МАТЕМАТИКА

УДК 517.944:947

МАРІЯ Д. МАРТИНЕНКО, МИХАЙЛО Д. МАРТИНЕНКО

ПРО ТРИВИМІРНІ ГАРМОНІЧНІ ФУНКЦІЇ В ОБЛАСТЯХ З «ЩІЛИНАМИ»

Стаття присвячена доведенню того, що при деяких припущеннях відносно гармонічної функції вона може бути зображена у просторі з розрізом вздовж незамкненої поверхні типу Ляпунова, обмеженої гладкою кривою, у вигляді потенціалу простого або подвійного шару. Одержаний результат обгрунтовує законність застосування рядом авторів потенціалу простого шару (або подвійного шару) для ефективного знаходження розв'язку ряду задач математичної фізики.

Позначимо через E_3 — тривимірний простір, через S — незамкнену поверхню Ляпунова, обмежену гладкою кривою Γ, через $E_3 \setminus S$ — простір зовні S (іншими словами, простір з розрізом вздовж S).

Теорема 1. *Нехай $u(M)$ та $v(M)$ — двічі неперервно диференційовні функції у $E_3 \setminus S$, регулярні на нескінченності, неперервно диференційовні аж до поверхні S, за винятком лінії Γ, в околі якої їх перші похідні зростають не швидше, ніж $\frac{C}{R_0^{\alpha}(M)}$, де $R_0(M)$ — віддаль до Γ, $C=\mathrm{const}$. $0 \leqslant \alpha < 1$. Тоді справедливі такі формули:*

$$\iiint\limits_{\infty} \{v\Delta u + (\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} v)\}\, d\tau = -\iint\limits_{S} v_+ \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_+ dS + \iint\limits_{S} v_- \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_- dS,$$

$$\iiint\limits_{\infty} \{v\Delta u - u\Delta v\}\, d\tau = -\iint\limits_{S} \left\{v_+ \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_+ - u_+ \left[\frac{\partial v}{\partial n}\right]_+\right\} dS +$$

$$+\iint\limits_{S} \left\{v_- \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_- - u_- \left[\frac{\partial v}{\partial n}\right]_-\right\} dS, \qquad (1)$$

де n — певний напрям нормалі до S; u_+, $\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_+$, u_-, $\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_-$ — граничні значення u та $\frac{\partial u}{\partial u}$ при наближенні до поверхні S в напрямі $\vec{n}$ та $-\vec{n}$ відповідно («зверху» та «знизу»).

Для доведення теореми побудуємо навколо Γ трубчасту поверхню як обгортку множини сфер радіуса ε, центри яких лежать на кривій Γ. Оточимо тепер поверхню S замкненою кусково-гладкою поверхнею S_ε, яка складається з двох поверхонь, «паралельних» поверхні S і розміщених по різні сторони від S на віддалі ε, та із з'єднуючої їх частини

T_ε трубчастої поверхні. Позначимо через D_ε необмежену область, границею якої є поверхня S_ε. Для довільних функцій $u(M)$ та $v(M)$, неперервно диференційовних у D_ε аж до границі та двічі неперервно диференційовних всередині області D_ε, мають місце такі формули:

$$\iiint\limits_{D_\varepsilon} \{v\Delta u + (\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} v)\}\, d\tau = -\iint\limits_{S_\varepsilon} v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS;$$
$$\iiint\limits_{D_\varepsilon} \{v\Delta u - u\Delta v\}\, d\tau = -\iint\limits_{S_\varepsilon} \left\{v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}\right\} dS, \tag{2}$$

де ν позначає орт внутрішньої нормалі до S_ε.

Перейдемо в формулах (2) до границі при $\varepsilon \to 0$. Очевидно, що границя правих частин буде існувати, якщо інтеграли по трубчастій поверхні T_ε

$$\iint\limits_{T_\varepsilon} u \frac{\partial v}{\partial \nu}\, dS, \qquad \iint\limits_{T_\varepsilon} v \frac{\partial u}{d \nu}\, dS \tag{3}$$

будуть прямувати до нуля, коли $\varepsilon \to 0$. Введемо на поверхні T_ε змінні φ та l (φ — кут, що зростає від нуля до 2π, а l — довжина дуги лінії Γ, що відлічується від деякої фіксованої точки в певному напрямі). Тоді елемент площі поверхні трубки T_ε буде дорівнювати $\varepsilon dl d\varphi$ й інтеграли (3) матимуть вигляд

$$\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{L} u \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}\, \varepsilon\, dl\, d\varphi, \qquad \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{L} v \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\, \varepsilon\, dl\, d\varphi.$$

Звідси випливає, що при $\varepsilon \to 0$ інтеграли (3) прямують до нуля внаслідок зроблених припущень стосовно функцій u та v. Тому в границі при $\varepsilon \to 0$ дістанемо формули Гріна (1) для простору з розрізом вздовж S.

Нехай функції $u(M)$ та $v(M)$ визначені в обмеженій області D, границя якої складається з скінченної кількості гладких компонентів, що не перетинаються між собою, $S = \Sigma \bigcup \sigma$, де $\Sigma = \bigcup\limits_k \Sigma_k$ — сукупність гладких замкнених поверхонь Σ_k, $\sigma = \bigcup\limits_k \sigma_k$ — сукупність гладких незамкнених поверхонь σ_k, обмежених гладкими кривими Γ_k, і нехай функції $u(M)$ та $v(M)$ мають відповідну кількість похідних в цій області, причому перші похідні функцій $u(M)$ та $v(M)$ поблизу лінії Γ_k поводять себе, як $\dfrac{C}{R_k^\alpha(M)}$ (C — стала, $R_k(M)$ — віддаль від точки M до лінії Γ_k, $0 \leqslant \alpha < 1$). В цьому випадку, як легко бачити, справджуються такі формули Гріна:

$$\iiint\limits_{D} \{v\Delta u + (\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} v)\}\, d\tau = -\iint\limits_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial n}\, dS - \iint\limits_{\sigma} v \frac{\partial u}{\partial n}\, dS;$$
$$\iiint\limits_{D} \{v\Delta u - u\Delta v\}\, d\tau = -\iint\limits_{\Sigma} \left\{v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right\} dS - \iint\limits_{\sigma} \left\{v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right\} dS,$$

де n — орт внутрішньої нормалі до $S = \Sigma \bigcup \sigma$.

Інтеграли по незамкнених поверхнях слід розуміти як інтеграли по двосторонній поверхні, тобто

$$\iint\limits_{\sigma_k} f\,dS = \iint\limits_{\sigma_k} f_+\,dS + \iint\limits_{\sigma_k} f_-\,dS,$$

де f_+ та f_- — граничні значення f при наближенні до σ_k «зверху» та «знизу».

Теорема 2. *Нехай функція $u(M)$ гармонічна у просторі з розрізом вздовж незамкненої поверхні Ляпунова, обмеженої гладкою кривою, регулярна на нескінченності, неперервно диференційовна в усьому просторі аж до розрізу, за винятком границі цього розрізу, в околі якої вона обмежена, а її перші похідні зростають не швидше, ніж $\frac{C}{R_0^\alpha}$, де C — стала, R_0 — віддаль до границі розрізу, $0 \leqslant \alpha < 1$. Тоді, якщо при наближенні до розрізу в напрямі додатної та від'ємної нормалі ця функція набирає однакових значень $\{[u]_+ = [u]_-\}$, то вона зображувана у вигляді потенціалу простого шару; якщо при наближенні до внутрішніх точок розрізу «зверху» та «знизу» нормальна похідна цієї функції приймає рівні значення $\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_+ = \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_-\right\}$, то вона зображувана у вигляді потенціалу подвійного шару.*

Для доведення теореми застосуємо другу формулу Гріна до функції $v = \frac{1}{R}$ (R — віддаль між точками M та N) та гармонічної функції $u(M)$. Тоді дістанемо

$$u(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left\{\frac{1}{R}\left[\frac{\partial u_-(N)}{\partial n}\right]_+ - u_+(N)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\right\} d_N S +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left\{\frac{1}{R}\left[\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right]_- - u_-(N)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\right\} d_N S,$$

або

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left\{[u_+(N) - u_-(N)]\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\left[\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right)_-\right]\right\} d_N S. \tag{4}$$

З формули (4) випливає, що коли гармонічна функція $u(M)$ приймає на S «зверху» та «знизу» однакові значення (тобто $u_+ = u_-$), то

$$u(M) = \iint\limits_S \frac{1}{R}\,\mu(N)\,d_N S, \tag{5}$$

де

$$\mu(N) = \frac{1}{4\pi}\left\{\left[\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right]_- - \left[\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right]_+\right\}. \tag{5'}$$

Якщо функція $u(M)$ задовольняє у внутрішніх точках S умову

$$\left[\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right]_+ = \left[\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right]_-,$$

то

$$u(M)=\iint\limits_S \nu(N)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}d_N S, \tag{6}$$

де

$$\nu(N)=\frac{1}{4\pi}[u_+(N)-u_-(N)]. \tag{6'}$$

Формули (5), (6) показують, що при виконанні сформульованих у теоремі 2 умов гармонічна у просторі з розрізом функція може бути зображена у вигляді простого або подвійного шару. При цьому з формули (5′) випливає, що густина простого шару на границі поверхні шару може мати особливість типу $\frac{C}{R_0^\alpha}$, де $C=\text{const}$, $0\leqslant\alpha<1$, R_0 — віддаль до границі поверхні шару.

Теорема 2 узагальнює відомий результат класичної теорії потенціалу [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М., 1947.
2. Sommerfeld A. Proc. Lond. Math. Soc., 28, 395 (1897).

УДК 518:517.91/94

М. Я. БАРТІШ

ПРО ОДНУ МОДИФІКАЦІЮ РІЗНИЦЕВОГО АНАЛОГУ МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

Розглянемо нелінійну крайову задачу

$$\frac{dx}{dt}=f(t,\ x),\qquad g(x_0,\ x_l)=d \tag{1}$$

на проміжку $[0,\ l]$; $f(t,\ x)$, $g(x_0,\ x_l)$, $x(t)$, d визначаються аналогічно, як в [4]. Для розв'язування задачі (1) використаємо обчислювальну схему:

$$\begin{gathered}\frac{dx^{(k,s)}}{dt}=\Gamma_f^{(k)}(t)\,z_k^{(s)}+f^{(k,s-1)}(t);\\ \Gamma_0^{(k)}z_{k0}^{(s)}+\Gamma_l^{(k)}z_{kl}^{(s)}=d-g^{(k,s-1)};\\ x^{(k,s)}=x^{(k,s-1)}+z_k^{(s)}\qquad(k=0,\ 1,\ 2,\ldots;\ \ s=1,\ 2,\ldots,\ p;\\ x^{(k)}=x^{(k,0)}=x^{(k-1,p)}),\end{gathered} \tag{2}$$

де

$$\Gamma_f^{(k)}(t)=\Gamma_f(t,\ x^{(k)},\ y^{(k)})=\left(\cdots\ \frac{f_i(t,\ x^{(k)}+\mathbf{e}_j y_j^{(k)})-f_i(t,\ x^{(k)})}{y_j^{(k)}}\ \cdots\right);$$