У зв'язку з тим, що

$$\mu_s = \frac{2}{\Delta\varphi} \sin \frac{s\pi}{2(n+1)} > 0, \qquad (20)$$

розв'язок відповідного однорідного рівняння (16) має вигляд

$$V_s^{(0)}(\sigma) = C_1^{(s)} e^{\mu_s \sigma} + C_2 e^{-\mu_s \sigma}. \qquad (21)$$

Розв'язок неоднорідного рівняння (16) залежить від правих частин $Q_s(\sigma)$ і $\Omega_s(\sigma)$ і в кожному конкретному випадку може бути знайдений, наприклад, методом варіації довільної сталої.

Рівняння (13′) в розгорнутій формі запишемо як

$$\frac{d^2V_s(\sigma)}{d\sigma^2} - \frac{12\lambda_s}{(\Delta\varphi)^2(12-\lambda_s)} V_s(\sigma) = Q_s(\sigma) + \frac{12}{12-\lambda_s} \Omega_s(\sigma). \qquad (16')$$

Розв'язок відповідного однорідного рівняння дамо у вигляді (21), де

$$\mu_s = \frac{2\sqrt{3}}{\Delta\varphi} \frac{\sin \frac{s\pi}{2(n+1)}}{\sqrt{3 - \sin^2 \frac{s\pi}{2(n+1)}}} > 0. \qquad (20)$$

Для знаходження функції $\vec{U}(\sigma)$ необхідно ще раз застосувати P-трансформацію. Тоді

$$\vec{U}(\sigma) = P_n \vec{V}(\sigma) \qquad (22)$$

або в розгорнутій формі

$$U_k(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{s=1}^{n} \sin \frac{ks\pi}{n+1} V_s(\sigma). \qquad (23)$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Б. М. Будак, Ф. П. Васильев. Сходимость и оценка погрешности метода прямых для решения некоторых задач фильтрации. В сб. «Численные методы в газовой динамике», 1963, 211—237.
2. В. И. Лебедев. Уравнения и сходимость дифференциально-разностного метода. Вестник Московского ун-та, вып. 7, № 10, М., 1955.
3. Г. Н. Положий. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Изд-во Киевского ун-та, Киев, 1962.
4. М. Г. Слободянский. Способ интегрирования уравнения с частными производными и его применение к задачам теории упругости. «Прикладная математика и механика», 1939, 3, вып. 1.
5. В. Н. Фаддеева. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 28, 1949.

УДК 517—512

О. С. КОВАНЬКО

ПРО НАБЛИЖЕННЯ S_p МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ПОЛІНОМАМИ БОХНЕРА—ФЕЙЄРА

Дана стаття присвячена розв'язанню питання про можливість наближення S_p майже періодичних функцій поліномами Бохнера—Фейєра у відповідній метриці.

Нагадаємо деякі символи і відомі положення теорії S_p — майже періодичних функцій.

Розглянемо метрику: нехай $\varphi(x) \in L_p$ і $\psi(x) \in L_p$, $(-\infty < x < +\infty)$. Тоді

$$D_{s_p}(\varphi, \psi) = \sup\left\{ \int_x^{x+1} |\varphi(t) - \psi(t)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

Далі введемо «опосередковану функцію Стеклова» для функції (1)

$$f_d(x) = \frac{1}{d} \int_x^{x+d} f(t)\, dt. \tag{2}$$

Означення. Функція $f(x)$, $(-\infty < x < +\infty)$ називається майже періодичною за Степановим (S_p — майже періодичною), якщо, яке б мале не було $\varepsilon > 0$, існує відносно густа множина чисел: $\tau = \tau(\varepsilon)$ (майже періоди), для яких мають місце нерівності

$$D_{s_p}\{f(x+\tau),\ f(x)\} < \varepsilon. \tag{3}$$

Лема 1. Якщо $f(x)$ є майже періодична функція (S_pм, п.), то опосередкована функція є майже періодичною функцією Бора, тобто, яке б мале не було $\varepsilon > 0$, існує відносно густа множина майже періодів $\tau = \tau(\varepsilon)$ таких, що

$$\sup_{(x)} |f_d(x+\tau) - f_d(x)| < \varepsilon, \tag{4}$$

$$\lim_{d \to 0} D_{s_p}(f(x),\ f_d(x)) = 0. \tag{5}$$

Лема 2. Якщо $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ спектр майже періодичної функції $f(x)$, а $A_1, A_2, A_3, \ldots$ відповідні коефіцієнти Фур'є, то $f_d(x)$ має той же спектр: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, а коефіцієнти Фур'є будуть такі:

$$B_k = A_k \cdot \frac{e^{i\lambda_k d} - 1}{i\lambda_k d}.$$

Очевидно, що

$$\lim_{d \to 0} B_k = A_k. \tag{6}$$

Оскільки $f_d(x)$ — майже періодична функція Бора, то можна побудувати рівномірну збіжну послідовність поліномів Бохнера—Фейєра $\sigma_n^d(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, границя якої буде $f_d(x)$.

Загальний вигляд поліномів такий:

$$\sigma_r^d(x) = \sum_{k=1}^{N(n)} r_k^{(n)} \cdot B_k e^{i\lambda_k x}.$$

При цьому $\lim\limits_{n \to \infty} N(o) = \infty$ і $0 < r_k^{(n)} < 1$; $r_k^{(n)}$ залежить лише від спектра $f_d(x)$.

Побудуємо тепер (чисто формально) поліном Бохнера—Фейєра для функції $f(x)$. Очевидно, що він запишеться у вигляді

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{N(n)} r_k^{(n)} A_k e^{i\lambda_k x},$$

оскільки множник $r_k^{(n)}$ однаковий у $f(x)$ і $f_d(x)$.

Із співвідношення (6) очевидно випливає, що

$$\lim_{d\to 0} \sigma_r^d(x)=\sigma_n(x). \tag{7}$$

Вернемося до послідовності $\{\sigma_n^d(x)\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Ця послідовність збігається рівномірно до $f_d(x)$. Тому при $\varepsilon>0$ ми тим більше одержимо нерівність

$$D_{s_p}(f_d, \sigma_n^d)\leq \sup_{(x)}|f_d-\sigma_n^d|<\frac{\varepsilon}{3},$$

коли $n>n_0$, де $n_0>0$ достатньо велике.

Отже, маємо

$$D_{s_p}(f_d, \sigma_n^d)<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{8}$$

Із рівності (5) випливає, що існує таке $d_0>0$, що

$$D_{s_p}(f_d, \sigma_n^d)<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{9}$$

коли $d<d_0$.

Тепер із співвідношень (8) і (9) випливає, що

$$D_{s_p}(f, \sigma_n^d)\leq D_{s_p}(f, f_d)+D_{s_p}(f_d, \sigma_n^d)<\frac{2\varepsilon}{3}.$$

коли $n>n_0$, $d<d_0$.

Отже

$$D_{s_p}(f, \sigma_n^d)<\frac{2\varepsilon}{3}. \tag{10}$$

Зафіксуємо тепер число n, тоді на основі (7) дістанемо

$$D_{s_p}(\sigma_n^d, \sigma_n)<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{11}$$

коли $d<d_0$.

Тепер із співвідношень (10) і (11) знаходимо

$$D_{s_p}(f, \sigma_n)\leq D_{s_p}(f, \sigma_n^d)+D_{s_p}(\sigma_n^d, \sigma_n)<\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Отже

$$D_{s_p}(f, \sigma_n)<\varepsilon. \tag{12}$$

Надамо тепер ε безмежну послідовність значень: $\varepsilon_1>\varepsilon_2>\varepsilon_3 \ldots$ і виберемо відповідну послідовність значень $n(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ так, що будуть виконуватися нерівності

$$D_{s_p}(f, \sigma_{n_j})<\varepsilon_j. \tag{13}$$

Отже, послідовність поліномів Бохнера—Фейєра

$$\sigma_{n_j}(x)=\sum_{1}^{N(n_j)} r_k^{(n_j)}\cdot A_k e^{i\lambda_k x} \qquad (j=1, 2, 3, \ldots)$$

збігається в метриці S_p до $f(x)$.