УДК 518:512.39

Г. Г. ЦЕГЕЛИК

ДО ЛОКАЛІЗАЦІЇ НУЛІВ РЯДІВ ЛОРАНА ЗА ДОПОМОГОЮ ПАРАМЕТРІВ

Розглянемо новий метод локалізації нулів рядів Лорана за допомогою параметрів.

Запишемо ряд Лорана (зокрема, степеневий ряд або многочлен), який збігається в кільці $r<|z|<R$,

$$f(z)=\sum_{\nu=-m}^{n} A_\nu z^{\lambda_\nu} \qquad (m\leqslant\infty,\ n\leqslant\infty), \tag{1}$$

де $A_i\neq 0\,(-m\leqslant i\leqslant n)$; λ_ν — монотонно зростаюча послідовність цілих чисел.

Нехай $\delta_k=\lambda_k-\lambda_{k-1}$ $(-m+1\leqslant k\leqslant n)$ і $\{\alpha_\nu\}(-m\leqslant\nu\leqslant n)$ — довільна послідовність додатних чисел (параметрів), яка задовольняє умові

$$\sum_{\substack{\nu=-m\\ \nu\neq k}}^{n} \alpha_\nu=\alpha_k \qquad (-m<k<n). \tag{2}$$

Покладемо

$$t_k=\sup_{1\leqslant\nu\leqslant k+m}\left(\frac{\alpha_{k-\nu+1}a_{k-\nu}}{\alpha_{k-\nu}a_{k-\nu+1}}\right)^{\frac{1}{\delta_{k-\nu+1}}}, \tag{3}$$

$$T_k=\inf_{1\leqslant\mu\leqslant n-k}\left(\frac{\alpha_{k+\mu}a_{k+\mu-1}}{\alpha_{k+\mu-1}a_{k+\mu}}\right)^{\frac{1}{\delta_{k+\mu}}}, \tag{4}$$

де $a_i=|A_i|\,(-m\leqslant i\leqslant n)$.

Теорема 1. *Якщо існує такий набір параметрів* $\{\alpha_\nu\}$, *який задовольняє умові* (2) і $T_k>t_k$, *то ряд Лорана* (1) *не перетворюється в нуль в кільці*

$$t_k\leqslant|z|\leqslant T_k.$$

Д о в е д е н н я. З (3) і (4) випливає, що

$$\frac{1}{t_k^{\delta_{k-\nu+1}}}\leqslant\frac{\alpha_{k-\nu}a_{k-\nu+1}}{\alpha_{k-\nu+1}a_{k-\nu}} \qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ k+m);$$

$$T_k^{\delta_{k+\mu}}\leqslant\frac{\alpha_{k+\mu}a_{k+\mu-1}}{\alpha_{k+\mu-1}a_{k+\mu}} \qquad (\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ n-k).$$

З останніх нерівностей одержуємо:

$$\frac{1}{t_k^{\lambda_k-\lambda_{k-\nu}}}\leqslant\frac{\alpha_{k-\nu}a_k}{\alpha_k a_{k-\nu}} \qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ k+m);$$

$$T_k^{\lambda_{k+\mu}-\lambda_k}\leqslant\frac{\alpha_{k+\mu}a_k}{\alpha_k a_{k+\mu}} \qquad (\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ n-k);$$

$$\sum_{\nu=1}^{k+m} a_{k-\nu}\,t_k^{\lambda_{k-\nu}-\lambda_k}\leqslant\frac{a_k}{\alpha_k}\sum_{\nu=1}^{k+m}\alpha_{k-\nu};$$

$$\sum_{\mu=1}^{n-k} a_{k+\mu}\,T_k^{\lambda_{k+\mu}-\lambda_k}\leqslant\frac{a_k}{\alpha_k}\sum_{\mu=1}^{n-k}\alpha_{k+\mu}.$$

Враховуючи умову (2), дістанемо

$$\sum_{\nu=1}^{k+m} a_{k-\nu} t_k^{\lambda_{k-\nu}-\lambda_k} + \sum_{\mu=1}^{n-k} a_{k+\mu} T_k^{\lambda_{k+\mu}-\lambda_k} \leqslant a_k.$$

Легко бачити, що для будь-якого $\varrho\,(t_k \leqslant \varrho \leqslant T_k)$ при $T_k > t_k$ має місце нерівність

$$\sum_{\nu=1}^{k+m} a_{k-\nu}\, \rho^{\lambda_{k-\nu}-\lambda_k} + \sum_{\mu=1}^{n-k} a_{k+\mu}\, \rho^{\lambda_{k+\mu}-\lambda_k} < a_k.$$

З останньої нерівності при використанні принципу аргументу випливає справедливість теореми 1.

Теорема 2. *Якщо ряд Лорана* (1) *не перетворюється в нуль в кільцях* $t_{k_1} \leqslant |z| \leqslant T_{k_1}$, $t_{k_2} \leqslant |z| \leqslant T_{k_2}$, $k_2 > k_1$, *то він має точно* $h = \lambda_{k_2} - \lambda_k$ *нулів в кільці* $T_{k_1} < |z| < t_{k_2}$.

Доведення теореми 2 випливає з принципу аргументу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Цегелик Г. Г. Параметрическая локализация по модулям нулей полиномов и рядов Лорана. «Известия вузов. Математика», 1967, № 12.

УДК 517.512

У. А. МИШКОВЕЦЬ

СУМУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ РЯДІВ ФУР'Є МЕТОДОМ ПУАССОНА—АБЕЛЯ

Відомий метод Бохнера [1] сумування рядів Фур'є рівномірних майже періодичних (м. п.) функцій зовнішньо нагадує класичний метод Фейєра сумування рядів Фур'є періодичних функцій. Показники многочлена Бохнера беруться з показників Фур'є рівномірної м. п. функції, а коефіцієнтами служать коефіцієнти Фур'є, помножені на деякі числа $\rho_k^{(m)}$ $(0 < \rho_k^{(m)} < 1)$. На відміну від методу Фейєра метод Бохнера—Фейєра практично незручний. Попередньо вибираються базісні показники Фур'є. Представлення показників Фур'є через лінійну комбінацію базісних і визначення множників збіжності $\rho_k^{(m)}$ — досить громіздка робота.

Наведений Фавардом [1] метод сумування рядів Фур'є рівномірних м. п. функцій нагадує комбінацію методу Бохнера—Фейєра з методом Пуассона—Абеля. Показники Фур'є вибираються аналогічно, а множники збіжності виражаються через добуток множників виду $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^{r_k}$, де $m > 1$, r_k — цілі додатні числа.

Нижче буде доведено (теорема 4), що класичним методом Пуассона—Абеля сумуються ряди Фур'є рівномірних м. п. функцій. З нашого доведення також випливає, що сумування цим методом рядів Фур'є неперервних періодичних функцій є окремий випадок.

Сформулюємо три теореми, на яких грунтується доведення теореми 4. Ці теореми доведені в нашій роботі [2].

Теорема 1. *Для майже періодичної функції Бора* $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}$ *справедлива нерівність* $\sup_x |f(x)| < C_f \max |A_n|$, *де* $C_f > 3$ *деяке число.*

Правило визначення числа C_f наводиться.