УДК 513.015.6

С. В. ДЕНИСКО

ν-ПОВЕРХНІ ПРЯМОЛІНІЙНОЇ КОНГРУЕНЦІЇ

Поняття поверхні ν було введено в роботі [1]. Нехай C — прямолінійна конгруенція, сферичне відображення якої покриває двовимірну область на сфері. Нехай конгруенція C відображається на конгруенцію $\overset{*}{C}$ так, що напрям променів зберігається. Якщо при цьому віддалі між нескінченно близькими твірними деякої лінійчатої поверхні конгруенції C зберігаються, то цю поверхню і відповідну їй поверхню конгруенції $\overset{*}{C}$ називатимемо поверхнями ν.

Надалі будемо вважати, що випадки, коли конгруенції C і $\overset{*}{C}$ відрізняються лише положенням в просторі, виключаються.

Оскільки відповідні промені конгруенції C і $\overset{*}{C}$ паралельні, то можна вважати, що приєднані до цих променів ортонормальні репери мають відповідно паралельні вектори. В такому разі конгруенції C і $\overset{*}{C}$ матимуть однакові форми ω_1^3, ω_2^3 [3].

Нехай другі квадратичні форми конгруенцій C і $\overset{*}{C}$ відповідно

$$-b'(\omega_1^3)^2+(a-c)\,\omega_1^3\,\omega_2^3+b\,(\omega_2^3)^2;$$
$$-\overset{*}{b}{}'(\omega_1^3)^2+(\overset{*}{a}-\overset{*}{c})\,\omega_1^3\,\omega_2^3+\overset{*}{b}\,(\omega_2^3)^2.$$

Тоді диференціальне рівняння поверхонь ν запишеться таким чином:

$$-(b'-\overset{*}{b}{}')(\omega_1^3)^2+(a-c-\overset{*}{a}+\overset{*}{c})\,\omega_1^3\,\omega_2^3+(b-\overset{*}{b})(\omega_2^3)^2=0. \tag{1}$$

Теорема 1. *Якщо конгруенції C і $\overset{*}{C}$ — ізотропні, то вони не містять в собі поверхонь ν.*

Доведення. Сумістимо початок кожного променя конгруенцій C і $\overset{*}{C}$ з центром цього променя. Тоді рівняння (1), оскільки конгруенції C, $\overset{*}{C}$ — ізотропні, матиме вигляд

$$(b-\overset{*}{b})\,[(\omega_1^3)^2+(\omega_2^3)^2]=0,$$

звідки $b=\overset{*}{b}$. Отже, конгруенція $\overset{*}{C}$ від конгруенції C відрізняється лише положенням в просторі, що неможливо. Теорему доведено.

Теорема 2. *Якщо конгруенції C і $\overset{*}{C}$ — нормальні, то сферичне відображення поверхонь ν утворює ортогональну сітку.*

Доведення. Нехай ортонормальні репери до відповідних променів конгруенцій C і $\overset{*}{C}$ приєднані таким чином, що рівняння $\omega_2{}^3=0$ визначає одну сім'ю поверхонь ν. Тоді з (1) маємо

$$b'=\overset{*}{b}{}'. \tag{2}$$

Оскільки конгруенції C і $\overset{*}{C}$ — нормальні, то

$$b=b',\ \overset{*}{b}=\overset{*}{b}{}'. \tag{3}$$

З (2) і (3) випливає, що

$$b=\overset{*}{b}. \tag{4}$$

На основі (2), (4) рівняння (1) запишеться у такому вигляді:

$$(a-c-\overset{*}{a}+\overset{*}{c})\,\omega_1^3\,\omega_2^3=0,$$

що і доводить справедливість нашого твердження.

Теорема 3. *Якщо сітка головних поверхонь конгруенції C складається з поверхонь ν, то і сітка головних поверхонь конгруенції $\overset{*}{C}$ складається з поверхонь ν.*

Доведення. Приєднаємо ортонормальні репери до відповідних променів конгруенцій C і $\overset{*}{C}$ так, щоб рівняння

$$\omega_1^3=0, \qquad \omega_2^3=0$$

визначали головні поверхні конгруенції C. Тоді

$$b=-b'. \tag{5}$$

Крім того, оскільки сітка головних поверхонь конгруенції C складається з поверхонь ν, то

$$b=\overset{*}{b},\ b'=\overset{*}{b}{}'. \tag{6}$$

З (5) і (6) маємо

$$\overset{*}{b}=-\overset{*}{b}{}'.$$

Отже, сітка головних поверхонь конгруенції $\overset{*}{C}$ також складається з поверхонь ν Теорему доведено.

Слід відзначити, що в існуванні вказаних в теоремах 1—3 випадків легко переконатись, якщо скористуватись теоремою про визначення конгруенції двома квадратичними формами.

Теорема 4. *Нехай віддаль між відповідними променями конгруенцій C, $\overset{*}{C}$ є величина стала. Тоді одна сім'я поверхонь ν конгруенції C буде такою, що дотична до сферичного відображення кожної поверхні цієї сім'ї є перпендикулярною до площини відповідних променів конгруенцій C, $\overset{*}{C}$.*

Доведення. Нехай рівняння опорних поверхонь конгруенцій C, $\overset{*}{C}$ відповідно

$$\overline{A}=\overline{A}(u,v);$$
$$\overline{B}=\overline{A}(u,v)+p\overline{e}_1(u,v), \tag{7}$$

де $\overline{e}_1$ — вектор приєднаного до променя ортонормального репера $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$, вектор $\overline{e}_3$ якого є напрямним вектором променя.

Оскільки $p=\text{const}$, то з (7) маємо

$$d\overline{B}=\omega^1\overline{e}_1+(\omega^2+\alpha\omega_1^2)\,\overline{e}_2+(\omega^3+p\omega_1^3)\,\overline{e}_3. \tag{8}$$

Як відомо [3],

$$\omega^1=a\omega_1^3+b\omega_2^3, \qquad \omega^2=b'\omega_1^3+c\omega_2^3,$$
$$\omega_1^2=h\omega_1^3+k\omega_2^3.$$

Тому (8) набирає вигляду

$$d\overline{B}=(a\omega_1^3+b\omega_2^3)\,\overline{e}_1+[(b'+ph)\,\omega_1^3+(c+pk)\,\omega_2^3]\,\overline{e}_2+(\omega^3+p\omega_1^3)\,\overline{e}_3.$$

Звідси маємо, що

$$\overset{*}{a}=a,\ \overset{*}{b}=\overset{*}{b},\ b'=b'+ph,\ \overset{*}{c}=c+pk. \tag{9}$$

На основі (9) рівняння (1) запишемо таким чином:

$$h\,(\omega_1^3)^2+k\omega_1^3\,\omega_2^3=0.$$

Отже, одна сім'я поверхонь ν визначатиметься рівнянням

$$\omega_1^3=0,$$

звідки і виходить справедливість нашого твердження.

Теорема 5. *Нехай C — нормальна конгруенція і Φ — поверхня, яка ортогонально перетинає промені конгруенції C. Нехай на поверхні Φ задано поле вектора $\bar{a}$. Нехай логарифмічний градієнт довжини вектора $\bar{a}$ направлений по нормалі до трансверсалі поля вектора $\bar{a}$ і промінь конгруенції $\overset{*}{C}$ проходить через кінець цього вектора. Тоді трансверсалі поля вектора $\bar{a}$ є лініями перетину поверхонь ν конгруенції C з поверхнею Φ.*

Доведення. Рівняння (1) можна записати тепер таким чином:

$$(\bar{m}\partial_i\bar{m}\partial_j\bar{a})\,du_i du_j=0, \tag{10}$$

де u^1, u^2 — криволінійні координати на поверхні Φ; $\bar{m}$ — одиничний напрямний вектор нормалі до цієї поверхні.

Віднесемо поверхню Φ до ліній кривизни. Тоді

$$\partial_i\bar{m}=-k_{0i}\partial_i\bar{r}, \tag{11}$$

де $\bar{r}$ — радіус-вектор точки поверхні Φ, а k_{0i} — головна кривизна поверхні Φ.

Рівняння (10) на основі (11) набирає вигляду

$$k_{0i}(\bar{m}\partial_i\bar{r}\partial_j\bar{a})\,du_i du_j=0,$$

або

$$k_{0i}e_{ik}\nabla_j a^k du^i du^j=0, \tag{12}$$

де e_{ik} — дискримінантний тензор.

Нехай α_j — трансверсальний вектор поля вектора $\bar{a}$, A_j — логарифмічний градієнт довжини вектора $\bar{a}$; $\tilde{a}^k$ — доповняльний до вектора $\bar{a}$ вектор. Тоді [2]

$$\nabla_j a^k=\alpha_j\tilde{a}^k+A_j a^k. \tag{13}$$

Отже, на основі (13) рівняння (12) запишемо у вигляді

$$k_{0i}e_{ik}(\alpha_j\tilde{a}^k+A_j a^k)\,du^i du^j=0$$

або

$$k_{0i}\alpha_j a_i du^i du^j-k_{0i}A_j\tilde{a}_i du^i du^j=0.$$

Звідси і випливає справедливість теореми.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дениско С. В. О некоторых свойствах преобразования прямолинейной конгруэнции, сохраняющего направления лучей. Тезисы третьей межвузовской научной конференции по проблемам геометрии. Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1967.
2. Норден А. П. Теория поверхностей. Гостехиздат, М., 1956.
3. Фиников С. П. Теория конгруэнций. Гостехиздат, М.—Л., 1950.