Ця формула співпадає $\left(\text{при заміні } f \text{ на } -\frac{1}{\pi}f\right)$ з розв'язком, даним І. Я. Штаєрманом для рівняння $\int\limits_{-a}^{a} \mu \ln \frac{1}{|t-x|} \, dt = f$, якщо вважати, що $a \neq 2$, і покласти $\alpha_0 = 0$. Як було відзначено раніше, величина $P = \alpha_1 \pi$ при цьому вона не може бути заданою, а повинна визначатися рівністю (7).

Перейдемо тепер до розгляду задачі Діріхле (2). Запишемо функцію U у вигляді логарифмічного потенціалу $v = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-a}^{a} \mu(t) \ln|t-z| dt$, який веде себе на безмежності, як $\frac{1}{\pi} P \ln|z|$.

На основі попереднього можемо висловити такі твердження. Дати розв'язок задачі Діріхле (2) лише у вигляді логарифмічного потенціалу можна завжди, крім випадку $a = 2$. Стала P при цьому не може бути заданою заздалегідь, а визначається з рівності (7) при $\alpha_0 = 0$. Це означає, що будь-яка гармонічна на площині з розрізом L функція з логарифмічним зростанням на безмежності може бути зображена логарифмічним потенціалом, якщо $a \neq 2$ і $U_L^+ = U_L^-$.

Якщо задана поведінка U на безмежності, тобто задане значення P або задана умова обмеженості функції U на безмежності ($P = 0$), то розв'язок U завжди може бути зображений у вигляді суми $U = v + \alpha_0$. Інакше кажучи, при заданій поведінці на безмежності будь-яка гармонічна на площині з розрізом L функція може бути зображена у вигляді суми логарифмічного потенціалу і деякої цілком визначеної сталої α_0, що описується рівністю (7).

ЛІТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1964, 2-е изд.
2. Дмитриев В. И., Захаров В. Е. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма первого рода. В сб.: «Вычислительные методы и программирование», в. 10. Изд-во Московского ун-та, М., 1968.
3. Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, 1937, М., 2-е изд.
4. Старокадомський Л. О. Потенціал простого шару та інтегральне рівняння першого роду з логарифмічною особливістю. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-матем., вип. 3. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1967.
5. Штаерман И. Я. Контактные задачи теории упругости. М.—Л., 1949.
6. Чумаков Ф. В. Интегральные уравнения с логарифмическим ядром. «Дифференциальные уравнения», 1968, т. 4, № 2.

УДК 517.9:536.2

Б. М. КОРДУБА

ОДНА МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ ПРЯМИХ

Метод прямих [1—2], [4—5] успішно використовується для розв'язку першої крайової задачі (задачі Діріхле) для рівнянь Лапласа і Пуассона у випадку прямокутних областей або областей, границя яких складається з двох паралельних прямих. Якщо розглядувана область не є такою, то доводиться мати справу зі знесенням граничних умов, що різко знижує точність розв'язування задачі.

Ця стаття присвячена розгляду однієї модифікації методу прямих, яка для деякої області, відмінної від прямокутника або криволінійної трапеції з двома паралельними основами, дає можливість розв'язати задачу Діріхле для рівняння Пуассона без знесення граничних умов.

Розглянемо область D, границя Γ якої складається з двох прямолінійних відрізків AB і CD і довільних гладких ліній AC і BD (рис. 1). Для спрощення будемо вважати, що AB і CD перетинаються в початку координат. Нехай φ_0 і α — кути, утворювані прямими AB і CD з додатним напрямом осі Ox відповідно.

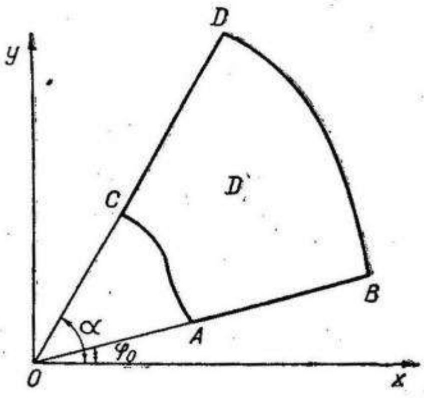

Рис. 1.

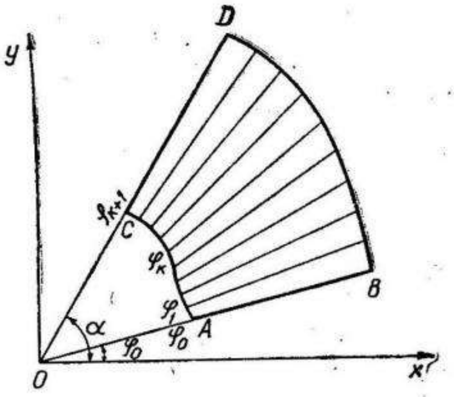

Рис. 2.

Необхідно знайти функцію $U(x, y)$, що задовольняє в області D рівнянню Пуассона

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y), \tag{1}$$

а на границі Γ — заданій граничній умові

$$U|_\Gamma = U_\Gamma(x, y). \tag{2}$$

Для розв'язку задачі перейдемо до змінних σ і φ, які назвемо логарифмополярними координатами, що зв'язані з декартовими координатами формулами

$$x = e^\sigma \cos\varphi, \; y = e^\sigma \sin\varphi. \tag{3}$$

Звідси

$$\sigma = \ln\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}. \tag{4}$$

Рівняння (1) в нових координатах буде таким:

$$\frac{\partial^2 U(\sigma, \varphi)}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 U(\sigma, \varphi)}{\partial \varphi^2} = q(\sigma, \varphi), \tag{5}$$

де

$$q(\sigma, \varphi) = e^{2\sigma} f(e^\sigma \cos\varphi, \; e^\sigma \sin\varphi).$$

Граничну умову (2) перепишемо у вигляді

$$U|_\Gamma = U_\gamma(\sigma, \varphi). \tag{6}$$

Для розв'язку задачі (5)—(6) замінимо рівняння (5) наближеною системою звичайних диференціальних рівнянь для функцій

$$U_k(\sigma) = U(\sigma, \varphi_k). \tag{7}$$

При цьому розіб'ємо кут $\alpha-\varphi_0$ на n рівних частин (рис. 2) і виберемо $h=\Delta\varphi=\frac{\alpha-\varphi_0}{n+1}$. Тоді $\varphi_k=\varphi_0+k\Delta\varphi$ $(k=1, 2\dots, n)$ і $\alpha=\varphi_0+(n+1)\Delta\varphi$. Таким чином, рівняння (5) на кожній прямій φ_k набирає вигляду

$$\frac{\partial^2 U(\sigma, \varphi)}{\partial\sigma^2}\bigg|_{\varphi=\varphi_k}+\frac{\partial^2 U(\sigma, \varphi)}{\partial\varphi^2}\bigg|_{\varphi=\varphi_k}=q(\sigma, \varphi)|_{\varphi=\varphi_k} \tag{8}$$

$$(k=1, 2, \dots, n).$$

Заміняючи $\frac{\partial^2 U(\sigma, \varphi)}{\partial\varphi^2}$ через центральні різниці

$$\frac{\partial^2 U(\sigma,\varphi)}{\partial\varphi^2}\bigg|_{\varphi=\varphi_k}\approx\frac{1}{(\Delta\varphi)^2}[U_{k+1}(\sigma)-2U_k(\sigma)+U_{k-1}(\sigma)] \tag{9}$$

рівняння (5) замінимо системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2U_k(\sigma)}{d\sigma^2}+\frac{1}{(\Delta\varphi)^2}[U_{k+1}(\sigma)-2U_k(\sigma)+U_{k-1}(\sigma)]=q_k(\sigma) \tag{10}$$

$$(k=1, 2, \dots, n),$$

де

$$q_k(\sigma)=q(\sigma, \varphi_k).$$

При приєднанні до (10) граничних функцій, одержаних із (6),

$$U_0(\sigma)=U_\gamma(\sigma, \varphi_0),\ U_{n+1}(\sigma)=U_\gamma(\sigma, \varphi_{n+1}) \tag{11}$$

матимемо систему звичайних диференціальних рівнянь, що апроксимує задачу (5)—(6) з точністю $O(h^2)$. Розкладаючи в інтервалі $\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_{n+1}$ функції $U(\sigma, \varphi)$ та U''_φ в ряд Тейлора в околі $\varphi=\varphi_k$ і зберігаючи члени до шостого порядку включно, дістанемо систему рівнянь

$$\frac{5}{6}\frac{d^2U_k(\sigma)}{d\sigma^2}+\frac{1}{12}\left[\frac{d^2U_{k+1}(\sigma)}{d\sigma^2}+\frac{d^2U_{k-1}(\sigma)}{d\sigma^2}\right]+$$
$$+\frac{1}{(\Delta\varphi)^2}[U_{k+1}(\sigma)-2U_k(\sigma)+U_{k-1}(\sigma)]=\frac{5}{6}q_k(\sigma)+$$
$$+\frac{1}{12}[q_{k+1}(\sigma)+q_{k-1}(\sigma)], \qquad (k=1, 2, \dots, n), \tag{10'}$$

яка з приєднаними граничними функціями (7) апроксимує задачу (5)—(6) з точністю до $O(h^4)$. Систему (10)—(11) можна подати у векторній формі

$$\frac{d^2}{d\sigma^2}\vec{U}(\sigma)-\frac{1}{(\Delta\varphi)^2}G_n\vec{U}(\sigma)=\vec{q}(\sigma)+\vec{\omega}(\sigma). \tag{12}$$

Аналогічно (10)—(11) запишемо у вигляді

$$A_n\frac{d}{d\sigma^2}\vec{U}(\sigma)-\frac{1}{(\Delta\varphi)^2}G_n\vec{U}(\sigma)=A_n\vec{q}(\sigma)+\vec{\omega}(\sigma). \tag{12'}$$

Тут

$$\vec{U}(\sigma)=\left\|\begin{matrix}U_1(\sigma)\\ U_2(\sigma)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \\ U_n(\sigma)\end{matrix}\right\|;\quad \vec{q}(\sigma)=\left\|\begin{matrix}q_1(\sigma)\\ q_2(\sigma)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \\ q_n(\sigma)\end{matrix}\right\|;\quad \vec{w}(\sigma)=-\frac{1}{(\Delta\varphi)^2}\left\|\begin{matrix}U_0(\sigma)\\ \left.\begin{matrix}0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\end{matrix}\right\}(n-2)\\ U_{n+1}(\sigma)\end{matrix}\right\|;$$

$$G_n = \left\| \begin{array}{rrrcccr} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 \end{array} \right\|; \qquad A_n = \left\| \begin{array}{ccccccc} \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & & & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & & & & \frac{5}{6} \end{array} \right\|.$$

При застосуванні до рівнянь (12) і (12′) P-трансформації [3], тобто при помноженні їх на P_n зліва, приведемо обидві системи в «розпадні», тобто до виду, коли кожне рівняння буде містити лише одну невідому функцію і інтегруватиметься незалежно від інших рівнянь одержаних систем.

$$\frac{d^2}{d\sigma^2}\vec{V}(\sigma) - \frac{1}{(\Delta\varphi)^2}\Lambda_n\vec{V}(\sigma) = \vec{Q}(\sigma) + \vec{\Omega}(\sigma); \tag{13}$$

$$\left[E_n - \frac{1}{12}\Lambda_n\right]\frac{d_2}{d\sigma^2}\vec{V}(\sigma) - \frac{1}{(\Delta\varphi)^2}\Lambda_n\vec{V}(\sigma) = \left[E_n - \frac{1}{12}\Lambda_n\right]\vec{Q}(\sigma) + \vec{\Omega}(\sigma); \tag{13′}$$

де

$$\vec{V}(\sigma) = P_n\vec{U}(\sigma); \qquad \vec{Q}(\sigma) = P_n\vec{q}(\sigma); \qquad \vec{\Omega}(\sigma) = P_n\vec{\omega}(\sigma), \tag{14}$$

P_n — фундаментальна матриця матриці G_n з елементами

$$P_{ij} = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\sin\frac{ij\pi}{n+1};$$

Λ_n — діагональна матриця, елементи якої — власні значення матриці G_n

$$\lambda_s = 4\sin^2\frac{s\pi}{2(n+1)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{15}$$

Рівняння (13) в розгорнутій формі має вигляд

$$\frac{d^2V_s(\sigma)}{d\sigma^2} - \frac{\lambda_s}{(\Delta\varphi)^2}V_s(\sigma) = Q_s(\sigma) + \Omega_s(\sigma), \tag{16}$$

де

$$Q_s(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{sk\pi}{n+1}q_k(\sigma), \tag{17}$$

$$\Omega_s(\sigma) = -\frac{1}{(\Delta\varphi)^2}\sqrt{\frac{2}{n+1}}\left[U_0(\sigma)\sin\frac{s\pi}{n+1} + U_{n+1}(\sigma)\sin\frac{sn\pi}{n+1}\right] \tag{18}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

Позначимо

$$\frac{\lambda_s}{(\Delta\varphi)^2} = \mu_s^2. \tag{19}$$

У зв'язку з тим, що

$$\mu_s = \frac{2}{\Delta\varphi} \sin \frac{s\pi}{2(n+1)} > 0, \qquad (20)$$

розв'язок відповідного однорідного рівняння (16) має вигляд

$$V_s^{(0)}(\sigma) = C_1^{(s)} e^{\mu_s \sigma} + C_2 e^{-\mu_s \sigma}. \qquad (21)$$

Розв'язок неоднорідного рівняння (16) залежить від правих частин $Q_s(\sigma)$ і $\Omega_s(\sigma)$ і в кожному конкретному випадку може бути знайдений, наприклад, методом варіації довільної сталої.

Рівняння (13′) в розгорнутій формі запишемо як

$$\frac{d^2 V_s(\sigma)}{d\sigma^2} - \frac{12\lambda_s}{(\Delta\varphi)^2 (12 - \lambda_s)} V_s(\sigma) = Q_s(\sigma) + \frac{12}{12 - \lambda_s} \Omega_s(\sigma). \qquad (16')$$

Розв'язок відповідного однорідного рівняння дамо у вигляді (21), де

$$\mu_s = \frac{2\sqrt{3}}{\Delta\varphi} \frac{\sin \frac{s\pi}{2(n+1)}}{\sqrt{3 - \sin^2 \frac{s\pi}{2(n+1)}}} > 0. \qquad (20)$$

Для знаходження функції $\vec{U}(\sigma)$ необхідно ще раз застосувати P-трансформацію. Тоді

$$\vec{U}(\sigma) = P_n \vec{V}(\sigma) \qquad (22)$$

або в розгорнутій формі

$$U_k(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{s=1}^{n} \sin \frac{ks\pi}{n+1} V_s(\sigma). \qquad (23)$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Б. М. Будак, Ф. П. Васильев. Сходимость и оценка погрешности метода прямых для решения некоторых задач фильтрации. В сб. «Численные методы в газовой динамике», 1963, 211—237.

2. В. И. Лededев. Уравнения и сходимость дифференциально-разностного метода. Вестник Московского ун-та, вып. 7, № 10, М., 1955.

3. Г. Н. Положий. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Изд-во Киевского ун-та, Киев, 1962.

4. М. Г. Слободянский. Способ интегрирования уравнения с частными производными и его применение к задачам теории упругости. «Прикладная математика и механика», 1939, 3, вып. 1.

5. В. Н. Фаддеева. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 28, 1949.

УДК 517—512

О. С. КОВАНЬКО

ПРО НАБЛИЖЕННЯ S_p МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ПОЛІНОМАМИ БОХНЕРА—ФЕЙЄРА

Дана стаття присвячена розв'язанню питання про можливість наближення S_p майже періодичних функцій поліномами Бохнера—Фейєра у відповідній метриці.

Нагадаємо деякі символи і відомі положення теорії S_p — майже періодичних функцій.