigg]\,dx\,dt\geqslant$$
$$\geqslant\frac12\int\limits_{\Omega}[v(x,t_2)-u^{m,m}(x,t_2)]^2\,dx-\frac12\int\limits_{\Omega}[v(x,t_1)-u^{m,m}(x,t_1)]^2\,dx$$

для довільних $t_1,t_2\in(-\infty,T]$, $t_1<t_2$; $v\in W$, $v\in K$ майже для усіх $t\in(-\infty,T]$. З нерівності (8_3) випливає, що $B(ue^{2\lambda t})=0$, тому $u\in K$ майже для усіх $t\in(-\infty,T]$. Тоді, аналогічно як в [9], стор. 407, отримуємо, що функція $u(x,t)$ є розв'язком нерівності (1) і $\lim\limits_{t\to-\infty}\int\limits_{\Omega}u^2(x,t)e^{2\lambda t}\,dx=0$.

Аналогічно можна довести теореми існування та єдиності розв'язку варіаційної нерівності

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\Bigg[v_t(v-u)+\sum_{i=1}^{n}a(x,|u_x|^{q-1})|u_x|^{q-2}u_{x_i}(v_{x_i}-u_{x_i})+c(x,t)u(v-u)+$$
$$+g(x,t,u)(v-u)+\lambda(v-u)^2-f(x,t)(v-u)\Big]\,e^{2\lambda t}\,dx\,dt\geqslant$$
$$\geqslant\frac12\int\limits_{\Omega}[v(x,t_2)-u(x,t_2)]^2e^{2\lambda t_2}\,dx-\frac12\int\limits_{\Omega}[v(x,t_1)-u(x,t_1)]^2e^{2\lambda t_1}\,dx \qquad (14)$$

стосовно функції $u(x,t) \in L^{\infty}_{\text{loc}}((-\infty,T];L^2(\Omega)) \cap X$, $u \in K_1$ майже для усіх $t \in (-\infty,T]$, де $t_1, t_2 \in (-\infty,T]$, $t_1 < t_2$; $v \in X$, $v \in K_1$ майже для усіх $t \in (-\infty,T]$;

$$X = \{w(x,t) | w \in L^q_{\text{loc}}((-\infty,T];W^{1,q}(\Omega)), w_t \in L^r_{\text{loc}}((-\infty,T];W^{1,r}(\Omega))\},$$

де $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$, K_1 – опукла замкнена множина у $W^{1,q}(\Omega)$, яка містить нульовий елемент; $\lambda \geqslant \lambda_0 \in \mathbb{R}_+$. Сформулюємо лише ці теореми.

Теорема 3. *Нехай для коефіцієнтів a, c, g нерівності (14) справджуються умови* **(A)**, **(C)**, **(D)**. *Тоді нерівність (14) не може мати більше одного розв'язку $u(x,t)$, який справджує умову*

$$\lim_{t\to-\infty} \int\limits_{\Omega} u^2(x,t) e^{2c_0 t}\, dx = 0.$$

Теорема 4. *Нехай виконуються всі умови теореми 3 і поряд з цим функції $t \to c(x,t)$, $t \to f(x,t)$ неперервні на $(-\infty,T]$ майже для усіх $x \in \Omega$; для довільного $\varepsilon_0 > 0$ існує таке $\delta > 0$, що $|g(x,t+\delta,\tau) - g(x,t,\tau)| \leqslant \varepsilon_0 |\tau|^{p-1}$ для довільних $t \in (-\infty,T]$; існує таке додатне число $\lambda_0 \in (0,c_0)$, що $f(x,t)e^{\lambda_0 t} \in L^2(Q_T)$. Тоді існує розв'язок $u(x,t)$ нерівності (14), який справджує умову*

$$\lim_{t\to-\infty} \int\limits_{\Omega} u^2(x,t) e^{2\lambda_0 t}\, dx = 0.$$

1. Олейник О. А., Иосифьян Г. А. *Аналог принципа Сен–Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений*// Успехи математ. наук. – 1976. – Т. 31, N6. – С. 142–166.

2. Олейник О.А. *О поведении решений линейных параболических систем дифференциальных уравнений в неограниченных областях*// Успехи математических наук. – 1975. – Т. 30, вып. 2. – С. 219–220.

3. Олейник О.А., Радкевич Е.В. *Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена–Линделефа для общих параболических систем дифференциальных уравнений* // Функциональный анализ и его приложения. – 1974. – Т. 8, вып. 4. – С. 59–70.

4. Бокало Н.М. *О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений* // Труды семинара им. И.Г.Петровского. – 1989. Вып.14. – С. 3–44.

5. Бокало Н.М. *Об однозначной разрешимости краевых задач для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности*// Сибирский математический журнал. – 1993. – Т. 34, N 4. – С. 33–40.

6. Ивасишен С.Д. *О параболических граничных задачах без начальных условий* // Укр. математ. журнал. – 1982. – Т. 34, N5. – С. 547–552.

7. Ивасишен С.Д. *О корректной разрешимости некоторых параболических граничных задач без начальных условий* // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14, N 2. – С. 361–363.

8. Лавренюк С.П. *Задача без начальных условий для одной эволюционной системы. Условия единственности* // Нелинейные граничные задачи. – 1993. вып. 5. – С. 53–58.

9. Лионс Ж.- Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. – 607 с.

10. Панков А. А. Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наукова думка, 1985. 184 с.

11. Лавренюк С.П. *Параболические вариационные неравенства без начальных условий* // Диференциальные уравнения. – 1996. 32, N10. – С. 1–5.

12. Лавренюк С.П. *Системи параболічних варіаційних нерівності без початкових умов* // Укр. математ. журнал. – 1997. – bf 49, N4. – С. 540–547.

13. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997

УДК 517.956.27

ПРО ОДНУ ОБЕРНЕНУ УЗАГАЛЬНЕНУ ЕЛІПТИЧНУ ЗАДАЧУ

Г.П. Лопушанська

Lopushanska H.P. On the inverse generalized elliptic boundary value problem. By means of an generalized functions Fourier expansion in the orthonormal system or the elliptic operators fundamental functions one approximate method to determination of the equations right-hand side of the generalized elliptic boundary value problem is suggested.

Використовуючи одержане у [3] зображення розв'язків рівняння $Au = F$ у $D'(\mathbb{R}^n)$, можна розв'язувати деякі обернені узагальнені граничні задачі.

Нехай Ω – область в $\mathbb{R}^n$, обмежена поверхнею S класу C^∞, $\Omega_e = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, $A(x,D)$ – еліптичний диференціальний оператор порядку $2m$ в $\mathbb{R}^n$ з нескінченно диференційовними коефіцієнтами, система граничних диференціальних операторів $\{B_j, T_j\}_{j=1}^m$ на S порядків $m_j, 2m-1-m_j$ відповідно є системою Діріхле порядку $2m$ (коефіцієнти цих операторів вважаємо також нескінченно диференційовними на S). Припускаємо існування нормальної фундаментальної функції $\omega(x,y)$ в $\mathbb{R}^n$.

Нехай $D(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega}), D(S) = C^\infty(S)$, $D'(\overline{\Omega}), D'(S)$ – простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) на $D'(\overline{\Omega}), D'(S)$ відповідно. Через (φ, F) позначаємо дію узагальненої функції $F \in D'(\overline{\Omega})$ на основну функцію $\varphi \in D(\overline{\Omega})$, а також дію $F \in D'(\mathbb{R}^n)$ на $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, через $<\varphi, F>$ – дію $F \in D'(S)$ на $\varphi \in D(S)$, через $\hat{B}_j, \hat{T}_j$ – такі граничні диференціальні оператори, для яких справджується формула Гріна

$$\int_\Omega (Au \cdot v - u \cdot A^* v)dx = \sum_{j=1}^m \int_S (T_j u \cdot \hat{B}_j v - B_j u \cdot \hat{T}_j v)ds, \ u, v \in \mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega}).$$

Нехай $F_{1j}, F_{2j} (j = \overline{1,m})$ – задані узагальнені функції із $D'(S)$. Розглянемо задачу знаходження пари таких узагальнених функцій $u \in D'(\overline{\Omega})$, $F_0 \in D'(\overline{\Omega})$, що

$$Au(x) = F_0, \quad x \in \Omega, \quad B_j u\,|_S = F_{1j}, \quad T_j u\,|_S = F_{2j}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{1}$$

Задача (1) є прикладом оберненої еліптичної граничної задачі. Задачі про відновлення правої частини рівняння при різних додаткових даних вивчались, наприклад, у [1,6,9]. У [9] показано, що існує безліч мір в Ω, для яких потенціали еліптичних операторів поза Ω рівні. Ми покажемо, що додаткові умови на межі області дають можливість однозначно визначити значення Au із деякого простору $D'_*(\overline{\Omega})$, а також доведемо збіжність наближень Au та u у вигляді розвинень Фур'є за певною системою лінійних комбінацій фундаментальних функцій оператора A^*. Питанню наближення у просторах, типу соболевських,

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35R30, 35J99.

гладких розв'язків еліптичних рівнянь та їх граничних значень присвячені праці [7.8,10], а у просторах D' – [4].

Розв'язком задачі (1) назвемо такі $u, F_0 \in D'(\overline{\Omega})$, що $\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \Omega_e \end{cases}$ та $\tilde{F}_0(x)$ задовольняють у $D'(\mathbb{R}^n)$ рівнянню

$$A\tilde{u} = \tilde{F}_0 + \sum_{j=1}^{m} (\hat{T}_j^* F_{1j} - \hat{B}_j^* F_{2j}). \tag{2}$$

У [3] показано, що тоді $F_0, F_{1j}, F_{2j}, j = \overline{1,m}$ задовольняють співвідношенню

$$(\omega(x,y), F_0(y)) + \sum_{j=1}^{m} < \hat{T}_j(y,D)\omega(x,y), F_{1j}(y) > - \tag{3}$$

$$- \sum_{j=1}^{m} < \hat{B}_j(y,D)\omega(x,y), F_{2j}(y) >= 0, \quad x \in \Omega_e.$$

При відомих $F_0, F_{1j}, F_{2j}, j = \overline{1,m}$ функція $\tilde{u}(x)$ визначається формулою

$$\tilde{u}(x) = \omega(x,y) \circledast F, \tag{4}$$

де $F = \tilde{F}_0 + \sum\limits_{j=1}^{m} (\hat{T}_j^* F_{1j} - \hat{B}_j^* F_{2j})$, тобто $(\varphi, \tilde{u}) = ((\varphi(x), \omega(x,y)), F)$.

а $u(x)$ – формулою

$$(\varphi, u) = \left(\int\limits_{\Omega} \varphi(x)\,\omega(x,y)\,dx,\ F_0 \right) + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\ < \hat{T}_j(y,D)\,\omega(x,y),\ F_{1j} > dx - \tag{5}$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\ < \hat{B}_j(y,D)\,\omega(x,y),\ F_{2j} > dx, \quad \varphi \in D(\overline{\Omega}),$$

однозначно у $D'(\overline{\Omega})$. Покажемо, що із (3) можна однозначно знайти невідому узагальнену функцію $F_0 \in D'_*(\overline{\Omega})$, де $D_*(\overline{\Omega}) = \{\psi \in D(\overline{\Omega}) : A^*\psi(x) = 0, x \in \Omega\}$. Розглянемо оператор $(K\varphi)(x) = \int\limits_{\Omega} \omega(x,y)\varphi(y)dy$ з областю визначення $D(\overline{\Omega})$ для $x \in \Omega_e$. Множину значень оператора K позначеємо через $D(\Omega_e)$, $D(\Omega_e) \subset C^\infty(\Omega_e)$. Тоді

$$K^*D' = (K^*D')(\overline{\Omega}) = \{K^*e : e \in D'(\Omega_e)\}.$$

Зокрема, $\int\limits_{\Omega_e} \varphi(x)\omega(x,y)dx \in K^*D'$ для довільної $\varphi \in D(\Omega_e)$, $\int\limits_{S_1} \varphi(x)\left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i \omega(x,y)dS_1 \in K^*D', i = \overline{0, 2m-1}$ для довільної $\varphi \in D(S_1) = C^\infty(S_1)$, де S_1 – довільна замкнена поверхня класу C^∞, розміщена в області Ω_e на додатній відстані від поверхні S. Також $(\omega(x,y), f(x))_0 \in K^*D'$ для довільної $f \in D'(\Omega_e)$.

Якщо $\psi \in D_*(\overline{\Omega})$, то $A^*\psi(x) = f(x)$ у $D'(\mathbb{R}^n)$ при $\operatorname{supp} f \subset \Omega_e$. Тоді, згідно з [3], $\psi(x) = \omega(y,x) \circledast f(y)$ є єдиним розв'язком цього рівняння у класі фінітних узагальнених функцій $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. А для $x \in \overline{\Omega}$ функція $\psi(x) = (\omega(y,x), f(y)) \in D(\overline{\Omega})$ і також належить $\overline{(K^*D')(\overline{\Omega})}$. Отже, $D_*(\overline{\Omega}) \subset \overline{(K^*D')(\overline{\Omega})}$.

Очевидно, що для довільної $f \in D'(\Omega_e)$ при $x \in \overline{\Omega}$

$$A^*(x,D)(\omega(y,x), f(y)) = (A^*(x,D)\omega(y,x), f(y)) = 0.$$

Отже, $D_*(\overline{\Omega}) = \overline{(K^*D')(\overline{\Omega})}$.

Теорема 1. *При довільних* $F_{1j}, F_{2j} \in D'(S)(j = \overline{1,m})$ *співвідношення (3) однозначно визначає* $F_0 \in D'_*(\overline{\Omega})$.

Доведення. Якщо є дві узагальнені функції $F_0^1, F_0^2 \in D'_*(\overline{\Omega})$, які задовольняють (3), то для $F_0 = F_0^1 - F_0^2$ маємо

$$(\omega(x,y), F_0(y)) = 0,\; x \in \Omega_e. \tag{6}$$

Рівність (6) можна ще записати у вигляді $\left(\int\limits_{S_1} \varphi(x)\omega(x,y)dS, F_0(y)\right) = 0, \varphi \in C(S_1), S_1 \subset \Omega_e$, звідки $F_0 = 0$ у $D'_*(\overline{\Omega})$.

Позначаємо далі через S_1 деяку замкнену поверхню класу C^∞, розміщену в області Ω_e на додатній відстані від поверхні S, через $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ – злічену, всюди щільну на S_1, множину точок, а через Ω_1 – область, обмежену поверхнями S та S_1.

Теорема 2. *Система функцій*

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i \omega(x_k, y), \quad i = \overline{0, m-1},\, k = 1,2,\ldots \tag{7}$$

є лінійно незалежною і повною у $D_*(\overline{\Omega}) \subset L_2(\Omega)$.

Доведення. Нехай M – довільне натуральне число,

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{M} C_{ik} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i \omega(x_k, y) = 0,\; y \in \Omega. \tag{8}$$

Функція $v(y) = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \sum\limits_{k=1}^{M} C_{ik} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i \omega(x_k, y)$ є розв'язком рівняння $A^* v(y) = 0$ всередині області Ω_1, який, згідно з припущенням (8), дорівнює нулеві в Ω. З існування нормальної фундаментальної функції $\omega(x,y)$ в $\overline{\Omega}_1$ випливає [5] єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння $A^* v(y) = 0$ в Ω_1, а отже $v(y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}_1$. Але з вигляду $v(y)$ маємо $\lim\limits_{y \to x_{k_0}} v(y) = \infty$. Отже, усі $C_{ik_0} = 0$.

Нехай тепер $\lambda(y) \in D_*(\overline{\Omega})$ і

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i \omega(x_k, y)\lambda(y) dy = 0, \quad i = \overline{0, m-1},\, k = 1,2,\ldots, \tag{9}$$

$v(y) = \int\limits_{\Omega} \lambda(y)\omega(x,y)dy$. Тоді

$$Av(x) = \begin{cases} \lambda(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \overline{\Omega} \end{cases}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i v(x_k) = 0, \quad i = \overline{0, m-1},\, k = 1,2,\ldots.$$

Із щільності множини точок $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ на S_1 випливає, що $\left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i v\,|_S = 0,\, i = \overline{0, m-1}$, а із єдиності розв'язку задачі Коші для A, що $v(x) \equiv 0$ в $\Omega_1 \setminus \overline{\Omega}$ (а тоді також $B_j v\,|_S = T_j v\,|_S = 0,\, j = \overline{1,m}$).

Отже, $\lambda(x)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$\int\limits_{\Omega} \lambda(y)\omega(x,y)dy = 0, x \in \Omega_1 \setminus \overline{\Omega}.$$

Розглянемо оператор $(K\lambda)(x)$ із $D_*(\overline{\Omega})$ у $D(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega})$. Оскільки $\lambda \in \mathrm{Ker}K$, то $\lambda(y)$ є ортогональною до $\overline{K^*D'} = \{\overline{K^*e}, e \in D'(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega})\}$. Тому при $\lambda \in \overline{K^*D'}$ одержуємо $\lambda(y) = 0, y \in \overline{\Omega}$.

Отже, система (7) є повною у підпросторі $\overline{K^*D'}$ простору $L_2(\Omega)$, а отже у $D_*(\overline{\Omega})$.

Перенумеруємо систему функцій (7): $\left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i \omega(x_k, y) = \psi_l(y)$, де $l = (k-1)m + i + 1$, $i = \overline{0, m-1}$, $k = 1, 2, \dots$. Ортонормуємо систему $\{\psi_l(y)\}_{l=1}^{\infty}$. Одержану систему функцій позначаємо через $\{\psi_{(l)}(y)\}_{l=1}^{\infty}$, $\psi_{(l)}(y) = \sum\limits_{j=1}^{l} a_{lj}\psi_j(y), l = 1, 2, \dots$.

Співвідношення (3) однозначно визначає коефіцієнти Фур'є F_{0l} узагальненої функції $F_0 \in D'_*(\overline{\Omega}) : F_{0l} = (\psi_{(l)}(y), F_0(y))$.

Справді, рівняння (6) рівносильне системі

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i \omega(x, y), F_0\right) = 0, \quad x \in S_1,\ i = \overline{0, m-1}. \tag{10}$$

Очевидно, що з (6) випливає (10). Оберенене твердження випливає з єдиності розв'язку задачі Коші для оператора A. Якщо $v(x) = (\omega(x, y), F_0(y))$, $x \in \Omega_e$, то $Av(x) \equiv 0, x \in \Omega_e$, $v(x)$ має порядок $\omega(x, 0)$ при $|x| \to 0$, а з (10) випливає $\left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i v(x)\mid_{x \in S} = 0$, $i = \overline{0, m-1}$. Отже, за єдиністю розв'язку задачі Коші $v(x) \equiv 0$, $x \in \Omega_e$, тобто одержуємо (6).

Покладаючи у (10) $x = x_k$, $k = 0, 1, \dots$, домножуючи на коефіцієнти ортогоналізації та підсумовуючи одержані рівності, матимемо $F_{0l} = (\psi_{(l)}, F_0(y)) = 0$, $l = 1, 2, \dots$.

Нехай $\Gamma(x, y, t, \tau)$ – фундаментальна функція оператора $D_t - A$, $\Gamma(x, y, t) = \Gamma(x, y, t, 0)$, $\gamma \in (0, 1)$,

$$\omega_\gamma(x, y, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int\limits_0^\infty t^{\gamma-1} e^{-\lambda t} \Gamma(x, y, t) dt.$$

Визначимо оператор $(\lambda - A)^{-\gamma}\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\gamma(x, y, \lambda)\varphi(y) dy$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

Для $\gamma \in (1, 2)$ маємо $(\lambda - A)^{-\gamma}\varphi = (\lambda - A)^{-(\gamma-1)}(\lambda - A)^{-1}\varphi$. Можна показати, що $\omega_\gamma(x, y, \lambda)$ має такий же вигляд, як і при $\gamma \in (0, 1)$.

Теорема 3. *Для довільної узагальненої функції $F \in D'(\overline{\Omega})$ існує ціле невід'ємне число k і така функція $f \in L_2(\Omega)$, що*

$$(\varphi, F) = \int\limits_\Omega (\lambda - A)^{k/2m} \varphi(y) f(y)\, dy, \quad \varphi \in D(\overline{\Omega}), \quad (k = 0 \text{ при } F \in L_2(\Omega)) \tag{11}$$

Доведення. На підставі рівності $(\lambda - A)^\gamma \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\gamma(x, y, \lambda)\varphi(y) dy = \varphi(x)$ (ω_γ є фундаментальною функцією оператора $(\lambda - A)^\gamma$), використовуючи оцінки для $\Gamma(x, y, t)$ [2], одержуємо оцінки для похідних $\omega_\gamma(x, y, \lambda)$. Зокрема, при $\gamma = \frac{k}{2m}, 0 < k < 2m$, маємо

$$|D_x^\alpha \omega_{k/2m}(x, y, \lambda)| \leqslant C\Psi_k(|x - y|, \lambda)\lambda^{(n-k+|\alpha|)/2m} \exp^{-c_1 \lambda^{1/2m}|x-y|},$$

де

$$c_1 > 0,\ \Psi_k(z, \lambda) = \begin{cases} 1, & n - k + |\alpha| < 0 \\ 1 + \ln|\lambda^{1/2m} z|, & n - k + |\alpha| = 0\,. \\ (\lambda^{1/2m} z)^{-(n-k+|\alpha|)}, & n - k + |\alpha| > 0 \end{cases}$$

Зауважимо, що застосовуючи лему про ітеровані ядра, можна показати, що така ж оцінка правильна для довільного натурального числа k.

Нехай $\psi(x) = (\lambda - A)^{\frac{k}{2m}}\varphi(x), \varphi \in D(\overline{\Omega})$. Тоді $\psi \in D(\overline{\Omega})$. Справді, для $k = 2mq$ (q– натуральне число) це очевидно, а при $k = 2mq - l, 0 < l < 2m$, $\psi(x) = (\lambda - A)^{-l/2m}(\lambda - A)^q\varphi(x) = \int\limits_{\Omega} \omega_{l/2m}(x,y,\lambda)(\lambda - A)^q\varphi(y)dy$. Із наведених вище оцінок виводимо, що $\psi(x) \in D(\overline{\Omega})$.

Тепер

$$\varphi(x) = \int\limits_{\Omega} \omega_{k/2m}(x,y,\lambda)\psi(y)dy, \qquad |D^\alpha\varphi(x)| \leqslant \int\limits_{\Omega} |D_x^\alpha\omega_{k/2m}(x,y,\lambda)||\psi(y)|dy \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega} |D_x^\alpha\omega_{k/2m}(x,y,\lambda)|^2dy)^{1/2}||\psi(y)||_{L_2(\Omega)} \leqslant C||\psi(y)||_{L_2(\Omega)},$$

якщо $n - k + |\alpha| < \frac{n}{2}$, тобто $k > \frac{n}{2} + |\alpha|$.

Отже, для довільного цілого невід'ємного числа q, довільних $\delta > 0, \varphi \in D(\overline{\Omega})$, існує таке натуральне число k і таке $\tau > 0$, що коли $||(\lambda - A)^{k/2m}\varphi(x)||_{L_2(\Omega)} \leqslant \tau$, то $|D^\alpha\varphi(x)| \leqslant \delta$ для всіх $\alpha, |\alpha| \leqslant q$. Ми бачимо, що досить взяти $k > \frac{n}{2} + q$.

Якщо $F \in D'(\overline{\Omega})$, то F – фінітна узагальнена функція, а тому існує таке ціле невід'ємне число $q = q(F)$, що для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta = \delta(\varepsilon, F) > 0$, що коли $\varphi \in D(\overline{\Omega})$ і $|D^\alpha\varphi(x)| \leqslant \delta$ для всіх $\alpha, |\alpha| \leqslant q$, то $|(\varphi, F)| < \varepsilon$. За доведеним вище, знаходимо таке натуральне число k і таке τ, що при $||\psi(y)||_{L_2(\Omega)} = ||(\lambda - A)^{k/2m}\varphi(y)||_{L_2(\Omega)} \leqslant \tau$ маємо $|D^\alpha\varphi(x)| \leqslant \delta$ для всіх $\alpha, |\alpha| \leqslant q$.

Визначаємо узагальнену функцію $T \in D'(\overline{\Omega}) : (\psi, T) = (\varphi, F)$ для довільної $\psi \in D(\overline{\Omega})$, де $\varphi = (\lambda - A)^{-k/2m}\psi$. Маємо $|(\psi, T)| = |(\varphi, F)| < \varepsilon$, якщо $||\psi||_{L_2(\Omega)} < \tau$. Отже, T – лінійний неперервний функціонал на $L_2(\Omega)$ і за теоремою Фішера-Ріса існує така $f \in L_2(\Omega)$, що $(\psi, T) = \int\limits_{\Omega} \psi f dy$.

Теорема 4. *Розвинення Фур'є* $F_0(y) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} F_{0j}\psi_j(y)$ *узагальненої функції* $F_0 \in D'(\overline{\Omega})$ *за повною ортонормованою у* $L_2(\Omega)$ *системою* $\{\psi_j(y)\}_{j=1}^{\infty}$ *розв'язків із* $D(\overline{\Omega})$ *рівняння* $A^*u(x) = 0, x \in \Omega$, *збіжне у* $L_2(\Omega)$.

Доведення. Нехай $\varphi_j = \int\limits_{\Omega} \varphi\psi_j dx$, $\varphi \in D(\overline{\Omega}) \cup L_2(\Omega)$.

$$F_{0j} = (\psi_j(y), F_0(y)) = \int\limits_{\Omega} (\lambda - A^*)^{k/2m}\,\psi_j(y)\,f(y)\,dy, f \in L_2(\Omega).$$

Для довільної $\varphi \in D(\overline{\Omega})$ функція $(\lambda - A^*)^{-k/2m}\varphi(y) = \int\limits_{\Omega} \omega_{l/2m}(z,y,\lambda)\varphi(z)dz \in L_2(\Omega)$, а функція $\tilde{f}(z) = \lambda^q \int\limits_{\Omega} \omega_{l/2m}(z,y,\lambda)f(y)dy \in C(\overline{\Omega}) \subset L_2(\Omega)$, якщо $n - l < \frac{n}{2}$, тобто $l > \frac{n}{2}$, згідно з оцінками для $\omega_{k/2m}(y,z,\lambda)$.

Нехай q, l – такі цілі невід'ємні числа, що $k = 2mq - l, l > \frac{n}{2}$. Тоді для $\psi \in D_*(\overline{\Omega})$,

$$(\lambda - A^*)^{k/2m}\psi(y) = (\lambda - A^*)^{-l/2m}(\lambda - A^*)^q\psi(y) = \lambda^q(\lambda - A^*)^{-l/2m}\psi(y) \in C(\overline{\Omega}) \subset L_2(\Omega),$$

а

$$F_{0j} = (\psi_j, F_0) = \int\limits_{\Omega} \Big(\lambda^q \int\limits_{\Omega} \omega_{l/2m}(z,y,\lambda)\psi_j(z)dz\Big) f(y)dy = \int\limits_{\Omega} \tilde{f}(z)\psi_j(z)dz = (\psi_j, \tilde{f}).$$

Ми бачимо, що $F_{0j} = \tilde{f}_j$, де $\tilde{f} \in L_2(\Omega)$. Тому розвинення $\sum\limits_{j=1}^{\infty} F_{0j}\psi_j(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \tilde{f}_j\psi_j(x)$ збіжне в $L_2(\Omega)$.

Із теореми випливає збіжність у $L_2(\Omega)$, а отже у $D'_*(\overline{\Omega})$, розвинення F_0 за системою $\{\psi_{(l)}(y)\}_{l=1}^{\infty}$ до деякої $\tilde{f}_0 \in L_2(\Omega)$, яка є проекцією $\tilde{f}$ на $D_*(\overline{\Omega})$. При цьому для довільної $\varphi \in D_*(\overline{\Omega})$ маємо

$$\Big|(\varphi, F_0) - \sum_{l=1}^{N} F_{0l}\varphi_l\Big| = \Big|\int\limits_{\Omega} \varphi(y)\tilde{f}(y)dy - \sum_{l=1}^{N}\int\limits_{\Omega} \psi_{(l)}(y)\tilde{f}(y)dy\varphi_l\Big| =$$

$$= \Big|\int\limits_{\Omega} \tilde{f}(y)[\varphi(y) - \sum_{l=1}^{N}\varphi_l\psi_{(l)}(y)]dy\Big| \leqslant ||\tilde{f}(y)||||\varphi(y) - \sum_{l=1}^{N}\varphi_l\psi_{(l)}(y)||,$$

тобто $(\varphi, F_0) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} F_{0l}\varphi_l$.

Використовуючи зображення довільної узагальненої функції із $D'(\overline{\Omega})$, побудуємо продовження $F_0 \in D'(\overline{\Omega})$ функції $\tilde{f}_0 : (\varphi, F_0) = \int\limits_{\Omega} \tilde{f}_0(y)\lambda^{-p}(\lambda - A^*)^p\varphi(y)dy, \varphi \in D(\overline{\Omega})$, де p – певне ціле невід'ємне число.

Справді, для довільної $F \in D'(\overline{\Omega})$ існує така $f \in L_2(\Omega)$, що

$$(\varphi, F) = \int\limits_{\Omega} (\lambda - A^*)^{-l/2m}(\lambda - A^*)^p\varphi f dy = \int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_{\Omega} \omega_{l/2m}(y,z,\lambda)(\lambda - A^*)^p\varphi(z)\Big) f(y)dy =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \tilde{f}(y)\lambda^{-p}(\lambda - A^*)^p\varphi(y)dy.$$

Взагалі кажучи, таке продовження функції $\tilde{f}_0$ неоднозначне. Якщо ж $F_0 \in D'(\overline{\Omega}) \cap D'_*(\overline{\Omega})$, то $(\varphi, F_0) = \int\limits_{\Omega} \varphi\tilde{f}_0 dy$ для довільної $\varphi \in D_*(\overline{\Omega})$. При $F_0 \in L_2(\Omega)$ маємо $(\varphi, F_0) = \int\limits_{\Omega} \varphi F_0 dy$ також для довільної $\varphi \in D(\overline{\Omega})$. Отже, $F_0 = \tilde{f}_0 \in L_2(\Omega) \subset D'(\overline{\Omega})$.

Теорема 5. *Нехай $F_{1j}, F_{2j} \in D'(S)$. Тоді існує єдиний розв'язок $(u, F_0) \in (D'(\overline{\Omega}), L_2(\Omega))$ задачі (1) і функція $u(x)$ визначається формулою (5),*

$$F_0(x) = \sum_{l=1}^{\infty} F_{0l}\psi_{(l)}(x),\ x \in \Omega, \tag{12}$$

де

$$F_{0l} = \sum_{j=1}^{m} [\ < \hat{B}_j(y,D)\psi_{(l)}(y), F_{2j} > - < \hat{T}_j(y,D)\psi_{(l)}(y), F_{1j} >\ ], l = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Якщо $n < 4m$, то послідовність

$$u^N(x) = \sum_{l=1}^{N} F_{0l} \int_{\Omega} \omega(x,y)\psi_{(l)}(y)dy + \tag{14}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \left[- < \hat{B}_j(y,D)\omega(x,y), F_{2j} > + < \hat{T}_j(y,D)\omega(x,y), F_{1j} > \right]$$

збігається у кожній точці x області Ω до функції $u(x)$.

Доведення. Нехай $(u^1, F_0^1), (u^2, F_0^2)$ – два розв'язки задачі, $u = u^1 - u^2, F_0 = F_0^1 - F_0^2$. Тоді $\tilde{u}, \tilde{F}_0$ задовольняють у $\mathbb{R}^n$ рівнянню $A\tilde{u} = \tilde{F}_0$ та співвідношенню (6). За теоремою 1 $\tilde{F}_0 = 0$ у $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, а тоді за теоремою 1 [3] $\tilde{u} = 0$ у $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, а отже $u = 0$ у $D'(\overline{\Omega})$, $u(x) = 0$ в області Ω.

Замінюючи у (3) x введеною вище системою точок $\{x_k\}, k = 1, 2, \ldots,$ домножуючи одержані тотожності на відповідні коефіцієнти ортогоналізації, знаходимо коефіцієнти Фур'є F_{0l} невідомої узагальненої функції F_0 у вигляді (13). З теореми 4 випливає збіжність у $L_2(\Omega)$ розвинення (12). За теоремою 1 [3] при відомих $F_0 \in D'(\overline{\Omega}), F_{1j}, F_{2j}, j = \overline{1,m}$ узагальнена функція u визначається формулою (5). Оскільки $F_0 \in L_2(\Omega)$, то при $n < 4m$ функція $\int_{\Omega} \omega(x,y)F_0(y)dy \in C(\Omega)$ і $\Big(\int_{\Omega} \varphi(x)\omega(x,y)dx, F_0(y)\Big) = (\varphi(x), \int_{\Omega} \omega(x,y)F_0(y)dy) = \int_{\Omega} \varphi(x)\Big(\int_{\Omega} \omega(x,y)F_0(y)dy\Big)dx$. Крім того,

$$\sum_{l=1}^{N} F_{0l} \int_{\Omega} \omega(x,y)\psi_{(l)}(y)dy \leqslant \sum_{l=1}^{N} F_{0l}^2 \sum_{l=1}^{N} \Big(\int_{\Omega} \omega(x,y)\psi_{(l)}(y)dy\Big)^2 < \infty,$$

оскільки $\omega(x,y) \in L_2(\Omega)$ для кожної точки $x \in \overline{\Omega}$ при $n < 4m$. А тоді $\int_{\Omega} \omega(x,y)F_0(y)dy = \sum_{l=1}^{N} F_{0l} \int_{\Omega} \omega(x,y)\psi_{(l)}(y)dy$.

1. Атоходжаев М.А. *К теории $2m$-потенциалов* // Краевые задачи дифференциальных уравнений. – 1971. – Т. 1. – С. 3–11.

2. Ивасишен С.Д. Матрицы Грина параболических граничных задач.-Киев:Выща школа, 1990. – 200 с.

3. Лопушанська Г.П.*Про один підхід до вивчення крайових задач у просторах розподілів і граничні інтегральні рівняння* // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43, N5. – С. 632–639.

4. Лопушанська Г.П.*Про один наближений метод розв'язування узагальненої задачі Діріхле* // Укр. мат. журн. – 1994. – Т. 46, N10. – С. 1417–1420.

5. Мех И.Я.*О фундаментальных решениях эллиптических операторов* // Докл. АН УССР. – 1991. – N5. – С. 14–18.

6. Прилепко А.И.*Обратные задачи теории потенциала* // Мат. заметки. – 1973. – Т.14, в.5. – С. 755–765.

7. Ройтберг Я.А.,Шефтель З.Г.*О плотности решений граничных задач с локализованными правыми частями в функциональных просторанствах на многообразиях* // Докл. АН СССР. – 1989. – Т. 305, N6. – С. 1317–1320.

8. Ройтберг И.Я.,Ройтберг Я.А.*Об аппроксимации решений эллиптических граничных задач линейными комбинациями фундаментальбных решений*// Докл. АН Украины. – 1992. - N12. – С. 15–20.

9. Шульце Б.В.*О потенциалах для эллиптических уравнений высшего порядка и обратных задачах*// Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, N1. – С. 148–158.

10. Hamann V.,Wildenhain G.*Approximation by solutions of general boundary value problems for ellipticequations of arbitrary order*// Partial diff. equations, Banach center publications. – 1987. – Vol. 19. – P. 113–119.

11. Алексидзе М.А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач.-М.:Наука, 1991. – 351 с.

12. Бакушинский А.Б.*Замечания о методе Купрадзе-Алексидзе*// Дифференц. уравнения. – 1970. – Т. 6, N7. – С. 1298–1301.

Стаття надійшла до редколегії 03.04.1997

УДК 539.3

КОМПЛЕКСНІ ПОТЕНЦІАЛИ ПЕРІОДИЧНОЇ ЗАДАЧІ КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН

В.К. Опанасович

Opanasovych V.K. Complex potentials of colinear cracks periodic problem. An expression for Kolosov-Muskhelishvili complex potentials for the first and the second mathematical elasticity main problems for a plane with periodic system of colinear cracks is obtained by using of limit transition from the solution of elasticity plane problem for a body with a system of cracks. Expressions for stress intencity factors are presented. It is shown that the main stresses in opposite located points at infinity can take various values. The known results are obtained in special cases of the problem.

Формулювання . Дослідимо задачу про пружну рівновагу ізотропної пластинки, яка послаблена періодичною системою колінеарних тріщин, центри яких перебувають на осі Ox і мають координати $dk\,(k \in Z)$. Довжини тріщин дорівнюють $2l$. Пластинка перебуває під дією зовнішніх зусиль N_1 і N_2 на нескінченності, які діють у двох взаємно перпендикулярних напрямках, причому напруження N_1 утворює кут α з віссю Ox. Будемо вважати, що до берегів тріщини прикладені зовнішні зусилля або ж відомі переміщення точок цих берегів. Комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі для сформульованих задач отримаємо шляхом граничного переходу в розв'язках, наведених у монографії [1] для системи колінеарних тріщин, і будемо дотримуватись тих же позначень.

Перша основна задача. Нехай на дійсній осі є $n = 2m+1$ $(m \in N)$ тріщин, береги яких завантажені заданими зусиллями. Тоді згідно з [1] комплексні потенціали $\Phi(z), \Omega(z)$ мають вигляд

$$\Phi(z) = \frac{X^{-1}(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{X(t)P(t)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{q(t)}{t-z}\,dt + \frac{P_n(z)}{X(z)} - \frac{1}{2}\bar{\Gamma}',$$

$$\Omega(z) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{q(t)}{t-z}\,dt + \bar{\Gamma}', \tag{1}$$

де

$$X(z) = \prod_{k=-m}^{m} (z-a_k)^{1/2}(z-b_k)^{1/2}, \qquad a_k = -l + dk, \qquad b_k = l + dk,$$

$$L = \cup_{k=-m}^{m}[a_k, b_k], \qquad \Gamma = \frac{1}{4}(N_1+N_2) + iC, \qquad \Gamma' = -\frac{1}{2}(N_1 - N_2)e^{-2i\alpha},$$

$$P(t) = \frac{1}{2}(Y_y^+ + Y_y^-) - \frac{i}{2}(X_y^+ + X_y^-),\ q(t) = \frac{1}{2}(Y_y^+ - Y_y^-) - \frac{i}{2}(X_y^+ - X_y^-);$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 73B50.

тут знаками "+" і "-" позначено граничне значення функцій при $y \to \pm 0$; Y_y, X_y – компоненти зусиль, прикладених до берегів тріщини; $P_n(z)$ – невідомий многочлен степені n; C – невідома стала, яку у випадку першої основної задачі приймемо рівною нулю; $z = x + iy$ – комплексна змінна; $i = \sqrt{-1}$.

У формулах (1) зробимо граничний перехід, коли $m \to \infty$, враховуючи при цьому залежності [2]

$$\frac{1}{\pi z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{z}{\pi(z-k)k} = \operatorname{ctg} \pi z, \qquad \sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right),$$

і періодичність задачі. Тому

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_L \frac{q(t)}{t-z}\,dt = \int\limits_{-l}^{l} \left[\frac{1}{v-z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{v-dk-z} + \frac{1}{dk}\right)\right] q(v)\,dv =$$

$$= \frac{\pi}{d} \int\limits_{-l}^{l} \operatorname{ctg} \frac{\pi(v-z)}{d} q(v)\,dv, \quad \lim_{m\to\infty} \frac{X(t)}{X(z)} = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=-m}^{m} \sqrt{\frac{(t+l-dk)(t-l-dk)}{(z+l-dk)(z-l-dk)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{t^2-a^2}{z^2-a^2}} \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \sqrt{\frac{\left(1-\left(\frac{t+a}{dk}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{t-a}{dk}\right)^2\right)}{\left(1-\left(\frac{z+a}{dk}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{z-a}{dk}\right)^2\right)}} = \sqrt{\frac{\sin\frac{\pi(t+a)}{d}\sin\frac{\pi(t-a)}{d}}{\sin\frac{\pi(z+a)}{d}\sin\frac{\pi(z-a)}{d}}},$$

де

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + a_{-k}).$$

Введемо позначення

$$Y(z) = \sqrt{\sin\frac{\pi(z+a)}{d}\sin\frac{\pi(z-a)}{d}}.$$

Врахуємо, що $Y(v+dk) = (-1)^k Y(v)$, $v \in [-l, l]$, а також залежність [2]

$$\operatorname{cosec} \pi z = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^2-k^2},$$

внаслідок чого

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{X(z)} \int\limits_L \frac{X(t)P(t)}{t-z}\,dt = \frac{\pi Y^{-1}(z)}{d} \int\limits_{-l}^{l} Y(v)P(v) \operatorname{cosec} \frac{\pi(v-z)}{d}\,dv.$$

На підставі періодичності задачі вираз $P_n(z)/X(z)$ при $n \to \infty$ повинен мати вигляд [3]

$$\lim_{m\to\infty} \frac{P_n(z)}{X(z)} = \frac{A\sin\frac{\pi z}{d} + B\cos\frac{\pi z}{d}}{Y(z)} = Q(z),$$

де A і B – невідомі сталі.

Після цих перетворень комплексні потенціали (1) для періодичної задачі набудуть вигляду

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}' + Q(z) + \frac{1}{2idY(z)}\int_{-l}^{l}\frac{Y(v)P(v)}{\sin\frac{\pi(v-z)}{d}}\,dv + \frac{1}{2id}\int_{-l}^{l} q(v)\mathrm{ctg}\,\frac{\pi(v-z)}{d}\,dv,$$

$$\Omega(z) = \bar{\Gamma}' + \Phi(z) - \frac{1}{id}\int_{-l}^{l} q(t)\mathrm{ctg}\,\frac{\pi(t-z)}{d}\,dt. \tag{3}$$

Сталу B знайдемо з умови однозначності переміщень [1]

$$\int_{-l}^{l}\left[\kappa\left(\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)\right)+\Omega^{+}(t)-\Omega^{-}(t)\right]\,dt = 0,$$

звідки, беручи до уваги (3), отримаємо

$$B = \frac{\kappa-1}{2id(\kappa+1)}\int_{-l}^{l} q(x)\,dx. \tag{4}$$

Сталу A знайдемо, врахувавши для тіла умови на нескінченності.

На підставі [4, 5] коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) знайдемо за формулами

$$K_1^{\pm} - iK_2^{\pm} = \lim_{x\to\pm a\pm 0}\sqrt{2|x\mp a|}(\Phi(x)+\Omega(x)).$$

Якщо взяти до уваги залежності (3), то попереднє співвідношення набуде вигляду

$$K_1^{\pm} - iK_2^{\pm} = 2A\sqrt{\frac{d}{\pi}\mathrm{tg}\,\frac{\pi l}{d}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi d}{2}\sin\frac{2\pi l}{d}}}\left\{\pm\frac{2d^2}{\pi}B\,\cos\frac{\pi l}{d} + \int_{-l}^{l}\sqrt{\frac{\sin\frac{\pi(l\pm v)}{d}}{\sin\frac{\pi(l\mp v)}{d}}}P(v)\,dv\right\}. \tag{5}$$

Розглянемо часткові випадки.

а) Береги тріщин вільні від зовнішнього навантаження, а тому $q(v) = p(v) = 0$, $B = 0$, $A = \Gamma + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}'$ і комплексні потенціали (3) можна подати у вигляді

$$\tilde{\Phi}(z) = -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}' + \frac{A\sin\frac{\pi z}{d}}{Y(z)}, \qquad \tilde{\Omega}(z) = \bar{\Gamma}' + \tilde{\Phi}(z). \tag{6}$$

Зауважимо, що в цьому випадку вирази для комплексних потенціалів (6) і КІН (5) збігаються з відповідними залежностями з праці [3] і монографій [4, 5].

б) Зусилля $N_1 = N_2 = 0$. Покладемо $A = 0$. Комплексні потенціали (3) набудуть вигляду

$$\Phi(z) = \frac{1}{Y(z)}\left[B\cos\frac{\pi z}{d} + \frac{1}{2id}\int_{-l}^{l}\frac{Y(v)P(v)}{\sin\frac{\pi(v-z)}{d}}\,dv\right] + \frac{1}{2id}\int_{-l}^{l} q(v)\mathrm{ctg}\,\frac{\pi(v-z)}{d}\,dv,$$

$$\Omega(z) = \Phi(z) - \frac{1}{id}\int_{-l}^{l} q(t)\mathrm{ctg}\,\frac{\pi(t-z)}{d}\,dt. \tag{7}$$

КІН (5) у цьому випадку збігаються з відповідними КІН з монографії [5].

Якщо врахувати, що

$$\lim_{y\to\pm\infty}\mathrm{ctg}\frac{\pi}{d}(v - iy) = \pm i, \tag{8}$$

то на підставі (7) будемо мати

$$\lim_{y\to\pm\infty}\Phi(iy) = \pm\frac{1}{d(\kappa+1)}\int_{-l}^{l} q(v)\,dv, \quad \lim_{y\to\pm\infty}\Omega(iy) = \mp\frac{\kappa}{d(\kappa+1)}\int_{-l}^{l} q(v)\,dv. \tag{9}$$

Згідно з [1] компоненти тензора напружень Y_y і X_y можемо знайти за формулами

$$Y_y - iX_y = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}. \tag{10}$$

Тому, приймаючи до уваги (9), матимемо

$$Y_y^{\pm\infty} = \lim_{y\to\pm\infty} Y_y = \pm\frac{1}{2d}\int_{-l}^{l}(Y_y^+ - Y_y^-)\,dx, \quad X_y^{\pm\infty} = \lim_{y\to\pm\infty} X_y = \pm\frac{1}{2d}\int_{-l}^{l}(X_y^+ - X_y^-)\,dx. \tag{11}$$

Як видно з (11), напруження на нескінченності є сталими і мають протилежні знаки при $y \to \pm\infty$, що узгоджується з умовами рівноваги тіла. Крім того, на підставі формул (11) бачимо, як можна практично реалізувати задачу для випадку, коли до берегів тріщини прикладено не самозрівноважене навантаження.

Нехай до берегів тріщини прикладено самозрівноважене навантаження

$$Y_y^+ - iX_y^+ = Y_y^- - iX_y^- = \mathrm{const} = -(2\Gamma + \bar{\Gamma}'),$$

де вирази для Γ і Γ' даються формулами (2). У цьому випадку $q(x) = 0$, $P(x) = -(2\Gamma + \bar{\Gamma}')$, $B = 0$, і комплексні потенціали (7) набудуть вигляду

$$\Phi(z) = \Omega(z) = -\frac{(2\Gamma + \bar{\Gamma}')}{2idY(z)}\int_{-l}^{l}\frac{Y(v)}{\sin\frac{\pi(v-z)}{d}}\,dv.$$

Але даний напружений стан можемо подати як суперпозицію двох напружених станів, що обумовлені потенціалами (6) і $\Phi(z) = -\Gamma$, $\quad \Omega(z) = -\Gamma - \bar{\Gamma}'$. Тому справджується рівність

$$-\frac{2\Gamma + \bar{\Gamma}'}{2idY(z)} \int\limits_{-l}^{l} \frac{Y(v)}{\sin\frac{\pi(v-z)}{d}}\, dv = -\Gamma + \tilde{\Phi}(z) = -(\Gamma + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}') + \frac{(\Gamma + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}')\sin\frac{\pi z}{d}}{Y(z)},$$

звідки отримуємо

$$\frac{1}{id} \int\limits_{-l}^{l} \frac{Y(v)}{\sin\frac{\pi(v-z)}{d}}\, dv = \sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{d} - \sin^2\frac{\pi l}{d}} - \sin\frac{\pi z}{d},$$

що є узагальненням відповідної формули для однієї тріщини на випадок періодичної системи цих дефектів.

в) Зусилля $N_1 = N_2 = 0$. Крім того, будемо вважати, що

$$\lim_{y\to+\infty}(Y_y - iX_y) = Q \tag{12}$$

де Q - відома комплексна стала. Комплексний потенціал $\Phi(z)$ у цьому випадку матиме вигляд

$$\Phi(z) = Q(z) + \frac{1}{2idY(z)} \int\limits_{-l}^{l} \frac{Y(v)P(v)}{\sin\frac{\pi(v-z)}{d}}\, dv + \frac{1}{2id} \int\limits_{-l}^{l} \frac{q(v)\operatorname{ctg}\pi(v-z)}{d}\, dv, \tag{13}$$

а вираз для $\Omega(z)$ залишається без змін і дається формулою (7).

Беручи до уваги (7), (10), (13), на підставі (12) отримаємо таке значення невідомої сталої A

$$A = \frac{1}{2}Q - \frac{1}{d}\int\limits_{-l}^{l} q(v)\, dv. \tag{14}$$

Вираз для сталої B дається формулою (4).

Враховуючи (13), (14), (4) і виходячи з (10), знайдемо

$$\lim_{y\to-\infty}(Y_y - iX_y) = Q - \frac{2}{d}\int\limits_{-l}^{l} q(v)\, dv.$$

Якщо величину Q покласти рівною нулю, тобто одна безмежна границя вільна від зовнішнього навантаження, то протилежною границею сприймається все навантаження, яке прикладене до тіла.

Друга основна задача. Для випадку системи n тріщин, що перебувають на дійсній осі, комплексні потенціали другої основної задачі, згідно з [1], мають вигляд

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\kappa}\left[\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{g(t)}{t-z}\, dt + \frac{1}{\pi i X(z)}\int\limits_{L}\frac{X(t)f(t)}{t-z}\, dt + +\kappa\Gamma + \overline{\Gamma} + \overline{\Gamma}'\right] + \frac{P_n(z)}{\kappa X(z)}, \tag{15}$$

$$\Omega(z) = -\kappa\Phi(z) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{X(t)f(t)}{t-z}\, dt + \kappa\Gamma + \overline{\Gamma} + \overline{\Gamma}',$$

де

$$f(t) = \mu \left[u^{+\prime} + u^{-\prime} + i(v^{+\prime} + v^{-\prime}) \right], \quad g(t) = \mu \left[u^{+\prime} - u^{-\prime} + i(v^{+\prime} - v^{-\prime}) \right],$$

u і v – компоненти вектора перміщення; μ – модуль зсуву; $\kappa = 3 - 4\nu$ у випадку плоскої деформації і $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ у випадку плоского напруженого стану; ν – коефіцієнт Пуассона. Тут і надалі будемо дотримуватись позначень попереднього пункту.

Якщо проробити викладки, подібні як і в першій основній задачі, то на підставі (15) для періодичної задачі отримаємо

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\kappa} \left[\kappa\Gamma + \overline{\Gamma} + \overline{\Gamma}' + \frac{1}{id} \int_{-l}^{l} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t - z)}{d} \, dt + + \frac{1}{idY(z)} \int_{-l}^{l} \frac{Y(t) f(t)}{\sin \frac{\pi(t-z)}{d}} \, dt \right] + \frac{Q(z)}{\kappa},$$

$$\Omega(z) = \kappa\Phi(z) - 2Q(z) - \frac{\pi}{idY(z)} \int_{-l}^{l} \frac{Y(t) f(t) dt}{\sin \frac{\pi(t-z)}{d}}. \tag{16}$$

Сталу C, що входить у вираз для Γ (2), знайдемо із залежності

$$M = -\operatorname{Re} \int_{-l}^{l} x \left\{ (\kappa + 1) \left[\Phi^+(x) - \Phi^-(x) \right] - 2g(x) \right\} \, dx,$$

яка для випадку жорсткого включення набуде вигляду

$$M = \frac{2(1+\kappa)d^2}{\pi\kappa} \left[(\kappa + 1)C + \frac{1}{2}(N_1 - N_2) \sin 2\alpha \right] \ln \left(\cos \frac{\pi l}{d} \right). \tag{17}$$

Тут M – момент сил, прикладених до берегів тріщини відносно її центру.

Вважаємо, що відомий головний вектор сил, прикладених до берегів тріщини. Тоді його проекції X і Y на осі Ox і Oy визначимо за формулою

$$\int_{-l}^{l} \left[\Phi^+(x) - \Phi^-(x) + \Omega^+(x) - \Omega^-(x) \right] \, dx = Y - iX,$$

використовуючи яку і формулу (16), отримаємо такий вираз для сталої B

$$B = \frac{i\kappa(Y - iX)}{2d(1 + \kappa)}. \tag{18}$$

Як і в попередньому пункті сталу A знайдемо, скориставшись умовами на нескінченності.

Розподіл напружень поблизу вершини тріщини у випадку другої основної задачі наведений у монографії [6], а КІН знайдемо за формулою

$$K_1^{\pm} - iK_2^{\pm} = \lim_{x \to \pm a \pm 0} \left[\frac{2\kappa}{(\kappa - 1)} \sqrt{2\pi |x \mp a|} (\Phi(x) + \Omega(x)) \right],$$

яку, після перетворень можемо записати так

$$K_1^{\pm} - iK_2^{\pm} = 2\sqrt{\pi}\left\{A\sqrt{\frac{d}{\pi}\mathrm{tg}\frac{\pi l}{d}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi d\sin\frac{2\pi l}{d}}}\left\{\pm\frac{2d^2}{\pi}B\cos\frac{\pi l}{d} + \int\limits_{-l}^{l}\sqrt{\frac{\sin\frac{\pi(l\pm v)}{d}}{\sin\frac{\pi(l\mp v)}{d}}}f(v)dv\right\}\right\}. \tag{19}$$

Як частковий випадок, з (19) можна отримати вирази для КІН, які наведені в монографії [6].

Розглянемо часкові випадки абсолютно жорсткого включення, для якого $u^+ = u^- = v^+ = v^- = 0$, а тому $f(t) = g(t) = 0$.

1) Головний вектор сил, прикладених до включення, і момент M дорівнюють нулю. У цьому випадку $A = 0.5(\kappa\Gamma - \overline{\Gamma}' - \overline{\Gamma})$, $B = 0$, а стала C (17) набуде вигляду

$$C = -\frac{\sin 2\alpha}{2(1+\kappa)}(N_1 - N_2).$$

2) Зусилля $N_1 = N_2 = 0$. а) Покладемо $A = 0$. Комплексні потенціали можемо подати так

$$\Phi(z) = \frac{1(\kappa-1)}{2\kappa}C + \frac{B\cos\frac{\pi z}{d}}{\kappa Y(z)}, \quad \Omega(z) = \kappa\Phi(z) - \frac{2B\cos\frac{\pi z}{d}}{Y(z)}.$$

На підставі (17) стала C набуде вигляду

$$C = \frac{M\pi\kappa}{2(1+\kappa)^2 d^2 \ln\left(\cos\frac{\pi l}{d}\right)}. \tag{20}$$

Сталу B знайдемо, користуючись формулою (18).

Для даного випадку напруження на нескінченності будуть відмінні від нуля, причому при $y \to \pm\infty$ будуть мати різні знаки, тобто маємо ту ж саму ситуацію як і в випадку першої основної задачі.

а) Нехай $A \neq 0$. Комплексні потенціали (17) матимуть вигляд

$$\Phi(z) = \frac{i(\kappa-1)C}{2\kappa} + \frac{Q(z)}{\kappa}, \quad \Omega(z) = \kappa\Phi(z) - 2Q(z).$$

Якщо задовольнити умову (12), то для сталої A можна записати такий вираз

$$A = \frac{\kappa}{1-\kappa}Q + i(1+\kappa)\left(\frac{1}{2}C + \frac{B}{\kappa-1}\right).$$

Сталі C і B знайдемо відповідно за формулами (20) і (18). Напруження на нескінченності в цьому випадку також відмінні від нуля. Вирази для КІН для розглянутих випадків отримаємо на підставі формули (19).

Висновки.

1. На відміну від задачі для тіла зі скінченною системою неоднорідностей при формулюванні періодичних задач з тими ж дефектами слід наголосити, що головні напруження на нескінченності можуть мати різні значення в протилежних нескінченно віддалених точках тіла.

2. Наведені в праці вирази для кусково-голоморфних функцій є розв'язками відповідних періодичних задач лінійного спряження, розв'язки яких будуються іншими підходами, ніж в публікаціях [7, 8].

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости – М., Наука, 1966. – 707 с.
2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов, и произведений – М., Наука, 1971. – 1100 с.
3. Баренблатт Р.И., Черепанов Г.П. *О влиянии границ тела на развитие трещин хрупкого разрушения* // Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение. 1960. – N 3. – С.79-88.
4. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами – Киев, Наук. думка, 1981. – 324 с.
5. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках – Киев, Наук. думка, 1976. – 444 с.
6. Стащук Н.Г. Задачи механики упругих тел с трещино-подобными дефектами – Киев, Наук. думка, 1993. – 358 с.
7. Чибрикова Л.И. *О краевой задаче Римана для автоморфных функций* // Уч. зап. Казанского ун-та. – 1956. – 116, кн. 4. – С.59-110.
8. Кузнецов Е.А. *Периодическая контактная задача с учетом пригрузки, действующей вне штампа* // Изв. АН СССР, МТТ. 1982. – N 1. – С.84-93.

Стаття надійшла до редколегії 29.06.96

УДК 315.6

Стахив Л.Л. О приведенной группе Уайтхеда для тел над псевдолокальными полями // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.5–9.

Пусть D конечномерное тело над полным дискретно нормированным полем с псевдоконечным полем вычетов. Доказано, что приведенная группа Уайтхеда $SK_1(D)$ тривиальна.

Библиогр. 5 назв.

УДК 512.552.12

Гаталевич А.И. Минимальные вполне простые идеалы дуо-колец Безу // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.10–15.

Все рассматриваемые кольца являются дуо-кольцами с единицей: каждый правый идеал является левым идеалом и наоборот. Изучается минимальный вполне простой спектр кольца R, с целью получения информации о $Q_{Cl}(R)$, классическом кольце частных R. Доказано, что кольцо Безу с конечным числом минимальных вполне простых идеалов является кольцом элементарных делителей тогда и только тогда, когда для произвольного вполне простого идеала P фактор кольцо $R/P(R)$ является кольцом элементарных делителей.

Библиогр. 12 назв.

УДК 512.552.12

Забавский Б.В., Романив О.Н. Некоммутативные кольца с элементарной редукцией матриц // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.16–20.

Под кольцом с элементарной редукцией матриц понимаем кольцо, над которым произвольная матрица приводится к каноническому диагональному виду элементарными преобразованиями. Доказано, что правая евклидовая область Безу является кольцом с элементарной редукцией матриц.

Библиогр. 5 назв.

УДК 512.552.12

Комарницкий Н.Я. Кольца с почти инвариантными элементарными делителями // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.21–29.

Рассмативаются ассоциативные кольца с единицей. Вводится понятие кольца с почти инвариантными элементарными делителями. Доказан критерий принадлежности кольца к классу таких колец. Найдены кольцевые условия того, чтобы простая область Безу была областью с элементарными делителями.

Библиогр. 9 назв.

УДК 512.552.12

Романив О.М. Кольца с элементарной редукцией матриц и квазиэвклидовые кольца // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.30–38.

Найдены необходимые и достаточные условия, при которых квазиевклидовое кольцо является кольцом с элементарной редукцией матриц. Доказано, что полулокальное кольцо Безу является кольцом с элементарной редукцией матриц. Приведен критерий существования решений матричного уравнения специального вида и найдены все его решения.

Библиогр. 11 назв.

УДК 512.544+519.46

Ищук Ю.Б. О полулокальных кольцах с разрешимой присоединённой группой // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.39–41.

Характеризуются полулокальные кольца с энгелевой унипотентной подгруппой и присоединёнными группами, удовлетворяющими некоторым условиям разрешимости. Установлено эквивалентность ряда условий разрешимости присоединённой группы правых артиновых колец.

Библиогр. 6 назв.

УДК 512.64

Зелиско В.Р., Сенькусь Л.Р. Об инволюциях в кольцах матриц // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.42–45.

Доказано существование некоторых типов инволюций в кольцах матриц. Исследуется вопрос о симметричности и факторизуемости прямого произведения симметрических матриц при этих инволюциях.

Библиогр. 4 назв.

УДК 512.64

Кучма М.И. О факторизациях симметрических матричных двучленов // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.46–50.

В работе найдены необходимые и достаточные условия существования факторизации симметрических матричных двучленов над кольцом многочленов с инволюцией.

Библиогр. 4 назв.

УДК 512.58+515.12

Левицкая В.С. О поднятии контравариантных функторов на категорию Эйленберга-Мура // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.51–53.

Рассматривается проблема поднятия контравариантных функторов на категорию Эйленберга-Мура монады. Результаты применены к монаде на категории тихоновских пространств, порожденной второй итерацией функтора C_p (пространств функций в топологии поточечной сходимости).

Библиогр. 5 назв.

УДК 515.544

Тураш О.В. О группах с нильпотентными фактор-группами по бесконечных нормальных подгруппах // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.54–56.

Описаны черниковские группы, все фактор-группы которых за бесконечными нормальными подгруппами есть нильпотентные группы класса нильпотентности $\leqslant c$.

Библиогр. 6 назв.

УДК 512.544

Артемович О.Д. О наследственных радикалах локально нильпотентных групп без кручения // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.57–60.

Исследуются наследственные радикалы локально нильпотентных групп без кручения. Доказано, что гиперабелева локально нильпотентная группа без кручения имеет только тривиальные наследственные радикалы (в понимании Куроша). Всякая группа Бэра (соответственно Фиттинга) без кручения имеет только тривиальные наследственные радикалы (в понимании Плоткина). Кроме этого, радикал Бэра (соответственно Фиттинга) изолирован в локально нильпотентной группе без кручения.

Библиогр. 8 назв.

УДК 515.12+512.58

Телейко А.Б. О проективных функторах в категории компактов // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.61–64.

В классе нормальных функторов конечной степени охарактеризовано проективные функторы как единственные конструкции, допускающие функториальные продолжения полугрупповых операций.

Библиогр. 7 назв.

УДК 517.537.72

Мулява О.М., Притула Я.Я. Оценки максимума модуля целого ряда Дирихле // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.65–70.

Пусть $S(\Lambda)$ — класс целых рядов Дирихле $F(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n)$, $s = \sigma + it$, где $\Lambda = (\lambda_n) > 0 \uparrow +\infty$. Для $F \in S(\Lambda)$ пусть $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, а $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ — максимальный член.

Через Ω обозначим класс положительных неограниченых на $(-\infty, +\infty)$ функций Φ таких, что производная Φ' непрерывна, положительна и возрастающая к $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ функция. Для $\Phi \in \Omega$ через $S(\Lambda, \Phi)$ обозначим подкласс целых рядов Дирихле таких, что $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

В классе $S(\Lambda, \Phi)$ указано необходимое и достаточное условие на Λ для справедливости соотношения $M(\sigma, F) \leqslant \mu\Big(\dfrac{\sigma}{1-\beta}, F\Big)^{1-\beta}$, $\beta \in (0,1)$ для всех $\sigma \geqslant \sigma_0$.

Библиогр. 7 назв.

УДК 517.576

Скаскив О. Б., Боднар Р. Д. Скорость сходимости рядов Дирихле // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.71–74.

В классе абсолютно сходящихся в полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ рядов Дирихле

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \ \ a_0 = 1, \ \ a_n \geqslant 0 \ \ (n \geqslant 1),$$

найдены условия, необходимые для выполнения соотношения $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{h(n)} \ln \dfrac{1}{\sigma_n(F)} = +\infty$, где $h(x) \uparrow +\infty$ $(x \to -0)$ – некоторая функция,

$$\sigma_n = \sup\left\{\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k e^{x\lambda_k}} - \frac{1}{F(z)} : x < 0\right\}.$$

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.53

Скаскив О.Б., Трусевич О.М. Максимальный член и сумма регулярно сходящегося функционального ряда // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.75–79.

Для регулярно сходящегося функционального ряда

$$F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \varphi_n(z)$$

за G_α–правильной последовательностью $(\varphi_n(z))$ получены условия, которые являются достаточными для справедливости при $\alpha \to +\infty$ вне некоторого исключительного множества асимптотического равенства

$$M(\alpha) \sim \mu(\alpha),$$

где $M_F(\alpha) = \sup\{|F(z)| : z \in G_\alpha\}$, $\mu_F(\alpha) = \max\limits_n \sup\{|a_n||\varphi_n(z)| : z \in G_\alpha\}$.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.537.2

Федыняк С.И., Шеремета М.Н. Оценки производных рядов Дирихле // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.80–82.

Пусть $\lambda = (\lambda_n)$ - последовательность неотрицательных чисел. Для целого (абсолютно сходящегося в $\mathbb{C}$) ряда Дирихле $F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$ положим $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ и $S_1(\sigma, F) = M(\sigma, F')/M(\sigma, F)$, $\sigma < A$. Через L обозначим класс неотрицательных непрерывно дифференцированых возростающих к $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функций β таких, что $x^2\beta'(x) \geqslant 1$ при $x \geqslant x_0$. Для $\beta \in L$ и положительной последовательности $\gamma = (\gamma_n)$ через $A_1(\beta, \lambda, \gamma)$ обозначим класс комплексных последовательностей $a = (a_n)$ таких, что $|a_n| \leqslant \gamma_n \exp\{-\lambda_n \beta(\lambda_n)\}$ при $n \geqslant n_0$. Пусть, наконец, B — функция, обратная к β, а $\Pi(\infty, B)$ — класс целых рядов Дирихле, для которых $S_1(\sigma, F) \leqslant (1 + o(1))B(\sigma)$ при $\sigma \to +\infty$.

Доказано, что для того, чтобы $F \in \Pi(\infty, B)$ для любых $\beta \in L$ и $a \in A_1(\beta, \lambda, \gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$.

Аналогичный результат получен для рядов Дирихле с нулевой абсциссой абсолютной сходимости.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.956

Бабьяк Л.С. Решение одной задачи эволюционального уравнения с параметрами в банаховом пространстве // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.83–88.

Рассматривается задача

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + a_0 + a_1 \cos t + a_2 \sin t, \qquad t \in [0, \infty),$$

$$y(t_1) = y_1, t(t_2) = y_2, \qquad 0 < t_1 < t_2 < \infty,$$

$$(c, 1) \lim_{t \to \infty} y(t) = y_n$$

(чезаровский предел), где линейный оператор является генератором ограниченной полугруппы класса C_0, a_0, a_1, a_2 — неизвестные параметры. Описывается решение такого уравнения.

Библиогр. 6 назв.

УДК 517.95

Олискевич М.А. Устойчивость по Ляпунову гиперболической системы с нелокальными краевыми условиями // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.89–98.

В работе рассматривается смешаная задача для гиперболической системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка с нелокальными краевими условиями. Доказана теорема об устойчивости по Ляпунову стационарного обобщенного решения поставленой задачи.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.95

Чернецкий В.З. Максимальная гладкость решений смешанной задачи для линейных эллиптических уравнений второго порядка в окрестности угловой граничной точки // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.99–103.

Исследовано поведение в соболевских весовых пространствах и в пространствах Гёльдера решений смешанной задачи для линейных недивергентных эллиптических уравнений второго порядка в окрестности угловой граничной точки.

Библиогр. 6 назв.

УДК 517.95

Доманская Г.П. Задача Фурье для одной псевдопараболической системы // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.104–112.

Рассматривается задача Фурье для одной псевдопараболической системы в неограниченной по пространственным переменным области. Получены условия существования и единственности обобщённого решения этой задачи.

Библиогр. 6 назв.

УДК 517.95

Бугрий О.Н. Некоторые параболические вариационные неравенства без начальных условий // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.113–120.

В работе рассмотрены некоторые нелинейные параболические вариационные неравенства без начальных условий в неограниченной по времени цилиндрической области. Получены условия существования и единственности решения этих неравенств.

Библиогр. 13 назв.

УДК 517.956.27

Лопушанская Г.П. Об одной обратной обобщенной эллиптической задаче // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.122–129.

На основании разложения Фурье обобщенной функции по ортонормированной системе фундаментальных функций эллиптического оператора предлагается приближенный метод определения правой части уравнения обобщенной эллиптической граничной задачи.

Библиогр. 12 назв.

УДК 539.3

Опанасович В.К. Комплексные потенциалы периодической задачи колинеарных трещин // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.49.— С.130–137.

Путем граничного перехода в решении плоской задачи теории упругости для тела с системой трещин получено выражение для комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили для первой и второй основных задач математической теории упругости для пластинки с периодической системой колинеарных трещин. Записаны выражения для коэффициентов интенсивности напряжений. Показано, что главные напряжения в противоположных бесконечно удалённых точках тела могут иметь разные значения. В частичных случаях задачи получены известные результаты.

Библиогр. 8 назв.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити нові результати автора з повним їх доведенням. Не рекомендується робити великі огляди вже опублікованих результатів. Посилання на неопубліковані роботи не допускаються.

2. Текст статті повинен бути підготовлений на комп'ютері українською або англійською мовами. До редакції подається:

– два екземпляри статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;

– анотації англійською та російською мовами, які повинні містити прізвище автора та назву статті;

– електронний варіант статті та анотацій на дискеті 3,5", яка буде повернена автору (тексти можна надіслати за адресою *holovaty@yahoo.com*)

– довідка про автора (співавторів), в якій треба вказати ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, домашню адресу, телефон та електронну адресу.

Обсяг статті не повинен перевищувати 12 сторінок при розмірі шрифтів 12pt. На першій сторінці вказується номер УДК.

3. Вимоги до набору:

– текст статті створюється в одній з версій TEX'у (формати Plain-TEX, AMS-TEX чи LATEX). Рекомендуємо використовувати стильовий файл amsppt.sty; тексти, набрані в редакторах ChiWriter та Word не приймаються;

– номери формул ставляться з правого боку; нумерувати треба лише формули, на які є посилання;

– в посиланнях на теорему з монографії вказуєть сторінка, на якій вона знаходиться.

4. Рисунки до статті подаються у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунку чи його номер не входять у зображення і створюються засобами TEX'у. Реальний розмір графічного зображення вибирається з міркувань, що воно буде друкуватися на принтері з розділювальною здатністю 600 dpi.

5. Література подається загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті. Подаємо зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів і т. п.):

1. Грабович А.І. Назва. – К.: Наукова думка. 1985. – 306 с. *або*
   Грабович А.І. Назва: В 2-х т.– К.: Наукова думка, 1985.–Т.1.–306 с.
2. Кравчук О.М. *Назва*: // Мат. сб.–1985.–2, №2 2.–С.4–20.
3. Михайленко Г.Д. Назва.– М., 1993.– 9 с.– (Препринт/НАН Украіни. ІППММ; N80.1).
4. Коваленко О. В. Назва: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – К., 1977, – 30 с.
5. Сенів С.М. *Назва.*–К., 1992.– 17 с. – Деп. в ДНТБ Украіни, №2020-1995.
6. Муравський В.К. *Назва* // Нелінійні диференціальні рівняння: Тези доповідей. (Київ, 27 сер.–2 вер. 1994 р.).– Київ, 1994.–С. 540–551.