УДК 517.9

Л. О. СТАРОКАДОМСЬКИЙ

ПРО НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ НА ПЛОЩИНІ З ЩІЛИНАМИ

Метод розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа на площині з щілинами розроблений Н. І. Мусхелішвілі і описаний в [1]. В нашій статті дається певна деталізація цього методу і його дальша розробка.

Будемо додержуватись позначень і припущень, прийнятих в [1]. Зокрема, приймемо, що на комплексній площині $z=x+iy$ задається кусково-гладка лінія $L=\sum\limits_{k=1}^{p} L_k$, яка складається з p розімкнутих дуг $L_k=a_kb_k$ з вибраними на них додатними напрямами від точки a_k до точки b_k. Точки $t=x(s)+iy(s)$ цієї лінії задані умовами

$$x=x_k(s); \qquad y=y_k(s); \qquad x_k,\ y_k \in C^{(n,\lambda)}\ (n\geqslant 2); \left(\frac{dx_k}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy_k}{ds}\right)^2\neq 0, \tag{1}$$

де s — деякий параметр (наприклад, довжина дуги) і $s_k\leqslant s\leqslant S_k$ на L_k. Як $\alpha(z_0,\ t)$ позначимо кут між додатною дотичною до L в точці t та вектором $\overrightarrow{z_0t}$, що відлічується від $\overrightarrow{z_0t}$ проти годинникової стрілки. Приймемо також, що

$$r(z_0,\ t)=|t-z_0|; \qquad \vartheta(z_0,\ t)=\arg(t-z_0); \qquad R(t)=\prod_{k=1}^{p}(t-a_k)(t-b_k).$$

Домовимось не змінювати позначень функції при зміні аргументу (наприклад, пишемо $\alpha(z_0, t)=\alpha(x_0, y_0; x, y)=\alpha(x_0, y_0; s)$ і т. д.). Під задачею Діріхле відповідно до [1] розуміємо визначення функції U, гармонічної поза L і регулярної на нескінченності, за граничною умовою

$$U_L^+=U_L^-=f, \tag{2}$$

а під видозміненою задачею Діріхле — визначення функції $u=\mathrm{Re}\,\Phi=$ $=\mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_L M(t)\,\frac{dt}{t-z_0}$; $(M\in H)$ за граничною умовою

$$u_{L_k}^+=u_{L_k}^-=f+C_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ p). \tag{3}$$

Індекси плюс та мінус вказують на належність відповідно до лівого чи правого околу точки $t\in L$. Густина M має значення M_k на L_k. Справедлива рівність

$$\frac{dt}{t-z_0}=\frac{\cos\alpha}{r}\,ds+i\,\frac{\sin\alpha}{r}\,ds.$$

За методом Н. І. Мусхелішвілі спочатку знаходять функцію $V=u+\sum\limits_{k=1}^{p}\alpha_k v_k$, $V(\infty)=0$, де α_k є деякі сталі, $v_k=\int\limits_{L_k}\sigma_k \ln r\,ds$ і

$\sigma_k(s)$ такі, що $e_k = \int\limits_{L_k} \sigma_k(s)\, ds \neq 0$, $v_k \in H$, а в іншому довільні. Оскільки $V(\infty)=0$, то

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = 0. \tag{4}$$

Для визначення u з граничної умови (3) дістаємо сингулярне інтегральне рівняння першого роду

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{L} M \frac{\cos\alpha}{r}\, ds = f_\alpha + C(t), \tag{5}$$

де $f_\alpha = f - \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k v_k$, $C(t) = C_k$ на L_k. Це рівняння відомим способом (див. [1]) зводиться до рівняння Фредгольма другого роду

$$M(t_0) - \int\limits_{L} M(t_1)\, N(t_1, t_0)\, dt_1 = F_\alpha(t_0) - \frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi} \sum_{k=1}^{p} C_k \int\limits_{L_k} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}\,(t-t_0)} \tag{6}$$

при умові виконання рівностей:

$$\int\limits_{L} \left[f_\alpha + C(t) - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{L} \frac{M(s_1) \sin\alpha(t, s_1)}{r(t, s_1)}\, ds_1 \right] \frac{t^{j-1}\, dt}{\sqrt{R(t)}} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, p), \tag{7}$$

де

$$N(t, t_1) = \frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi^2 i} \int\limits_{L} \frac{\sin\alpha(t, t_1)\, e^{-i\alpha(t, t_1)}}{\sqrt{R(t)}\,(t-t_0)(t_1 - t)}\, dt;$$

$$F_\alpha(t_0) = -\frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi} \int\limits_{L} \frac{f(t) - \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k v_k(t)}{\sqrt{R(t)}\,(t-t_0)}\, dt.$$

З умови (4) і рівностей $C_1 = C_2 = \ldots = C_p \,(= -\alpha_0)$ можна виразити всі α_k і α_0 через f і M, оскільки при $f=0$ маємо $M = \alpha_k = \alpha_0 = 0$, як буде показано нижче. Ці α_k запишемо у вигляді

$$\alpha_k = \int\limits_{L} \left[f - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{L} M \frac{\sin\alpha}{r}\, ds_1 \right] \frac{\omega_k(t)\, dt}{\sqrt{R(t)}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{8}$$

де ω_k — цілком визначені поліноми степеня, не більшого від $p-1$. Підставляючи одержані α_k в рівняння (6) і враховуючи тотожність

$$\int\limits_{L} \frac{t^{j-1}\, dt}{\sqrt{R(t)}\,(t-t_0)} \equiv 0, \qquad j \leq p, \tag{9}$$

дістанемо рівняння

$$M(t_0) - \int\limits_{L} M(t_1)\, N_\omega(t_1, t_0)\, dt_1 = F_\omega(t_0), \tag{10}$$

де

$$N_\omega = \frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi^2 i} \int_L \left\{1-(t-t_0)\sum_{j=1}^{p} \omega_j(t) \int_L \frac{v_j(\tau)\, d\tau}{\sqrt{R(\tau)}\,(\tau-t_0)}\right\} \times$$

$$\times \frac{\sin\alpha(t,\ t_1)\, e^{-i\alpha(t,t_1)}}{\sqrt{R(t)}\,(t-t_0)\,(t_1-t)}\, dt;$$

$$F_\omega = -\frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi} \int_L \left\{1-(t-t_0)\sum_{j=1}^{p} \omega_j(t) \int_L \frac{v_j(\tau)\, d\tau}{\sqrt{R(\tau)}\,(\tau-t_0)}\right\} \frac{f(t)\, dt}{\sqrt{R(t)}\,(t-t_0)},$$

з якого випливає $M \in H$ і

$$M(s_k) = M(S_k) = 0. \tag{11}$$

Покажемо, що для рівнянь (10) (а значить, і для рівнянь (6) і (5)) цілком зберігаються такі факти, доведені в § 108 [1] для випадку $p=1$:

а) однорідне рівняння (10) (при $f=0$) має лише нульовий розв'язок;

б) рівняння (10) еквівалентне своїй дійсній частині.

Якщо $f=0$ і α_k такі, що $C_1=C_2=\ldots=C_p=-\alpha_0$, то рівняння (5) можна записати у вигляді

$$w_L = \left[\frac{1}{\pi}\int_L M(s)\,\frac{\partial \ln r}{\partial s}\, ds + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \int_{L_k} \sigma_k \ln r\, ds\right]_L = -\alpha_0, \tag{12}$$

де $w = \int_L \nu \ln r\, ds$; $\nu = -\frac{1}{\pi}\frac{dM_k}{ds} + \alpha_k\sigma_k$ на L_k і позначення w_L зрозуміле із запису. Очевидно, що $w(\infty)=0$, тому з (12) маємо $\nu\equiv 0$, тобто $\frac{dM_k}{ds} = \pi\alpha_k\sigma_k$ на L_k. Інтегруючи останню рівність, враховуючи (11) і умову $e_k \neq 0$, дістаємо $\alpha_k=0$ $(k=1,\ 2,\ldots,p)$. Це значить, що рівняння (12) переходить у рівняння $\frac{1}{\pi}\int_L M\frac{dr}{r} = \text{const} = -\alpha_0$, з якого, як відомо (див. § 108 в [1]), випливає $M=0$, $\alpha_0=0$. Цим і доводиться твердження а). Твердження б) про еквівалентність рівняння (10) своїй дійсній частині доводиться так само, як і в § 108 [1].

Розв'язок задачі Діріхле дається формулою $U=V+\alpha_0$.

При спробах практичної реалізації описаного методу виникають великі обчислювальні труднощі, які можна зменшити при використанні розглядуваного нижче способу. Оскільки рівняння (6) при $C_1=\ldots=C_p$ лише формою запису відрізняється від рівняння (10), то покладемо $C_k=-\alpha_0$ для всіх k і будемо шукати розв'язок задачі Діріхле у вигляді $U = u + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k v_k + \alpha_0$, при цьому густину M визначимо за формулою

$$M = \sum_{k=1}^{p+1} \alpha_k M^{(k)}; \qquad \alpha_{p+1} = 1. \tag{13}$$

Функції $M^{(k)}$ $(k=1,\ 2,\ldots,p)$ лінійно незалежні, оскільки при $f=0$ буде $M^{(p+1)}=0$ і $\alpha_k=0$, що випливає з твердження а). Неважко побачити, що задача тепер зводиться до визначення $M^{(k)}$ із сукупності Фредгольмових рівнянь другого роду

$$M^{(k)} - \int_L M^{(k)} N \, dt_1 = F_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ p+1), \tag{14}$$

що відрізняються від рівняння (6) і одне від одного лише правими частинами F_k

$$F_k = \frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi} \int_L \frac{v_k(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}\,(t-t_0)}; \quad v_{p+1} = -f \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ p+1), \tag{15}$$

і до визначення α_k з умов (7) при $C(t) = -\alpha_0$. Умови (7) і (4) дають алгебраїчну систему відносно α_k

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = 0, \qquad \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \gamma_{jk} = A_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ p), \tag{16}$$

коефіцієнти γ_{jk} якої лінійно виражаються через $M^{(k)}$, а A_j через $M^{(p+1)}$. Оскільки рівняння (10) еквівалентне своїй дійсній частині, то легко показати, що $M^{(k)}$ можна знайти з рівнянь:

$$M^{(k)} - \int_L M^{(k)} N \, ds_1 = F_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ p+1),$$

$$N(s_1, s_0) = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\prod_{i=1}^{2p} r_i(s_0)} \int_L \frac{\sin \alpha(s, s_1) \sin \psi(s_0, s)}{r(s, s_1)\, r(s_0, s)} \frac{ds}{\sqrt{\prod_{i=1}^{2p} r_i(s)}},$$

$$F_k(s_0) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\sum_{i=1}^{2p} r_i(s_0)} \int_L \frac{\cos \psi(s_0, s)}{r(s_0, s)} \frac{v_k(s)\, ds}{\sqrt{\prod_{i=1}^{2p} r_i(s)}}, \tag{17}$$

де $\psi(s_0, s) = \varphi(s_0) - \varphi(s) + \alpha(s_0, s)$.

Розв'язавши рівняння (17), можна знайти всі α_k із системи (16), але це практично зробити не легко. Проте є можливість знаходити α_k, знаючи $M^{(k)}$, безпосередньо з граничної умови (3) при $C_k = -\alpha_0$ і з умови (4). Це можна довести так. Оскільки рівняння (6) при довільних α_k і $C_k = -\alpha_0$ і при M, взятому у вигляді (13), не буде еквівалентне рівнянню (5), то одержана з (5) рівність

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \left[\int_L \frac{M^{(k)} \cos \alpha}{r} ds + v_k \right] + \alpha_0 = f - \int_L \frac{M^{(p+1)} \cos \alpha}{r} ds. \tag{18}$$

не може бути виконана. Якщо ж α_k є розв'язком системи (16), а $M^{(k)}$ є розв'язком рівнянь (17), то рівність (18) перетворюється у тотожність. Навпаки, якщо α_k такі, що при всіх $s_0 \in L$ виконується рівність (18), де $M^{(k)}$ є розв'язок рівнянь (17), то тоді умови (16) або (4) і (7) виконуються автоматично. Дійсно, в цьому випадку справедлива рівність (5) (при $C_k = -\alpha_0$) і, значить, умова (7) переходить у рівність

$$\int\limits_L \left[\int\limits_L \frac{M(t_1)\,dt_1}{t_1 - t} \right] \frac{t^{j-1}\,dt}{\sqrt{R(t)}} = 0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ p),$$

яка виконується тотожно, якщо взяти до уваги тотожність (9).

Сталі α_k, α_0 можна визначити, наприклад, задаючи систему точок $s_{0j} \in L_j$ $(j=1,\ 2, \ldots, p)$ в рівнянні (18). При виборі інших точок s_{0j} одержимо нові значення α_k, α_0. Близькість цих нових значень до старих в цілому характеризує точність розв'язку задачі.

На основі сказаного можна зробити важливий висновок. За допомогою формули (13) від рівняння (18) перейдемо до рівняння (5) при $C(t) = -\alpha_0$. Рівняння (5) при $C(t) = -\alpha_0$ буде розв'язуватись єдиним способом, якщо α_k, α_0 задовольнятимуть умови (7) і (4). Оскільки при виконанні (1) ці умови тотожно задовольняються, то невідомі M і α_k, α_0 можна наближено визначити, розв'язуючи чисельно рівняння (5) при $C(t) = -\alpha_0$ відносно M і α_k, α_0. Таким чином, наближений розв'язок задачі Діріхле на площині з щілинами може бути зведений до чисельного розв'язку сингулярного інтегрального рівняння першого роду (5) при $C(t) = -\alpha_0$.

Практична перевірка правильності наведених міркувань була зроблена на розрахунку плоского конденсатора (дві щілини). Значення потенціалу в окремих точках поля обчислювалися на ЕОМ з точністю до чотирьох знаків при використанні спочатку рівнянь (17) і (16), потім — рівнянь (17) і (18) і нарешті — рівняння (5) при $C(t) = -\alpha_0$. Одержані результати порівнювались із значеннями потенціалу, які були обчислені з точністю до шести знаків методом конформного відображення на кільце. Виявилося, що значення α_k, α_0 у всіх варіантах збігалися з точністю до чотирьох знаків. Трудомісткість чисельного розрахунку поля за рівнянням (5) природно була найменшою.

Наведемо ще деякі зауваження, важливі при чисельному розв'язанні рівняння (5).

1) Як було показано в роботі [2], диференціальні властивості густини M описуються формулою (при $\sigma(t) = 1$)

$$M_k(x) = \sqrt{1 - x^2}\, M_{1k}(x) + \alpha_k [2 \arccos x - \pi (1 - x)]\, d_k, \qquad (19)$$

де $M_{1k} \in C^{(n-2,\lambda)}$ і $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $s = \frac{1}{2}\,[S_k + s_k + (S_k - s_k)\,x]$, $d_k = \frac{1}{2}\,(S_k + s_k)$.

2) Можна показати, що густині M властива симетрія, якщо L і f мають симетричні властивості.

3) Розв'язок рівняння (5) буде стійким по відношенню до таких малих збурень $\delta_f(t)$, $\delta_{v_k}(t)$ функцій f і v_k, які можна записати у вигляді $\delta_f = \varphi(\delta)\,\psi(\delta, t)$; $\delta_{v_k} = \varphi_k(\delta)\,\psi_k(\delta, t)$, де δ — деякий параметр, причому $\varphi(\delta) \to 0$, $\varphi_k(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, а $\psi(\delta, t)$, $\psi_k(\delta, t) \in H$ по t рівномірно відносно δ. Це випливає з стійкості рівнянь Фредгольма другого роду (14) відносно малих збурень правих частин F_k і властивостей інтеграла типу Коші, якими є функції F_k.

ЛІТЕРАТУРА.

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962, 2-е изд.

2. Старокадомский Л. А. Решение задачи Дирихле для плоскости со щелями методом сингулярных интегральных уравнений. Первая республиканская матем. конференция молодых исследователей, вып. 1, Изд-во АН УССР, стр. 606—616.