З нерівності (6) і граничної рівності (7) одержуємо, що для всіх ϱ $(0<\varrho\leqslant 1)$ справедлива нерівність

$$C_{f(\varrho)}<C, \tag{8}$$

де C — абсолютна стала.

З нерівностей (2) і (8) дістаємо

$$\sup_x |f(x)-f(\rho,x)|<C\max_n |A_n(1-\rho^n)|. \tag{9}$$

Звідси випливає гранична рівність (1). Теорема доведена.

Зауваження. В сумуванні рядів Фур'є методом Пуассона—Абеля доцільно розмістити коефіцієнти Фур'є в порядку спадання їх модулів.

Зокрема, з нерівності

$$|f(x)-S_n(\varrho,x)|\leqslant|f(x)-f(\varrho,x)|+|f(\varrho,x)-S_n(\varrho,x)|$$

одержуємо

$$\sup_x |f(x)-S_n(\varrho,x)|<\varepsilon$$

при $n>N_\varepsilon$ і $0<1-\varrho<\delta_\varepsilon$.

Результати теореми 4 переносяться на майже періодичні функції Левітана [3, 4]. Нерівність, аналогічна нерівності (9), запишеться так:

$$\sup_{|x|\leqslant L}|f(x)-f(\rho,x)|<C\max_n|A_n(1-\rho^n)|,$$

де C — абсолютна стала, $L>0$ — скінченне число. Звідси одержуємо, що

$$\lim_{\rho\to 1}\sup_{|x|\leqslant L}|f(x)-f(\rho,x)|=0.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Favard J. Leçons sur les fonctions presque-periodiques, Paris, 1933, стор. 52—59.
2. Мишковець У. А. Про рівномірну збіжність рядів Фур'є майже періодичних функцій Бора. ДАН УРСР, № 12, 1968.
3. Левитан Б. М. Новое обобщение почти периодических функций Бора. Записки науч.-исслед. ин-та матем. и мех. и Харьк. матем. общества, т. 15, с. 4, вып. 2, 1938.
4. Марченко В. А. Методы суммирования обобщенных рядов Фурье. Записки науч.-исслед. ин-та матем. и мех. и Харьк. матем. общества, т. 20, с. 4, 1950.

УДК 513.491

Г. Л. БУЙМОЛА

ДО ПИТАННЯ ПРО ТОЧНІСТЬ ГРАФІЧНИХ ОПЕРАЦІЙ

Обмежену певним контуром частину евклідової площини з основними геометричними елементами в ній, де кожній точці A_i' множини E' евклідових точок ставиться у взаємно однозначну відповідність круг A_i сталого достатньо малого радіуса ω_0 з центром в цій точці, називаємо графічною площиною, а кожен такий круг зокрема — графічною точкою.

Крім графічних точок, в графічній площині розглядаються графічні лінії (пряма, коло) як геометричні місця графічних точок [1].

Ми припускаємо, що геометричні побудови в графічній площині проводяться за допомогою циркуля, односторонньої лінійки і точкографа.

Під точкографом розуміємо інструмент, за допомогою якого фіксуються (наносяться) графічні точки в графічній площині, — олівець, перо, вістря ніжки циркуля і т. п.

Точкографом ми можемо виконувати такі графічні операції:

1) Фіксування довільних графічних точок в графічній площині, символ $Op(c_0)$.

2) Встановлення точкографа в графічну точку графічної площини, задану за допомогою операції c_0. Цю операцію ми будемо називати побудовою інциденції двох точок — $Op(c_1)$.

3) Встановлення точкографа в довільну точку заданої графічної лінії або в точку, задану перетином двох графічних ліній (двох прямих, прямої та кола, двох кіл). Цю операцію будемо позначати також символом $Op(c_1)$ і називати інциденціями графічної лінії і графічної точки або інциденцією точки двох графічних ліній.

Даними г. точками в г. площині ми називаємо г. точки, зафіксовані за допомогою точкографа [1].

Г. точки в г. площині можуть бути задані, крім безпосереднього фіксування (нанесення) точкографом $Op(c_0)$, ще перетином двох г. ліній. Але щоб вважати їх даними (побудованими, нанесеними) в г. площині, необхідно в останньому випадку їх зафіксувати точкографом.

Результатом будь-якої геометричної побудови в г. площині ми матимемо сукупність деяких г. точок $A(A')$, зафіксованих в г. площині точкографом з деякою помилкою.

Очевидно, помилки в положенні всіх або частини цих точок визначать точність даної г. побудови.

Помилки, що з'являються в побудові, завжди залежать від багатьох причин. Припускається, що всі ці причини незалежні одна від однієї і мають випадковий характер, тобто виникають незалежні випадкові помилки, що підлягають закону Гаусса, який, як відомо, описується формулою:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2},$$

де $\varphi(\varepsilon)$ — ймовірність помилки ε; h — практична стала, тобто величина, що характеризує точність виміру або точність тієї чи іншої операції інструментом, тобто h — це міра точності інструмента. Цей закон спирається на припущення, що найімовірніше значення вимірюваної величини є середнє арифметичне результатів всіх вимірів і рівні помилки в ту чи іншу сторону рівноймовірні.

Якщо через m позначити середню арифметичну помилку, то, як встановлено,

$$h^2 = \frac{1}{2m^2} \qquad \text{або} \qquad m^2 = \frac{1}{2h^2}.$$

Спочатку розглянемо ті первинні помилки в побудові, які виникають внаслідок елементарних графічних операцій точкографом. Закон розподілу таких помилок вважаємо нормальним.

Нехай в г. площині точка $A(A')$ задана за допомогою точкографа $(Op(c_0))$. Нам треба побудувати інциденцію двох г. точок: заданої г. точки $A(A')$ і точки $A_1(A_1')$, нанесеної точкографом $(Op(c_1))$.

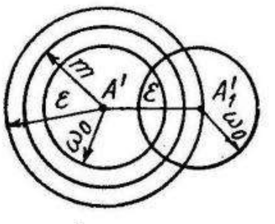
Якщо при операції c_1 евклідові точки $A_1' \equiv A^1$, тобто тотожно співпадають, то г. точки A і A_1 абсолютно інцидентні. Якщо ж точка A_1'

---

[1] Тут і далі ми замість слів *графічна точка, графічна пряма* і т. ін. будемо писати скорочено: *г. точка, г. пряма* і т. п.

не зливається з точкою A', то маємо деяку помилку побудування цієї інциденції: $\varepsilon = A'A_1'$ (рис. 1, *а*). З однаковою ймовірністю можна зробити помилку ε у довільному напрямі. Інакше кажучи, коло, описане радіусом, рівним m, де m — середня арифметична помилка всіх вимірів, буде являти собою криву однакової ймовірності зробити помилку даної величини ε.

Площа, обмежена таким колом, буде являти собою «середню площу помилок», що виникають при побудові інциденції двох г. точок, тобто коло, що характеризує точність операції c_1. Оскільки дві г. точки A і A_1 називають г. інцидентними за умовою, коли $A'A_1' \leqslant 2\omega_0$, то коло з центром в точці A' і радіусом, який дорівнює $3\omega_0$, назвемо «кривою помилок, що обмежує максимальну площу помилок». Ми її будемо називати максимальною первинною помилкою інциденції двох г. точок (рис. 1, *б*).



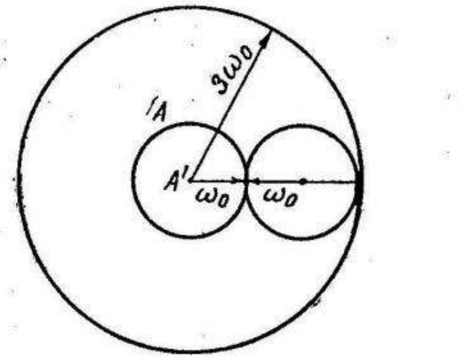


Рис. 1.

Якщо евклідову точку A' прийняти за початок прямокутних декартових координат, то г. точка може бути охарактеризована в евклідовій площині як частина площі, обмежена колом $x^2+y^2-\omega^2_0=0$. Крива помилок буде колом радіуса $3\omega_0$:

$$x^2+y^2-9\omega_0^2=0.$$

Ймовірність зробити помилку певної заданої величини буде дорівнювати нулеві, оскільки помилка може приймати безмежну кількість значень. Тому здебільшого вказують імовірність того, що помилка x буде знаходитись в деяких межах a та b, тобто $a<x<b$. Цю ймовірність звичайно виражають інтегралом:

$$P=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_a^b e^{-h^2x^2}\,dx.$$

Знайдемо тепер імовірність того, що помилка ε побудови інциденції двох г. точок не вийде за межі $\pm\omega_0$,

$$P=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\omega_0} e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon.$$

Зробимо підстановку $h\varepsilon=y$. Границі інтегрування будуть 0 і $h\omega_0$. Тоді

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\omega_0} e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h\omega_0} e^{-y^2}\frac{dy}{h}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h\omega_0} e^{-y^2}\,dy.$$

При заміні $h\omega_0=\alpha$ (1) дістанемо

$$\Theta(\alpha)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\alpha} e^{-y^2}dy. \tag{2}$$

З формули (1) видно, що чим більше h, тим більше α при тому самому ω_0, а значить, тим більше $\Theta(\alpha)$, тобто тим більша ймовірність того, що помилка не вийде за межі $\pm\omega_0$, чим точніше інструмент, яким проводиться операція c_1.

Величина $\Theta(\alpha)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\alpha} e^{-y^2}dy$ є безрозмірною. Отже, число $h\omega_0$ також безрозмірне, тоді міра точності h повинна бути оберненою розмірності ω_0. Наприклад, якщо ω_0 вимірюється в mm, то h вимірюється в $\frac{1}{mm}$.

Якщо інтеграл $p=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\omega_0} e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon$ дорівнює 0,5, то його границя називається серединною помилкою і позначається через E. Отже, серединна помилка — це помилка, за межі якої з ймовірністю 50% не вийде чисельна величина помилки.

Значення α, яке відповідає $\Theta(\alpha)=0{,}5$ $(\omega_0=E)$, позначається через ϱ. Отже, число ϱ незалежне від h. Якщо $\omega_0=E$ і $\alpha=\varrho$, а $h\omega_0=\alpha$, то $E=\frac{\rho}{h}$ і $h=\frac{\rho}{-E}$.

Знайдемо тепер імовірність того, що помилка не вийде за межі $\pm 0{,}1$, якщо $h=5\frac{1}{mm}$, $\omega_0=0{,}1$, $\alpha=\omega_0 h=0{,}1.5=0{,}5$. За цим значенням α знаходимо в таблицях $\Theta(\alpha)\approx 0{,}520499=52\%$. Це і є ймовірність того, що помилка не вийде за межі $\pm 0{,}1$.

Визначимо далі, які межі треба брати для того, щоб можна було стверджувати з імовірністю 99%, що помилка не вийде за шукані межі при $h=5\frac{1}{mm}$. В цьому випадку задано значення $\Theta(\alpha)=0{,}99$. Знаходимо в таблицях α. Можна прийняти, що $\alpha=1{,}85$. Отже, $\omega_0=\frac{\alpha}{h}=\frac{1{,}85}{5}=$ $=0{,}37$. Отже, ймовірність того, що помилка не вийде за межі $\pm 0{,}37$, дорівнює 99%. Таким чином, якщо у нас коло помилок має радіус $3\omega_0$ і $\omega_0=0{,}1$, то з імовірністю 99% можна стверджувати, що помилка не вийде за його межі при $h=5\frac{1}{mm}$.

Розглянемо далі побудову інциденції г. точки і г. прямої за допомогою точкографа.

Нехай задана г. пряма $a(a')$, і на цій прямій фіксується г. точка $A(A')$ (рис. 2, a). Помилкою тут буде величина $\varepsilon=O'A'$, що являє собою віддаль евклідової точки A' від евклідової прямої a'. Ймовірність влучити вістрям точкографа на ту чи іншу сторону г. прямої однакова. При встановленні точкографа в довільну точку г. прямої за законом Гаусса величину P однакової ймовірності зробити помилку заданого розміру ε визначимо за формулою

$$P=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}.$$

Умова $P=\text{const}$ вимагає, щоб $e^{-h^2\varepsilon^2}=\text{const}$, що рівнозначно умові $h^2\varepsilon^2=\text{const}$ або $\varepsilon=\text{const}$. Тобто однакові помилки робимо з однаковою ймовірністю і «крива рівноймовірних помилок» переходить в дві прямі, паралельні a' і проведені по обох сторонах від неї на віддалі, рівній ε. Таким чином, приходимо до висновку, що областю відхилень (помилок) у цьому випадку є смуга шириною 2ε, обмежена двома паралельними прямими. Якщо m величина середньої арифметичної помилки, то

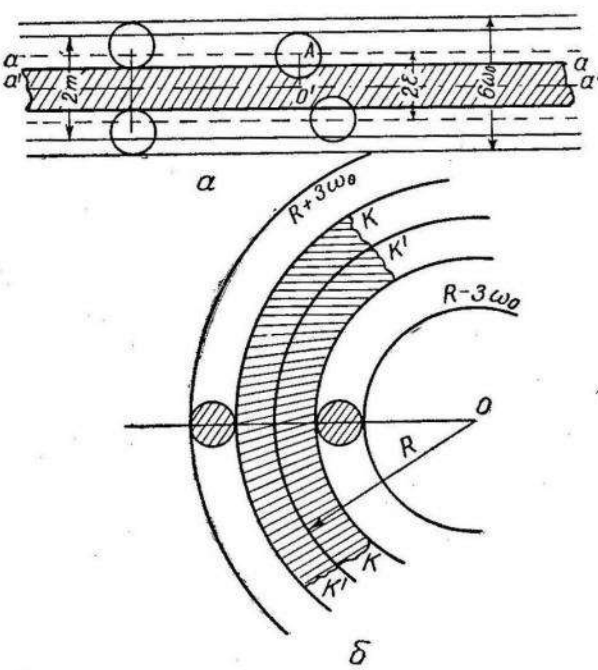


Рис. 2.

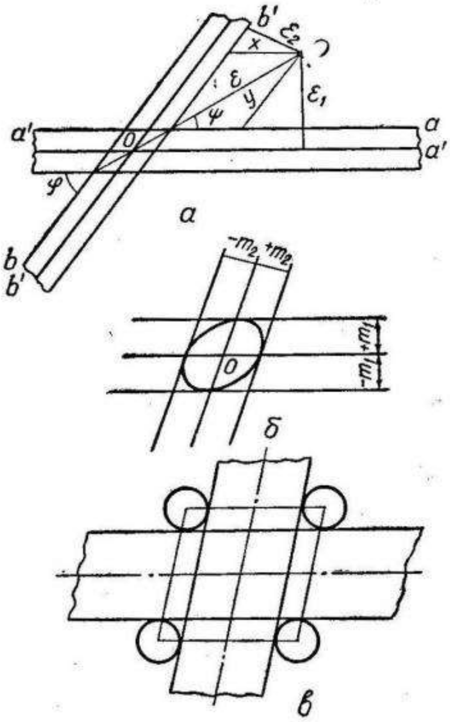


Рис. 3.

площа, обмежена прямими паралельними a', які проходять на віддалі $\pm m$ від неї, буде являти собою «середню площу помилок» при побудові інцидентності г. точки і г. прямої.

Оскільки г. точка і г. пряма інцидентні, якщо $O'A'\leqslant 2\omega_0$, то максимальна смуга помилок буде мати ширину, яка дорівнює

$$6\omega_0\ (\varepsilon=\pm 3\omega_0).$$

Аналогічно попередньому ми можемо обчислити ймовірність того, що помилка ε не вийде за межі $\pm\omega_0$, якщо $A'O'$ перпендикулярна a' і точка O' прийнята за початок координат (див. рис. 2, a). Все зводиться до обчислення інтеграла типу

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\omega_0} e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon.$$

У випадку, коли $h=5\dfrac{1}{mm}$ і $\omega_0=0{,}1$, дістанемо, як і раніше, $\Theta(\alpha)=$ $=52\%$. Це і буде ймовірність того, що помилка не вийде за межі $\pm 0{,}1$. Із імовірністю $\Theta(\alpha)=99\%$ помилка не вийде за межі $\pm 3\omega_0$.

Побудова інциденції г. точки і г. кола за допомогою точкографа аналогічна. При встановленні точкографа в довільну г. точку заданої кривої будемо робити деяку помилку ε. Як і в попередньому випадку, ми приходимо до висновку, що «область помилок» являє собою частину площини, обмежену двома концентричними колами. Ширина такої смужки «середнього відхилення» дорівнює $2m$. Число m можна прийняти таким, як для прямої лінії.

З врахуванням умов інцидентності г. точки і г. кола приходимо до висновку, що крива помилок, яка обмежує максимальну первинну площу помилок, розпадається на два кола радіуса $R \pm 3\omega_0$. Площа «кільця», обмежена цими колами, є максимальною площею помилок. Ця площа з'являється при побудові інциденції г. точки і г. кола. (див. рис. 2, *б*).

Операція c_1 — фіксування точкографом точки перетину двох г. прямих (тобто побудування інциденції точки двох г. прямих) також вносить помилку в побудову.

Розглянемо дві г. прямі $a(a')$ і $b(b')$, що перетинаються під довільним кутом φ (рис. 3, *а*). Нехай точкографом ми зафіксували точку O_1 замість точки O. Помилка, яку ми робимо при цьому, характеризується віддаллю $OO_1 = \varepsilon$ і кутом нахилу ψ прямої OO_1 до прямої a або віддаллю ε_1 і ε_2 цієї точки O_1 від заданих г. прямих $a(a')$ і $b(b')$.

Імовірність зробити помилку даного розміру у відношенні першої прямої визначається виразом:

$$\varphi(\varepsilon_1) = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 \varepsilon_1^2}.$$

А у відношенні другої г. прямої дістанемо

$$\varphi(\varepsilon_2) = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 \varepsilon_2^2}.$$

При незалежності помилок за теоремою добутку ймовірностей знайдемо ймовірність одночасної появи помилок за формулою

$$\Phi(\varepsilon_1 \varepsilon_2) = \varphi(\varepsilon_1)\,\varphi(\varepsilon_2) = \frac{h_1 h_2}{\pi} e^{-(h_1^2 \varepsilon_1^2 + h_2^2 \varepsilon_2^2)}.$$

Однакова ймовірність появи як першої, так і другої помилки приводить до умови

$$\Phi(\varepsilon_1 \varepsilon_2) = \text{const} \qquad \text{або} \qquad h_1^2 \varepsilon_1^2 + h_2^2 \varepsilon_2^2 = \text{const}. \tag{3}$$

Отже, ймовірність $\Phi(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$ одночасної появи помилок ε_1 і ε_2 є константою для всіх точок, координати яких задовольняють рівняння (3).

Вводячи середні арифметичні помилки m_1, m_2 окремих спостережень та розглядаючи a і b як осі системи координат, знаходимо

$$\varepsilon_1 = y \sin \varphi; \quad \varepsilon_2 = x \sin \varphi;$$

При цьому

$$h_1^2 = \frac{1}{2m_1^2}; \qquad h_2^2 = \frac{1}{2m_2^2}. \tag{4}$$

Після підстановки (4) в (3) дістанемо

$$\frac{y^2 \sin^2 \varphi}{2m_1^2} + \frac{x^2 \sin^2 \varphi}{2m_2^2} = \text{const}. \tag{5}$$

Якщо (5) поділимо на $\sin^2 \varphi$ і введемо сталу χ^2, то будемо мати

$$\frac{x^2}{m_2^2} + \frac{y^2}{m_1^2} = \frac{2\chi^2}{\sin^2 \varphi}. \tag{6}$$

Рівняння це показує, що з однаковою ймовірністю фіксовані точки будуть розміщуватися на еліпсі, побудованому на даних прямих як на спряжених діаметрах. В залежності від значення параметра χ^2 будемо мати сімейство подібних і подібно розміщених еліпсів. Одержаний еліпс називається еліпсом помилок. Особливу роль відіграє так званий середній еліпс помилок при $\varkappa = \frac{1}{2}$.

$$\frac{x^2}{\frac{m_2^2}{\sin^2 \varphi}} + \frac{y^2}{\frac{m_1^2}{\sin^2 \varphi}} = 1.$$

Цей еліпс являє собою фігуру, вписану в паралелограм, утворений двома парами прямих, проведених на віддалі $\pm m_1$ і $\pm m_2$ від заданих прямих, що перетинаються, і відповідно паралельно до них (рис. 3, *б*).

Зокрема, при $m_1 = m_2 = m$ довжину півосей середнього еліпса помилок, спрямованих по бісектрисах кута φ, визначимо за формулами

$$a = \frac{\varkappa_m}{\sin\frac{\varphi}{2}} \quad \text{і} \quad b = \frac{\varkappa_m}{\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Звичайно значення більшої осі цього еліпса і вважають за міру точності при встановленні точкографа в г. точку перетину двох г. прямих.

Помилка буде тим більшою, чим меншим буде кут φ.

Для $m_1 = m_2 = m$ і $\varphi = 90°$ еліпс помилок переходить в коло помилок, тобто при перетині двох даних г. прямих під прямим кутом будемо мати коло як криву помилок.

При врахуванні умови інцидентності г. точки і г. прямої можна стверджувати, що максимальною площею помилок при цьому є площа ромба зі стороною $\frac{2\omega_0}{\sin\varphi} + 4\omega_0$ (див. рис. 3, *в*).

Кривою рівноймовірних помилок у випадкові фіксування точкографом точки перетину двох г. ліній (прямої та кола або двох кіл) буде вже не еліпс, а овал.

Якщо елемент дуги кола в точці перетину замінити елементом дотичної прямої в цій точці, то тоді криву помилок можна наближено прийняти за еліпс.

В практиці така заміна допустима, оскільки при побудові за одними і тими ж емпіричними даними (m — величина середньої помилки) середній овал помилок та середній еліпс помилок в цьому випадку майже зливаються.

ЛІТЕРАТУРА

1. Буймола Г. Л. Деякі питання геометрії графічної площини. Вісник Львівського ун-ту, сер. механіко-матем., вип. 3. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1967.
2. Гончаров В. Л. Теория вероятностей, 1939.
3. Каргин Д. И. Точность графических расчетов. Докторская диссертация, 1937.
4. K. Nitz. Anwendungen der Theorie der Fehller in der Ebene Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Königsberg, 1905.