Враховуючи умову (2), дістанемо

$$\sum_{\nu=1}^{k+m} a_{k-\nu} t_k^{\lambda_{k-\nu}-\lambda_k} + \sum_{\mu=1}^{n-k} a_{k+\mu} T_k^{\lambda_{k+\mu}-\lambda_k} \leqslant a_k.$$

Легко бачити, що для будь-якого $\varrho\,(t_k \leqslant \varrho \leqslant T_k)$ при $T_k > t_k$ має місце нерівність

$$\sum_{\nu=1}^{k+m} a_{k-\nu} \rho^{\lambda_{k-\nu}-\lambda_k} + \sum_{\mu=1}^{n-k} a_{k+\mu} \rho^{\lambda_{k+\mu}-\lambda_k} < a_k.$$

З останньої нерівності при використанні принципу аргументу випливає справедливість теореми 1.

Теорема 2. *Якщо ряд Лорана* (1) *не перетворюється в нуль в кільцях* $t_{k_1} \leqslant |z| \leqslant T_{k_1}$, $t_{k_2} \leqslant |z| \leqslant T_{k_2}$, $k_2 > k_1$, *то він має точно* $h = \lambda_{k_2} - \lambda_k$ *нулів в кільці* $T_{k_1} < |z| < t_{k_2}$.

Доведення теореми 2 випливає з принципу аргументу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Цегелик Г. Г. Параметрическая локализация по модулям нулей полиномов и рядов Лорана. «Известия вузов. Математика», 1967, № 12.

УДК 517.512

У. А. МИШКОВЕЦЬ

СУМУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ РЯДІВ ФУР'Є МЕТОДОМ ПУАССОНА—АБЕЛЯ

Відомий метод Бохнера [1] сумування рядів Фур'є рівномірних майже періодичних (м. п.) функцій зовнішньо нагадує класичний метод Фейєра сумування рядів Фур'є періодичних функцій. Показники многочлена Бохнера беруться з показників Фур'є рівномірної м. п. функції, а коефіцієнтами служать коефіцієнти Фур'є, помножені на деякі числа $\rho_k^{(m)}$ $(0 < \rho_k^{(m)} < 1)$. На відміну від методу Фейєра метод Бохнера—Фейєра практично незручний. Попередньо вибираються базісні показники Фур'є. Представлення показників Фур'є через лінійну комбінацію базісних і визначення множників збіжності $\rho_k^{(m)}$ — досить громіздка робота.

Наведений Фавардом [1] метод сумування рядів Фур'є рівномірних м. п. функцій нагадує комбінацію методу Бохнера—Фейєра з методом Пуассона—Абеля. Показники Фур'є вибираються аналогічно, а множники збіжності виражаються через добуток множників виду $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^{r_k}$, де $m > 1$, r_k — цілі додатні числа.

Нижче буде доведено (теорема 4), що класичним методом Пуассона—Абеля сумуються ряди Фур'є рівномірних м. п. функцій. З нашого доведення також випливає, що сумування цим методом рядів Фур'є неперервних періодичних функцій є окремий випадок.

Сформулюємо три теореми, на яких грунтується доведення теореми 4. Ці теореми доведені в нашій роботі [2].

Теорема 1. *Для майже періодичної функції Бора* $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}$ *справедлива нерівність* $\sup_x |f(x)| < C_f \max |A_n|$, *де* $C_f > 3$ *деяке число.*

Правило визначення числа C_f наводиться.

Теорема 2. *Для компактної (в смислі рівномірної збіжності) множини майже періодичних функцій Бора $f_n(x)$ $(n=1, 2, \dots)$ справедлива нерівність $3 < C_{f_n} < C$, де C — абсолютна стала.*

Теорема 3. *Умова $C_{r_n} < C$, де C — абсолютна стала, $r_n(x)=f(x)-S_n(x)$, $S_n(x)$ — відрізок ряду Фур'є, є необхідна і достатня для рівномірної збіжності ряду Фур'є майже періодичної функції Бора $f(x)$.*

Теорема 4. *Якщо $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}$ є майже періодична функція Бора, то*

$$\lim_{\rho\to 1} \sup_x |f(x)-f(\rho, x)|=0, \tag{1}$$

де $f(\rho, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n A_n e^{i\lambda_n x}$; $0<\rho<1$.

Доведення. Ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n A_n e^{i\lambda_n x}$ збігаються рівномірно. Оскільки $|A_n| < K$, то геометрична прогресія $K \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n$ є мажорантою. Тому функції $f(\varrho, x)$ є майже періодичні функції Бора.

З теореми 1 випливає, що

$$\sup_x |f(x)-f(\rho, x)| < C_{f(\rho)} \max_n |A_n(1-\rho^n)|. \tag{2}$$

Позначимо через $S_n(\varrho, x) = \sum_{n=1}^{n} \rho^n A_n e^{i\lambda_n x}$ відрізки рядів Фур'є функцій $f(\varrho, x)$.

Напишемо для функцій $r_n(\varrho, x) = f(\varrho, x) - S_n(\varrho, x)$ нерівність, аналогічну нерівності (2),

$$\sup_x |r_n(\rho, x) < C_{r_n}(\rho) \max_k | A_{n+k}\rho^{n+k}|. \tag{3}$$

За теоремою 3 умова $C_{r_n(\rho)} < C_1$, де C_1 — абсолютна стала, є необхідна і достатня для рівномірної збіжності рядів Фур'є майже періодичних функцій Бора $f(\varrho, x)$. Оскільки їх ряди Фур'є $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n A_n e^{i\lambda_n x}$ є рівномірно збіжні, то

$$C_{r_n(\rho)} < C_1; \qquad 0<\rho<1. \tag{4}$$

З нерівностей (3) і (4) одержуємо

$$\sup_x |r_n(\rho, x)| < C_1 \max_k | A_{n+k}\rho^{n+k}|. \tag{5}$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$, то з нерівності (5) випливає, що функції $r_n(\varrho, x)$ рівномірно по x $(-\infty < x < \infty)$ для фіксованого ϱ $(0<\varrho<1)$ прямують до нуля при $n \to \infty$. Це означає, що множина майже періодичних функцій $r_n(\varrho, x)$ компактна (в смислі рівномірної збіжності). З компактності функцій $r_n(\varrho, x)$ випливає компактність функцій $f(\varrho, x)$ $(0<\varrho<1)$. На основі теореми 2 стверджуємо, що

$$C_{f(\rho)} < C, \tag{6}$$

де C — абсолютна стала.

Оскільки $\lim_{\rho\to 1} \varrho^n A_n = A_n$, то з теореми єдності і конструкції величин $C_{f(\rho)}$ випливає, що

$$\lim_{\rho\to 1} C_{f(\rho)} = C_{f(1)} = C_f. \tag{7}$$

З нерівності (6) і граничної рівності (7) одержуємо, що для всіх ϱ $(0<\varrho\leqslant 1)$ справедлива нерівність

$$C_{f(\varrho)}<C, \tag{8}$$

де C — абсолютна стала.

З нерівностей (2) і (8) дістаємо

$$\sup_x |f(x)-f(\rho, x)|<C \max_n |A_n (1-\rho^n)|. \tag{9}$$

Звідси випливає гранична рівність (1). Теорема доведена.

Зауваження. В сумуванні рядів Фур'є методом Пуассона—Абеля доцільно розмістити коефіцієнти Фур'є в порядку спадання їх модулів.

Зокрема, з нерівності

$$|f(x)-S_n(\varrho, x)| \leqslant |f(x)-f(\varrho, x)| + |f(\varrho, x)-S_n(\varrho, x)|$$

одержуємо

$$\sup_x |f(x)-S_n(\varrho, x)| < \varepsilon$$

при $n>N_\varepsilon$ і $0<1-\varrho<\delta_\varepsilon$.

Результати теореми 4 переносяться на майже періодичні функції Левітана [3, 4]. Нерівність, аналогічна нерівності (9), запишеться так:

$$\sup_{|x|\leqslant L} | f(x) - f(\rho, x)|<C \max_n |A_n (1-\rho^n)|,$$

де C — абсолютна стала, $L>0$ — скінченне число. Звідси одержуємо, що

$$\lim_{\rho\to 1} \sup_{|x|\leqslant L} |f(x)-f(\rho, x)|=0.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Favard J. Leçons sur les fonctions presque-periodiques, Paris, 1933, стор. 52—59.
2. Мишковець У. А. Про рівномірну збіжність рядів Фур'є майже періодичних функцій Бора. ДАН УРСР, № 12, 1968.
3. Левитан Б. М. Новое обобщение почти периодических функций Бора. Записки науч.-исслед. ин-та матем. и мех. и Харьк. матем. общества, т. 15, с. 4, вып. 2, 1938.
4. Марченко В. А. Методы суммирования обобщенных рядов Фурье. Записки науч.-исслед. ин-та матем. и мех. и Харьк. матем. общества, т. 20, с. 4, 1950.

УДК 513.491

Г. Л. БУЙМОЛА

ДО ПИТАННЯ ПРО ТОЧНІСТЬ ГРАФІЧНИХ ОПЕРАЦІЙ

Обмежену певним контуром частину евклідової площини з основними геометричними елементами в ній, де кожній точці A_i' множини E' евклідових точок ставиться у взаємно однозначну відповідність круг A_i сталого достатньо малого радіуса ω_0 з центром в цій точці, називаємо графічною площиною, а кожен такий круг зокрема — графічною точкою.

Крім графічних точок, в графічній площині розглядаються графічні лінії (пряма, коло) як геометричні місця графічних точок [1].

Ми припускаємо, що геометричні побудови в графічній площині проводяться за допомогою циркуля, односторонньої лінійки і точкографа.