УДК 517.544

Л. О. СТАРОКАДОМСЬКИЙ

ПРО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО РОДУ З ЛОГАРИФМІЧНИМ ЯДРОМ І ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ НА ПЛОЩИНІ З ЩІЛИНОЮ

Дослідженню інтегральних рівнянь першого роду з логарифмічною особливістю в ядрі присвячено ряд робіт (див., наприклад, [1—6]).

Ця стаття присвячена дослідженню рівняння

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\mu(t)\ln|t-x|\,dt=f(x)-\alpha_0; \qquad |x|\leqslant a \tag{1}$$

(де α_0 — деяка константа) і зв'язаної з ним задачі Діріхле на площині $z=x+iy$ з розрізом $[-a, a]$ по осі x:

$$\Delta U=0; \qquad U_L^{\pm}=f; \qquad U(\infty)\sim 0(\ln|z|), \tag{2}$$

де індекси плюс та мінус вказують на належність відповідно до лівого чи правого околу точки $t\in L$ при вибраному напрямі на L від $-a$ до a.

Для випадку, коли права частина (1) задається лише з точністю до сталої, ці задачі розглядалися Н. І. Мусхелішвілі [3].

Описане в нашій статті дослідження проводилося методом з роботи [4], відмінним від методу з роботи [3], як при задаванні (1) з точністю до сталої, так і при цілком визначеній правій частині (1), тобто при $\alpha_0=0$. Таке розв'язання, на нашу думку, є більш точним порівняно з розв'язанням, виконаним І. Я. Штаєрманом (див. [5]), яке не може бути визнане задовільним з математичної точки зору [1].

Переходимо до розв'язання рівняння (1). Згідно із способом, описаним в [4], зробимо заміну

$$\mu(t)=\overline{\mu}(t)+\alpha_1\sigma(t). \tag{3}$$

Функція $\overline{\mu}$ така, що $\overline{M}(\pm a)=0$, де $\overline{M}(t)=\int_{-a}^{t}\overline{\mu}(t)dt$, $\sigma(t)$ — довільно вибрана функція, але така, що $e=\int_{-a}^{a}\sigma(t)dt\neq 0$.

Очевидно, що $P\equiv\int_{-a}^{a}\mu(t)dt=\alpha_1 e\neq 0$, якщо $\alpha_1\neq 0$, α_1 — якась поки що невизначена стала. Інтегруючи по частинах ліву частину (1), приходимо до сингулярного інтегрального рівняння, еквівалентного рівнянню (1)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\overline{M}\,dt}{t-x}=f(x)-\frac{\alpha_1}{\pi}\int_{-a}^{a}\sigma(t)\ln|t-x|\,dt-\alpha_0. \tag{4}$$

---

[1] Так, в [5, гл. I] будується гармонічна всередині одиничного кола функція по граничній умові і умові перетворювання в нуль цієї функції в центрі кола, що взагалі неможливо. На цьому базується розв'язання рівняння (1). Крім того, формули (115) і (116) [5, гл. I] втрачають смисл при $a=2$.

При умові

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\left[\alpha_0+\frac{\alpha_1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\sigma(t_1)\ln|t_1-t|\,dt_1\right]\frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}} \tag{5}$$

рівняння (4) має розв'язок

$$\overline{M}(x)=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}\,(t-x)}+$$

$$+\frac{\alpha_1\sqrt{a^2-x^2}}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\sigma(t_1)\,dt_1\int\limits_{-a}^{a}\frac{\ln|t_1-t|\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}\,(t-x)}. \tag{6}$$

Із рівності (5) при врахуванні $P=\alpha_1 e$, випливає

$$\pi\alpha_0-P\ln\frac{2}{a}=\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}}, \tag{7}$$

оскільки коефіцієнт при α_1 в рівності (5) є інтеграл, який дорівнює сталій $-\frac{e}{\pi}\ln\frac{2}{a}$. Таким чином, лише при $a=2$ не можна брати $\alpha_0=0$ при довільному задаванні f, оскільки тоді рівняння (1) буде нерозв'язним для f таких, що $\int\limits_{-2}^{2}\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{4-b^2}}\neq 0$. Це, очевидно, пов'язано з тим, що однорідне рівняння (1) при $a=2$ має нетривіальне розв'язання $\mu=\frac{\mathrm{const}}{\sqrt{4-t^2}}$.

Якщо ж $a\neq 2$, то, задаючи певним чином одну із сталих α_0, P, ми визначимо другу із рівності (7). Якщо покласти $\alpha_0=0$, то розв'язання рівняння (1) при цілком визначеній правій частині f одержимо за формулою (3), де $\alpha_1=\frac{P}{e}=-\frac{1}{e\ln\frac{2}{a}}\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}}$.

Крім того, якщо задати значення P, то за формулою (3) одержимо розв'язок рівняння (1) при будь-яких значеннях a, причому в цьому випадку стала буде цілком визначена рівністю (7). В контактних задачах звичайно задаємо P (стискаюча сила) і шукаємо розв'язок, що задовольняє рівняння (1) лише з точністю до сталої.

Перетворимо тепер розв'язок (6). Покажемо спочатку, що

$$I(t_1,\ x)\equiv\int\limits_{-a}^{a}\frac{\ln|t_1-t|\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}\,(t-x)}=\pi\frac{\arccos\frac{x}{a}-\pi\eta(t_1-x)}{\sqrt{a^2-x^2}}; \tag{8}$$

$$\eta(t_1-x)=\begin{cases}0, & x>t_1,\\ 1, & x<t_1.\end{cases}$$

Зробимо заміну $t_1=av_1$, $t=av$, $x=aw$, тоді $I=\frac{1}{a}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\ln|v_1-v|\,dv}{\sqrt{1-v^2}\,(v-w)}$.

Розглянемо задачу Шварца для функції $\ln(z-\xi_0)+i\alpha$, де $\xi_0=e^{i\theta_0}$, α — довільна стала [1].

Ця функція є аналітичною всередині одиничного кола, якщо розріз від точки ξ_0 до ∞ буде проходити ззовні кола. Позначимо $\gamma(\Theta, \Theta_0) = \arg \ln(\xi_1 - \xi_0)$, $\xi_1 = e^{i\Theta_1}$ і, беручи до уваги, що $\gamma(\Theta_1, \Theta_0) = \frac{1}{2}(\Theta_0 + \Theta_1 + \pi)$ при $\Theta_0 > \Theta_1$ і $\gamma(\Theta_1, \Theta_0) = \frac{1}{2}(\Theta_0 + \Theta_1 + 3\pi)$ при $\Theta_0 < \Theta_1$, а також зробивши заміну $v = \cos\Theta$, $v_1 = \cos\Theta_1$, $w = \cos\Theta_0$, дістаємо

$$I = \frac{1}{a \sin\Theta_0}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln 2\left|\sin\frac{\Theta - \Theta_1}{2}\right| \operatorname{ctg}\frac{\Theta + \Theta_0}{2}\, d\Theta - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln 2\left|\sin\frac{\Theta - \Theta_1}{2}\right| \operatorname{ctg}\frac{\Theta - \Theta_0}{2}\, d\Theta\right] =$$

$$= \frac{\pi}{a \sin\Theta_0}\begin{cases} \Theta_0 - \pi, & \Theta_0 > \Theta_1 \quad (x < t_1); \\ \Theta_0, & \Theta_0 < \Theta_1 \quad (x > t_1). \end{cases}$$

Замінюючи $\Theta_0 = \arccos\frac{x}{a}$, одержуємо формулу (8). Після підстановки її в рівність (6) дістанемо вираз

$$\overline{M}(x) = \frac{\alpha_1}{\pi}\left[e \arccos\frac{x}{a} - e(x)\right] - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{f(t)\, dt}{\sqrt{a^2 - t^2}\,(t - x)}, \tag{9}$$

де $e(x) = \pi\int_x^a \sigma(t)\, dt$.

Вибираючи різні функції $\sigma(t)$, знаходимо різні форми розв'язку $\overline{M}$. Приймаючи, наприклад, що $\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}}$, маємо $e = \pi$ і

$$\overline{M}(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{f(t)\, dt}{\sqrt{a^2 - t^2}\,(t - x)}, \tag{10}$$

звідки дістанемо такий розв'язок рівняння (1):

$$\mu(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{f(t)\, dt}{\sqrt{a^2 - t^2}\,(t - x)}\right] + \frac{\pi}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}. \tag{11}$$

При використанні формули інтегрування по частинах і формули

$$\sqrt{a^2 - x^2}\int_{-a}^{t}\frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}\,(t - x)} = -\ln\left|\frac{a - xt + \sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{a^2 - t^2}}{a(t - x)}\right|$$

можемо також дістати

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}\left[P + \int_{-a}^{a}\frac{f'(t)\sqrt{a^2 - t^2}}{t - x}\, dt\right]. \tag{12}$$

Ця формула співпадає $\left(\text{при заміні } f \text{ на } -\frac{1}{\pi}f\right)$ з розв'язком, даним І. Я. Штаєрманом для рівняння $\int_{-a}^{a} \mu \ln \frac{1}{|t-x|}\, dt = f$, якщо вважати, що $a \neq 2$, і покласти $\alpha_0 = 0$. Як було відзначено раніше, величина $P = \alpha_1 \pi$ при цьому вона не може бути заданою, а повинна визначатися рівністю (7).

Перейдемо тепер до розгляду задачі Діріхле (2). Запишемо функцію U у вигляді логарифмічного потенціалу $v = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \mu(t) \ln|t-z|\, dt$, який веде себе на безмежності, як $\frac{1}{\pi} P \ln|z|$.

На основі попереднього можемо висловити такі твердження. Дати розв'язок задачі Діріхле (2) лише у вигляді логарифмічного потенціалу можна завжди, крім випадку $a=2$. Стала P при цьому не може бути заданою заздалегідь, а визначається з рівності (7) при $\alpha_0 = 0$. Це означає, що будь-яка гармонічна на площині з розрізом L функція з логарифмічним зростанням на безмежності може бути зображена логарифмічним потенціалом, якщо $a \neq 2$ і $U_L^+ = U_L^-$.

Якщо задана поведінка U на безмежності, тобто задане значення P або задана умова обмеженості функції U на безмежності ($P=0$), то розв'язок U завжди може бути зображений у вигляді суми $U = v + \alpha_0$. Інакше кажучи, при заданій поведінці на безмежності будь-яка гармонічна на площині з розрізом L функція може бути зображена у вигляді суми логарифмічного потенціалу і деякої цілком визначеної сталої α_0, що описується рівністю (7).

ЛІТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1964, 2-е изд.
2. Дмитриев В. И., Захаров В. Е. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма первого рода. В сб.: «Вычислительные методы и программирование», в. 10. Изд-во Московского ун-та, М., 1968.
3. Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, 1937, М., 2-е изд.
4. Старокадомський Л. О. Потенціал простого шару та інтегральне рівняння першого роду з логарифмічною особливістю. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-матем., вип. 3. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1967.
5. Штаерман И. Я. Контактные задачи теории упругости. М.—Л., 1949.
6. Чумаков Ф. В. Интегральные уравнения с логарифмическим ядром. «Дифференциальные уравнения», 1968, т. 4, № 2.

УДК 517.9:536.2

Б. М. КОРДУБА

ОДНА МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ ПРЯМИХ

Метод прямих [1—2], [4—5] успішно використовується для розв'язку першої крайової задачі (задачі Діріхле) для рівнянь Лапласа і Пуассона у випадку прямокутних областей або областей, границя яких складається з двох паралельних прямих. Якщо розглядувана область не є такою, то доводиться мати справу зі знесенням граничних умов, що різко знижує точність розв'язування задачі.

Ця стаття присвячена розгляду однієї модифікації методу прямих, яка для деякої області, відмінної від прямокутника або криволінійної