то

$$u(M)=\iint_S \nu(N)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}d_N S, \tag{6}$$

де

$$\nu(N)=\frac{1}{4\pi}[u_+(N)-u_-(N)]. \tag{6'}$$

Формули (5), (6) показують, що при виконанні сформульованих у теоремі 2 умов гармонічна у просторі з розрізом функція може бути зображена у вигляді простого або подвійного шару. При цьому з формули (5′) випливає, що густина простого шару на границі поверхні шару може мати особливість типу $\frac{C}{R_0^\alpha}$, де $C=\text{const}$, $0\leqslant\alpha<1$, R_0 — віддаль до границі поверхні шару.

Теорема 2 узагальнює відомий результат класичної теорії потенціалу [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М., 1947.
2. Sommerfeld A. Proc. Lond. Math. Soc., 28, 395 (1897).

УДК 518:517.91/94

М. Я. БАРТІШ

ПРО ОДНУ МОДИФІКАЦІЮ РІЗНИЦЕВОГО АНАЛОГУ МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

Розглянемо нелінійну крайову задачу

$$\frac{dx}{dt}=f(t,\ x),\qquad g(x_0,\ x_l)=d \tag{1}$$

на проміжку $[0,\ l]$; $f(t,\ x)$, $g(x_0,\ x_l)$, $x(t)$, d визначаються аналогічно, як в [4]. Для розв'язування задачі (1) використаємо обчислювальну схему:

$$\begin{gathered}\frac{dx^{(k,s)}}{dt}=\Gamma_f^{(k)}(t)\,z_k^{(s)}+f^{(k,s-1)}(t);\\ \Gamma_0^{(k)}z_{k0}^{(s)}+\Gamma_l^{(k)}z_{kl}^{(s)}=d-g^{(k,s-1)};\\ x^{(k,s)}=x^{(k,s-1)}+z_k^{(s)}\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots;\ \ s=1,\ 2,\ldots,\ p;\\ x^{(k)}=x^{(k,0)}=x^{(k-1,p)}),\end{gathered} \tag{2}$$

де

$$\Gamma_f^{(k)}(t)=\Gamma_f(t,\ x^{(k)},\ y^{(k)})=\left(\cdots\ \begin{matrix}\vdots\\ \dfrac{f_i(t,\ x^{(k)}+\mathbf{e}_j y_j^{(k)})-f_i(t,\ x^{(k)})}{y_j^{(k)}}\\ \vdots\end{matrix}\ \cdots\right);$$

$$\Gamma_0^{(k)} = \Gamma_0(x_0^{(k)}, x_l^{(k)}, y_0^{(k)}) = \left(\cdots \frac{g_i(x_0^{(k)} + e_j y_{0j}^{(k)}, x_l^{(k)}) - g_i(x_0^{(k)}, x_l^{(k)})}{y_{0j}^{(k)}} \cdots \right);$$

$$\vdots$$

$$\Gamma_l^{(k)} = \Gamma_l(x_0^{(k)}, x_l^{(k)}, y_l^{(k)}) = \left(\cdots \frac{g_i(x_0^{(k)}, x_l^{(k)} + e_j y_{lj}^{(k)}) - g_i(x_0^{(k)}, x_l^{(k)})}{y_{lj}^{(k)}} \cdots \right)$$

$$\vdots$$

є різницеві аналоги матриць Якобі для вектор-функцій $f(t, x)$, $g(x_0, x_l)$; $y(t)$ — N-вимірна вектор-функція

$$(\min_{t,\, l} |y_i(t)| > 0); \qquad f^{(k,s)}(t) = f(t, x^{(k,s)}), \qquad g^{(k,s)} = g(x_0^{(k,s)}, x_l^{(k,s)}).$$

Легко бачити, що обчислювальна схема різницевого аналогу методу лінеаризації [2] є частковий випадок схеми (2).

В цій статті доведемо збіжність обчислювальної схеми (2), а також дамо алгоритм для визначення оптимальної (в розумінні кількості операцій, використаних на обчислення кінцевого результату) схеми розв'язування конкретної крайової задачі (1), тобто покажемо, як вибрати p, щоб обчислювальна схема із класу (2) давала розв'язок задачі (1) при виконанні мінімального числа операцій.

Введемо деякі позначення. Нехай $\Phi^{(x)}(t, \alpha)[\tilde{\Phi}^{(x)}(t, \alpha)]$ — фундаментальна матриця, яка задовольняє системі

$$\frac{d\Phi^{(x)}}{dt} = \Gamma_f(t, x, y)\,\Phi^{(x)}, \qquad \Phi^{(x)}(\alpha, \alpha) = E;$$

$$\left[\frac{d\tilde{\Phi}^{(x)}}{dt} = \tilde{\Gamma}_f(t, x, x^*)\,\tilde{\Phi}^{(x)}, \qquad \tilde{\Phi}^{(x)}(\alpha, \alpha) = E\right];$$

S_t — області, які визначаються при кожному $t \in [0, l]$ нерівністю

$$\|x(t) - x^{(0)}(t)\| \leqslant \varrho,$$

де $x^{(0)}(t)$ задана вектор-функція. Для скорочення запису введемо:

$$b = \sqrt{2}\,(\sqrt{b_1^2 + b_2^2} + \sqrt{b_2^2 + b_3^2});$$

$$\Phi^{(k)}(t) = \Phi^{(x^{(k)})}(t, 0);$$

$$\tilde{\Gamma}_f^{(k)}(t) = \Gamma_f(t, x^{(k)}, x^*) = \int_0^1 \Gamma_f(t, x^* + \tau(x^{(k)} - x^*))\,d\tau.$$

Теорема. *Нехай виконуються умови:*

1) $\|y^{(k)}(t)\| \leqslant c\|x^{(k+1)}(t) - x^{(k)}(t)\|$;
2) $\|\Gamma_f(t, x, y)\| \leqslant a_1$ для $x(t) \in S_t$, $x(t) + e_j y_j(t) \in S_t$;
3) $\|\Gamma_l(x_0, x_l, y_l)\| \leqslant a_2$ для $x_0 \in S_0$, $x_l \in S_l$, $x_l + y_l \in S_l$;
4) $\|[\Gamma_0(x_0, x_l, y_0) + \Gamma_l(x_0, x_l, y_l)\,\Phi^{(x)}(l, 0)]^{-1}\| \leqslant a_3$ для $x_0 \in S_0$, $x_0 + y_0 \in S_0$, $x_l + y_l \in S_l$, $x_l \in S_l$,

а лінійні крайові задачі (2) мають розв'язок при кожному k;

$$5)\ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\|\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_{0j}\cdot\partial x_{0i}}\tau d\tau d\gamma\right\|^2 \leqslant b_1^2,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\|\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_{0i}\,\partial x_{0j}} d\tau d\gamma\right\|^2 \leqslant b_1^2;$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\|\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_{lj}\cdot\partial x_{lj}}\tau\, d\tau\, d\gamma\right\|^2 \leqslant b_3^2;$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\|\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_{lj}\cdot\partial x_{li}} d\tau d\gamma\right\|^2 \leqslant b_3^2;$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\|\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_{0j}\cdot\partial x_{li}}\tau\, d\tau\, d\gamma\right\|^2 \leqslant b_2^2,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\|\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial^{x_{0j}}\cdot\partial x_{li}} d\tau\, d\gamma\right\|^2 \leqslant b_2^2;$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\|\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_{lj}\cdot\partial x_{0i}}\tau\, d\tau\, d\gamma\right\|^2 \leqslant b_2^2,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\|\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_{lj}\cdot\partial x_{0i}} d\tau\, d\gamma\right\|^2 \leqslant b_2^2,$$

якщо аргументи других похідних $(1-\gamma)x_0+\tau(1-\gamma)e_j y_{0j}+\tau z_0+\gamma(1-\tau)x_0^*$, $(1-\gamma)x_l+\tau(1-\gamma)e_j y_{lj}+\tau z_l+\gamma(1-\tau)x_l^*$ *належать відповідно* S_0, S_l *при* $0\leqslant\tau,\ \gamma\leqslant 1$;

$$6)\ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\|\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\cdot\partial x_j}\tau\, d\tau\, d\gamma\right\|^2 \leqslant a^2,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\|\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\cdot\partial x_j} d\tau\, d\gamma\right\|^2 \leqslant a^2,$$

якщо аргументи другої похідної $(1-\gamma)x+\tau(1-\gamma)e_j y_j+\gamma(1-\tau)x^*+\tau z$ для всіх $t\in[0,\ 1]$ і $0\leqslant\gamma,\ \tau\leqslant 1$ належать S_l;

7) *початкове наближення* $x^{(0)}(t)$ *вибрано як розв'язок задачі Коші*

$$\frac{dx^{(0)}}{dt}=f(t,\ x^{(0)})\qquad x^{(0)}(0)=x_0^{(0)}$$

з таким початковим вектором $x_0^{(0)}$, *що*

$$\beta=\alpha(2+c)\max_t\|\tilde{\Phi}^{(0)}(t)[\tilde{\Gamma}_0^{(0)}+\tilde{\Gamma}_l^{(0)}\tilde{\Phi}^{(0)}(l)]^{-1}(d-g(x_0^{(0)},\ x_l^{(0)})\|<1$$

і

$$\omega(\beta)=\frac{1}{\alpha}\sum_{i=0}^{\infty}\beta^{2^i}\leqslant\frac{\rho}{3+c},$$

де

$$\alpha = e^{a_1 l}\left\{\left[b + a_2 a\sqrt{2}\left(\frac{e^{a_1 l}-1}{a_1}\right)\right]a_3 + 2\,a\,\frac{1-e^{-a_1 l}}{a_1}\right\}.$$

Тоді послідовність $\{x^{(k)}(t)\}$, *одержана за схемою (2), збігається до границі* $x^*(t)$, *яка належить області* S_t *для всіх* $t \in [0, l]$ *і є розв'язком задачі (1), причому*

$$\| x^{(k+1)} - x^* \| \leqslant \frac{1}{\alpha(2+c)}\beta^{(p+1)^k}.$$

Доведення. Існування розв'язку задачі (1) випливає з теореми 1 [1], якщо до цієї теореми застосувати умови розглядуваної нами теореми, тобто послідовність $\{x^{(k)}(t)\}$ одержана за схемою (2), при $p=1$ збігається до границі $x^*(t)$, яка є розв'язком задачі (1). Покажемо, що до $x^*(t)$ збігається послідовність $\{x^{(k)}(t)\}$, яка одержана за схемою (2) при $p>1$. З (2) знаходимо:

$$\begin{gathered}\frac{dx^{(k,s)}}{dt} - \frac{dx^*}{dt} = \Gamma_f^{(k)}(t)\,(x^{(k,s)} - x^*) - \Gamma_f^{(k)}(t)\,(x^{(k,s-1)} - x^*) + \\ + f(t, x^{(k,s-1)}) - f(t, x^*), \\ \Gamma_{(0)}^{(k)}(x_0^{(k,s)} - x_0^*) + \Gamma_l^{(k)}(x_l^{(k,s)} - x_l^*) = d - g^{(k,s-1)} + \\ + \Gamma_0^{(k)}(x_0^{(k,s-1)} - x_0^*) + \Gamma_l^{(k)}(x_l^{(k,s-1)} - x^*).\end{gathered} \tag{3}$$

Введемо позначення

$$\xi_{(k,s)}(t) = x^{(k,s)}(t) - x^*(t), \qquad \tilde{\Gamma}_f^{(k,s)}(t) = \int_0^1 \Gamma_f(t, x^* + \tau\xi^{(k,s)}(t))\,d\tau,$$

$$\tilde{\Gamma}_0^{(k,s)} = \int \Gamma_0(x_0^* + \tau\xi_0^{(k,s)}, \qquad x_l^* + \tau\xi^{(k,s)})\,d\tau, \tag{4}$$

$$\tilde{\Gamma}_l^{(k,s)} = \int_0^1 \Gamma_l(x_0^* + \tau\xi_0^{(k,s)},\ x_l^* + \tau\xi_l^{(k,s)})\,d\tau.$$

З (3), беручи до уваги рівності

$$f(t, x^{(k,s-1)}) - f(t, x^*) = \Gamma_f^{(k,s-1)}(t)\,\xi^{(k,s-1)}(t),$$

$$g(x_0^{(k,s-1)},\ x_l^{(k,s-1)}) - g(x_0^*,\ x_l^*) = \tilde{\Gamma}_0^{(k,s-1)}\xi_0^{(k,s-1)} + \tilde{\Gamma}_l^{(k,s-1)}\xi_l^{(k,s-1)}, \tag{5}$$

дістанемо

$$\begin{gathered}\frac{d\xi^{(k,s)}(t)}{dt} = \Gamma_f^{(k)}(t)\,\xi^{(k,s)}(t) - \Gamma_f^{(k)}(t)\,\xi^{(k,s-1)}(t) + \tilde{\Gamma}_f^{(k,s-1)}(t)\,\xi^{(k,s-1)}(t), \\ \Gamma_0^{(k)}\xi_0^{(k,s)} + \Gamma_l^{(k)}\xi_l^{(k,s)} = [\Gamma_0^{(k)} - \tilde{\Gamma}_0^{(k,s-1)}]\,\xi_0^{(k,s-1)} + [\Gamma_l^{(k)} - \tilde{\Gamma}_l^{(k,s-1)}]\,\xi_l^{(k,s-1)}.\end{gathered} \tag{6}$$

Оцінимо розв'язок крайової задачі (6). За допомогою фундаментальної матриці розв'язок системи (6) можна записати у вигляді [3]

$$\xi^{(k,s)}(t) = \Phi^{(k)}(t)\,\xi_0^{(k,s)} + \int_0^t \Phi^{(k)}(t,\tau)\,[\tilde{\Gamma}_f^{(k,s-1)}(\tau) - \Gamma_f^{(k)}(\tau)]\,\xi^{(k,s-1)}(\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

При використанні рівності (7) крайові умови задачі (6) можна визначити так

$$[\Gamma_0^{(k)} + \Gamma_l^{(k)} \Phi^{(k)}(l)]\, \xi_0^{(k,s)} = [\Gamma_0^{(k)} - \widetilde{\Gamma}_0^{(k,s-1)}]\, \xi_0^{(k,s-1)} +$$

$$+ [\Gamma_l^{(k)} - \widetilde{\Gamma}_l^{(k,s-1)}]\, \xi_l^{(k,s-1)} - \Gamma_l^{(k)} \int_0^l \Phi^{(k)}(l, \tau) \times$$

$$\times [\widetilde{\Gamma}_f^{(k,s-1)}(\tau) - \Gamma_f^{(k)}(\tau)]\, \xi^{(k,s-1)}(\tau)\, d\tau.$$

З даної рівності одержимо

$$\| \xi_0^{(k,s)} \| \leqslant \| [\Gamma_0^{(k)} + \Gamma_l^{(k)} \Phi^{(k)}(l)]^{-1} \| \Big\{ \| \Gamma_0^{(k)} - \widetilde{\Gamma}_0^{(k,s-1)} \| +$$

$$+ \| \Gamma_l^{(k)} - \widetilde{\Gamma}_l^{(k,s-1)} \| + \| \Gamma_l^{(k)} \| \int_0^l \exp\Big(\int_\tau^l \| \Gamma_f^{(k)}(\tau_1) \| \, d\tau_1 \Big) \times$$

$$\times \max_\tau \| \Gamma_f^{(k)}(\tau) - \widetilde{\Gamma}_f^{(k,s-1)}(\tau) \| \, d\tau \Big\} \max_t \| \xi^{(k,s-1)}(t) \|. \tag{8}$$

Тепер можна записати таку оцінку для $\xi^{(k,s)}(t)$:

$$\| \xi^{(k,s)}(t) \| \leqslant \Big\{ \exp\Big(\int_0^t \| \Gamma_f^{(k)}(t) \| \, dt \Big) \| [\Gamma_0^{(k)} + \Gamma_l^{(k)} \Phi^{(k)}(l)]^{-1} \| \times$$

$$\times \Big[\| \Gamma_0^{(k)} - \widetilde{\Gamma}_0^{(k,s-1)} \| + \| \Gamma_l^{(k)} - \widetilde{\Gamma}_l^{(k,s-1)} \| + \| \Gamma_l^{(k)} \| \times$$

$$\times \int_0^l \exp\Big(\int_\tau^l \| \Gamma_f^{(k)}(\tau_1) \| \, d\tau_1 \Big) \max_\tau \| \Gamma_f^{(k)}(\tau) - \widetilde{\Gamma}_f^{(k,s-1)}(\tau) \| \, d\tau \Big] +$$

$$+ \int_\tau^t \exp\Big(\int_\tau^t \| \Gamma_f^{(k)}(t_1) \, dt_1 \Big) \max_\tau \| \widetilde{\Gamma}_f^{(k,s-1)}(\tau) - \Gamma_f^{(k)}(\tau) \| \, d\tau \Big\} \max_t \| \xi^{(k,s-1)}(t) \|. \tag{9}$$

Припустимо, що виконуються умови (5), (6) розглядуваної нами теореми. Тоді справедливі оцінки:

$$\| \Gamma_f^{(k)} - \widetilde{\Gamma}_f^{(k,s-1)} \| \leqslant \sqrt{2}\, a \max_t [\| x^*(t) - x^{(k,s-1)}(t) \| +$$

$$+ (1+c) \| x^*(t) - x^{(k)}(t) \|]; \tag{10}$$

$$\| \Gamma_0^{(k)} - \widetilde{\Gamma}_0^{(k,s-1)} \| \leqslant \sqrt{2(b_1^2 + b_2^2)} \max_t [\| x^*(t) - x^{(k,s-1)}(t) \| +$$

$$+ (1+c) \| x^*(t) - x^{(k)}(t) \|]; \tag{11}$$

$$\| \Gamma_l^{(k)} - \widetilde{\Gamma}_l^{(k,s-1)} \| \leqslant \sqrt{2(b_2^2 + b_3^2)} \max_t [\| x^*(t) - x^{(k,s-1)}(t) \| +$$

$$+ (1+c) \| x^*(t) - x^{(k)}(t) \|]. \tag{12}$$

Розглянемо, як одержати одну з даних оцінок, наприклад першу. Нехай $\Gamma_{f_j'}(t, w^{(k)})$ — матриця Якобі від вектор-функції $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ по аргументах $x_i (i=1, 2, \ldots, N)$, тоді

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{x^{(k)}+\tau e_j y_j^{(k)}} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{x^*+\tau\xi^{(k,s-1)}} =$$

$$= \int_0^1 \Gamma_{f_j'}(t, w^{(k)})\, d\gamma\, [x^{(k)} + \tau e_j y_j^{(k)} - x^* - \tau\xi^{(k,s-1)}], \qquad (13)$$

де

$$w^{(k)} = x^{(k)} + \tau e_j y_j^{(k)} + \gamma(x^* + \tau\xi^{(k,s-1)} - x^{(k)} - \tau e_j y_j^{(k)}).$$

Використовуючи (13), дістанемо

$$\| \Gamma_f^{(k)} - \tilde{\Gamma}_f^{(k,s-1)} \|^2 \leqslant \sum_{j=1}^N \left\| \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{x^{(k)}+\tau e_j y_j^{(k)}} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{x^*+\tau\xi^{(k,s-1)}}\right] d\tau \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^N \left\| \int_0^1 \int_0^1 \Gamma_{f_j'}(t, w^{(k)})\, d\gamma\, [x^{(k)} - x^* + \tau(e_j y_j^{(k)} - \xi^{(k,s-1)})]\, d\tau \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^N \left\{ \left\| \int_0^1 \int_0^1 \Gamma_{f_j'}(t, w^{(k)})\, d\gamma\, d\tau \right\| \| x^{(k)} - x^* \| + \right.$$

$$\left. + \left\| \int_0^1 \int_0^1 \Gamma_{f_j'}(t, w^{(k)})\, \tau\, d\gamma\, d\tau \right\| (\| y^{(k)} \| + \| \xi^{(k,s-1)}(t) \|) \right\}^2.$$

Оскільки

$$\sum_{j=1}^N \left\| \int_0^1 \int_0^1 \Gamma_{f_j'}(t, w^{(k)})\, d\gamma\, d\tau \right\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \left\| \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, d\tau\, d\gamma \right\|^2 \leqslant a^2,$$

$$\sum_{j=1}^N \left\| \int_0^1 \int_0^1 \Gamma_{f_j'}(t, w^{(k)})\, \tau\, d\gamma\, d\tau \right\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \left\| \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, \tau\, d\tau\, d\gamma \right\|^2 \leqslant a^2,$$

то, припускаючи, що $w^{(k)} \in S_l$, дістанемо

$$\| \Gamma_f^{(k)} - \tilde{\Gamma}_f^{(k,s-1)} \| \leqslant \sqrt{2}\, a \{ \| x^{(k)} - x^* \| (1 + c) + \| x^{(k,s-1)} - x^* \| \}.$$

Аналогічно доводимо справедливість оцінок (11), (12). З (9), використовуючи оцінки (10)—(12), маємо:

$$\| \xi^{(k,s)}(t) \| \leqslant e^{a_1 l} \left\{ a_3 (b + \sqrt{2}\, a a_2) \frac{e^{a_1 l} - 1}{a_1} + \sqrt{2}\, a \frac{1 - e^{-a_1 l}}{a_1} \right\} \times$$

$$\times \max_t \| \xi^{(k,s-1)}(t) \| [\| x^{(k)} - x^* \| (1 + c) + \| x^{(k,s-1)} - x^* \|] \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \max_t [\| x^{(k,s-1)} - x^* \|^2 + (1 + c) \| x^{(k)} - x^* \| \| x^{(k,s-1)} - x^* \|]. \qquad (14)$$

Запишемо нерівність (14) послідовно для $s=1, 2, \ldots, p$

$$\| x^{(k, 1)} - x^{(*)} \| \leqslant \alpha (2 + c) \max_t \| x^{(k)} - x^* \|^2 = c_1 \max_t \| x^{(k)} - x^* \|^2;$$

$$\| x^{(k, 2)} - x^* \| \leqslant \alpha c_1 \max_t \| x^{(k)} - x^* \|^3 [c_1 \| x^{(k)} - x^* \| + (1 + c)] \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \max_t \| x^{(k)} - x^* \|^3; \tag{15}$$

$$\vdots$$

$$\| x^{(k, p)} - x^* \| \leqslant \alpha c_{p-1} \max_t \| x^{(k)} - x^* \|^{p+1} [c_{p-1} \| x^{(k)} - x^* \|^{p-1} + (1+c)] \leqslant$$

$$\leqslant c_p \max_t \| x^{(k)} - x^* \|^{p+1}.$$

Відзначимо, що при виконанні умови

$$c_1 \max_t \| x^* - x^{(k)} \| \leqslant 1 \tag{16}$$

можна прийняти

$$c_s = c_1^s. \tag{17}$$

Для встановлення справедливості виразів (15)—(17) достатньо показати, що аргументи других похідних в (13) належать S_t при $t \in [0, l]$. Оскільки

$$d - g (x_0^{(0)}, x_l^{(0)}) = g (x_0^*, x_l^*) - g (x_0^{(0)}, x_l^{(0)}) =$$

$$= \tilde{\Gamma}_0^{(0)} (x_0^* - x_0^{(0)}) + \tilde{\Gamma}_l^{(0)} (x_l^* - x_l^{(0)}) \tag{18}$$

а $x^{(0)}$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{dx^{(0)}}{dt} = f (t, x^{(0)}) \qquad x^{(0)} (0) = x_0^{(0)},$$

то можна записати

$$x^{(0)} - x^* = \tilde{\Phi}^{(0)} (t) (x_0^{(0)} - x_0^*). \tag{19}$$

З (18), (19) дістанемо

$$x_0^{(0)} - x_0^* = [\tilde{\Gamma}_0^{(0)} + \tilde{\Gamma}_l^{(0)} \tilde{\Phi}^{(0)} (l)]^{-1} (g (x_0^{(0)}, x_l^{(0)} - d). \tag{20}$$

З (19), (20), беручи до уваги умови теореми, знаходимо

$$c_1 \max_t \| x^* - x^{(0)} \| \leqslant \alpha (2 + c) \max_t \| \tilde{\Phi}^{(0)} (t) \times$$

$$\times [\tilde{\Gamma}_0^{(0)} + \tilde{\Gamma}_l^{(0)} \tilde{\Phi}^{(0)} (l)]^{-1} (d - g (x_0^{(0)}, x_l^{(0)}) \| < 1. \tag{21}$$

З (15) і (21) одержимо

$$\begin{aligned} \| x^{(k)} - x^* \| &\leqslant \max_t \| x^{(0)} - x^* \|; \\ \| x^{(k, s)} - x^* \| &\leqslant \max_t \| x^{(0)} - x^* \|. \end{aligned} \tag{22}$$

З (21), (22) і умов теореми бачимо, що $x^{(k)}$ і $x^{(k,s)}$ належать S_t. Покажемо, що $w^{(k)} \in S_t$. Дійсно,

$$\| w^{(k)} - x^{(0)} \| = \| x^{(k)} + \tau y_j^{(k)} \mathbf{e}_j + \gamma [x^* + \tau (x^{(k,s-1)} - x^*) - x^{(k)} - \\ - \tau y_j^{(k)} \mathbf{e}_j] - x^{(0)} \| \leqslant (1-\gamma) \| x^{(k)} - x^* \| + \| x^* - x^{(0)} \| + \tau (1-\gamma) \| y^{(k)} \| + \\ + \gamma\tau \| x^{(k,s-1)} - x^* \| \leqslant (3+c) \max_t \| x^{(0)} - x^* \| \leqslant \rho.$$

Аналогічно перевіряються умови $w_0^{(k)} \in S_0$, $w_l^{(k)} \in S_l$. Одержані оцінки показують, що при виведенні нерівності (14) можна використовувати умови теореми. Отже, нерівність (15) виконується при будь-якому k. З (15) дістанемо

$$\| x^{(k+1)} - x^* \| \leqslant \frac{1}{\alpha (2+c)} \beta^{(p+1)^k}.$$

Доведена теорема дає можливість ставити задачу про вибір оптимального обчислювального процесу з класу (2). Якщо вважати, що для одержання $x^{(k+1)}$ за відомим наближенням $x^{(k)}$ необхідно здійснити p кроків ітерації (розв'язуємо p лінійних крайових задач), то легко бачити, що збіжність ітераційного процесу (2) при $p>1$ має менший порядок, ніж збіжність різницевого аналогу методу лінеаризації. Однак не можна говорити, що обчислювальна схема (2) менш ефективна, ніж різницевий аналог методу лінеаризації. Схема (2) відрізняється від схеми різницевого аналогу методу лінеаризації. При використанні схеми (2) значення матриць $\Gamma_f(t)$ (при інтегруванні лінійної крайової задачі $\Gamma_f(t)$ обчислюється в багатьох точках $t_i \in [0, l]$), $\Gamma_0(x_0, x_l)$, $\Gamma_l(x_0, x_l)$ змінюються новими після розв'язку p лінійних крайових задач. При використанні схеми різницевого аналогу значення цих матриць змінюється на кожному кроці. Оскільки для обчислення даних матриць необхідно виконати велике число операцій, то доцільно використовувати схеми з класу (2). Припустимо, що при розв'язуванні лінійної крайової задачі затрачається N_Γ операцій на побудову матриць $\Gamma_f(t, x)$, $\Gamma_0(x_0, x_l)$, $\Gamma_l(x_0, x_l)$ і N_c операцій на всі інші обчислення. Після відповідних перетворень [5] знаходимо, що за p, при якому одержуємо оптимальну схему, необхідно взяти найближче до t^* ціле число, де t^* — розв'язок рівняння

$$\ln(1+t) = 1 + \left(\frac{N_\Gamma}{N_c} - 1\right) \frac{1}{1+t} \qquad (t \geqslant 1).$$

Слід відзначити, що аналогічна теорема має місце і для методу лінеаризації [4]. Теорема, аналогічна розглянутій теоремі, справедлива для обчислювальної схеми (2), коли p є величиною, залежною від k, тобто коли на кожній зовнішній ітерації число внутрішніх ітерацій не є сталим.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бартіш М. Я. Про реалізацію методу лінеаризації на ЕЦОМ. ДАН УРСР, сер. А, № 12, 1967.
2. Бартиш М. Я. Разностный аналог метода линеаризации, УМЖ, 1968, т. 20, № 3.
3. Крейн М. Г. Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. ИМ АН УССР, Киев, 1966.
4. Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ, ч. 2, «Наукова думка», Киев, 1966.
5. Шаманский В. Е. Об одной модификации метода Ньютона. УМЖ, 1967, т. 19, № 1.