ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1971 *Серія механіко-математична* *Випуск 5*

МЕХАНІКА

УДК 517.3

Д. В. ГРИЛІЦЬКИЙ, М. І. ГІЛЬ

ПРО ОДНУ ОСЕСИМЕТРИЧНУ ЗАДАЧУ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУ

1. Розглянемо стаціонарну осесиметричну задачу термопружності для плоскопаралельного пружного шару, який обмежений площинами $Z=0$ і $z=h$ в циліндричній системі координат r, φ, z, з такими граничними умовами для температури і напружень:

$$z=0: \qquad T(r,0)=T_0=\text{const}, \qquad 0\leqslant r\leqslant a;$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}=0, \qquad a<r<\infty; \tag{1}$$

$$\sigma_{zz}(r,0)=\tau_{rz}(r,0)=0, \quad 0\leqslant r<\infty. \tag{2}$$

$$z=h: \qquad T(r,h)=0, \quad 0\leqslant r<\infty, \tag{3}$$

$$\sigma_{zz}(r,h)=\tau_{rz}(r,h)=0, \quad 0\leqslant r<\infty. \tag{4}$$

Треба визначити температурне поле $T(r,z)$ в шарі і характер розподілу в ньому температурних напружень.

Визначимо спочатку температурне поле $T(r,z)$, яке в стаціонарному осесиметричному випадку при відсутності внутрішніх джерел тепла задовольняє диференціальному рівнянню

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0. \tag{5}$$

Необхідно знайти розв'язок рівняння (5) в шарі при граничних умовах (1) і (3). При розв'язуванні задачі скористаємося інтегральним перетворенням Ханкеля [6, 7]. При використанні для температури $T(r,z)$ трансформанти Ханкеля нульового порядку

$$\overline{T}(\xi, z)=\int\limits_0^\infty rT(r, z)j_0(\xi r)dr \tag{6}$$

рівняння (5) зведемо до розв'язку звичайного диференціального рівняння другого порядку відносно функції $\overline{T}(\xi,z)$

$$\frac{d^2\overline{T}}{dz^2}-\xi^2\overline{T}=0, \tag{7}$$

розв'язок якого набирає вигляду

$$\bar{T}(\xi, z) = A(\xi)e^{\xi z} + B(\xi)e^{-\xi z}, \tag{8}$$

де $A(\xi)$ і $B(\xi)$ визначаються з граничних умов.

Температурне поле в шарі знаходиться за формулою обернення

$$T(r, z) = \int_0^\infty \xi \bar{T}(\xi, z) j_0(\xi r)\, d\xi. \tag{9}$$

Задовольняючи граничну умову (3), дістанемо співвідношення

$$A(\xi) = -B(\xi)e^{-2\xi h}. \tag{10}$$

Величину $B(\xi)$ підберемо так, щоб в площині $z=0$ задовольнити граничним умовам (1), які приводять до розв'язку парних інтегральних рівнянь відносно шуканої функції $F(\eta)$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \eta^{-1} F(\eta) j_0(\eta\rho)\, d\eta = f(\rho), \qquad \rho \leqslant 1, \\ &\int_0^\infty F(\eta) j_0(\eta\rho)\, d\eta = 0, \qquad \rho > 1 \end{aligned} \tag{11}$$

Тут введені позначення

$$\begin{gathered} \eta = \xi a, \ \varrho = r/a; \\ F(\eta) = \frac{\eta^2}{a^2}(1 + e^{-2\eta\delta}) B(\eta/a), \qquad \delta = h/a; \\ f(\rho) = T_0 + \int_0^\infty \eta^{-1} F(\eta)[1 - \text{th}(\eta\delta)]\, j_0(\eta\rho)\, d\eta. \end{gathered} \tag{12}$$

При застосуванні до парних інтегральних рівнянь (11) формули обернення [6] та проведення деяких перетворень дістанемо інтегральне рівняння типу Фредгольма другого роду

$$F(\eta) = \frac{2T_0}{\pi}\sin\eta + \frac{2\eta}{\pi}\int_0^\infty \frac{\eta \sin\eta \cos\alpha - \alpha \sin\alpha \cos\eta}{\alpha(\eta^2 - \alpha^2)}[1 - \text{th}(\alpha\delta)]\, F(\alpha)\, d\alpha. \tag{13}$$

Рівняння (13) будемо розв'язувати методом послідовних наближень, прийнявши за нульове наближення вільний член рівняння, який характеризує розв'язок задачі для півпростору. Отже, будемо мати

$$F(\eta) = F_0(\eta) + F_1(\eta) + F_2(\eta) + \dots, \tag{14}$$

де

$$F_0(\eta) = \frac{2T_0}{\pi}\sin\eta.$$

$$F_k(\eta) = \frac{2\eta}{\pi}\int_0^\infty \frac{\eta \sin\eta \cos\alpha - \alpha \sin\alpha \cos\eta}{\alpha(\eta^2 - \alpha^2)}[1 - \text{th}(\alpha\delta)]\, F_{k-1}(\alpha)\, d\alpha \tag{15}$$

$$(k = 1, 2, \dots).$$

Скориставшись принципом стиснутих відображень [5], можна показати, що для значень параметра $\delta > 0{,}4415$ процес послідовних наближень буде рівномірно збіжним до розв'язку інтегрального рівняння (13).

Згідно з роботами [1, 2], кожне з послідовних наближень, починаючи з першого, зручно розвинути в асимптотичний ряд за від'ємними степенями безрозмірного параметра δ. При пропусканні проміжних викладок запишемо остаточний результат, обмежившись членами з δ^7

$$F(\eta) = \frac{2T_0}{\pi}\left[\sin\eta + \frac{2}{\pi} S_1 \sin\eta\cdot\delta^{-1} + \frac{4}{\pi^2} S_1^2 \sin\eta\cdot\delta^{-2} + \sum_{k=3}^{7} \varphi_k(\eta)\,\delta^{-k} + \dots\right]. \tag{16}$$

Тут введені позначення:

$$\varphi(\eta) = \frac{\sin\eta}{\eta^2} - \frac{\cos\eta}{\eta},$$

$$\varphi_3(\eta) = \frac{24S_1^3 - 2\pi^2 S_3}{3\pi^3}\sin\eta + \frac{S_3}{\pi}\varphi(\eta),$$

$$\varphi_4(\eta) = \frac{16S_1^4 - 2\pi^2 S_1 S_3}{\pi^4}\sin\eta + \frac{2S_1S_3}{\pi^2}\varphi(\eta),$$

$$\varphi_5(\eta) = \frac{480S_1^5 - 80\pi^2 S_1^2 S_3 + 6\pi^4 S_5}{15\pi^5}\sin\eta - \frac{\pi^2 S_5 - 4S_1^2 S_3}{\pi^3}\varphi(\eta) -$$
$$- \frac{S_5 \sin\eta}{\pi\eta^2} + \frac{3S_5\varphi(\eta)}{\pi\eta^2}, \tag{17}$$

$$\varphi_6(\eta) = \left(\frac{11S_3^2 + 48S_1S_5}{45\pi^2} - \frac{40S_1^3 S_3}{3\pi^4} + \frac{64S_1^6}{\pi^6}\right)\sin\eta -$$
$$- \frac{\pi^2 S_3^2 + 6\pi^2 S_1 S_5 - 24S_1^3 S_3}{3\pi^4}\varphi(\eta) + \frac{2S_1S_5}{\pi^2\eta^2}[3\varphi(\eta) - \sin\eta],$$

$$\varphi_7(\eta) = \left(\frac{128S_1^7}{\pi^7} - \frac{32S_1^4 S_3}{\pi^5} + \frac{40S_1^2 S_5 + 18S_3^2 S_1}{15\pi^3} - \frac{2S_7}{7\pi}\right)\sin\eta +$$
$$+ \left(\frac{16S_1^4 S_3}{\pi_5} - \frac{12S_1^2 S_5 + 4S_1 S_3^2}{3\pi^3} + \frac{S_7}{\pi}\right)\varphi(\eta) +$$
$$+ \frac{(2\pi^2 S_7 - 4S_1^2 S_5)\sin\eta}{\pi^3\eta^2} + \left(\frac{12S_1^2 S_5}{\pi^3} - \frac{15S_7}{2\pi}\right)\frac{\varphi(\eta)}{\eta^2} + \frac{45S_7\varphi(\eta)}{2\pi\eta^4};$$

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n+1} n^{-m}.$$

Підставивши у формулу (16) замість η і δ їх значення, подані через ξ і h, на основі співвідношень (12) одержимо вираз для $F(\xi, h)$. Із співвідношень (8), (10), (12) і (9) знаходимо

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} \frac{F(\xi, h)}{\xi(1 + e^{-2\xi h})}\left[e^{-\xi z} - e^{-(2h - z)\xi}\right] j_0(\xi r)\, d\xi. \tag{18}$$

При заміні в попередній формулі виразу $(1 + e^{-2\xi h})^{-1}$ його наближеним значенням

$$(1 + e^{-2\xi h})^{-1} \simeq 1 - 0{,}6e^{-1{,}6\xi h} + 0{,}1e^{-5{,}588\xi h} \tag{19}$$

та при введенні функції $F(\xi h)$ для температурного поля в шарі з точністю до членів з $(a/h)^4$ будемо мати таку формулу:

$$\frac{\pi}{2T_0}T(r,\ z)=\left[1+\frac{2S_1}{\pi}\cdot\frac{a}{h}+\frac{4S_1^2}{\pi^2}\cdot\left(\frac{a}{h}\right)^2\right]N(r,\ z)+$$
$$+\left\{\left[\frac{24S_1^3-2\pi^2S_3}{3\pi^3}-\frac{S_3(r^2-2a^2)}{4\pi a^2}\right]N(r,\ z)+\frac{S_3}{4\pi a^2}[2R(r,\ z)-3aK(r,\ z)+\right.$$
$$\left.+aP(r,\ z)]\right\}\left(\frac{a}{h}\right)^3+\left\{\left[\frac{16S_1^4-2\pi^2S_1S_3}{\pi^4}-\frac{S_1S_3(r^2-2a^2)}{2\pi^2a^2}\right]N(r,\ z)+\right.$$
$$\left.+\frac{S_1S_3}{2\pi^2a^2}[2R(r,\ z)-3aK(r,\ z)+aP(r,\ z)]\right\}\left(\frac{a}{h}\right)^4+\ldots \qquad (20)$$

У формулі (20) використані позначення:

$$N(r,z)=A(z,r)-A(2h-z,r)-0{,}6\,A(1{,}6h+z,r)+0{,}6\,A(3{,}6h-z,r)+$$
$$+0{,}1\,A(5{,}588h+z,r)-0{,}1\,A(7{,}588h-z,r),$$

$$K(r,\ z)=\frac{z^2}{B(z,\ r)}-\frac{(2h-z)^2}{B(2h-z,\ r)}-0{,}6\frac{(1{,}6h+z)^2}{B(1{,}6h+z,\ r)}+0{,}6\frac{(3{,}6h-z)^2}{B(3{,}6h-z,r)}+$$
$$+0{,}1\frac{(5{,}588h+z)^2}{B(5{,}588h+z,\ r)}-0{,}1\frac{(7{,}588h-z)^2}{B(7{,}588h-z,\ r)}, \qquad (21)$$

$$R(r,z)=z^2A(z,r)-(2h-z)^2A(2h-z,r)-0{,}6(1{,}6h+z)^2A(1{,}6h+$$
$$+z,r)+0{,}6(3{,}6h-z)^2A(3{,}6h-z,r)+0{,}1(5{,}588h+z)^2A(5{,}588h+$$
$$+z,r)-0{,}1(7{,}588h-z)^2A(7{,}588h-z,r).$$

Вираз для $P(r,z)$ одержуємо з $N(r,z)$ шляхом заміни $A(z,r)$ на $B(z,r)$.

$$A(z,\ r)=\arcsin\frac{2a}{\sqrt{z^2+(a+r)^2}+\sqrt{z^2+(a-r)^2}},$$
$$\sqrt{2}\,B(z,\ r)=\sqrt{r^2-a^2+z^2+\sqrt{(r^2-a^2+z^2)^2+4a^2z^2}}. \qquad (22)$$

При обчисленні формули (20) ми використали значення інтегралів

$$\int_0^\infty\frac{\sin a\xi}{\xi}e^{-b\xi}j_0(\xi r)d\xi=A(b,\ r),$$

$$\int_0^\infty\frac{1}{a\xi^2}\left(\frac{\sin a\xi}{a\xi}-\cos a\xi\right)e^{-b\xi}j_0(\xi r)\,d\xi=-\frac{b}{2a}+$$
$$+\frac{b}{a}(1-\mu)+\frac{1}{4}(1-\mu)^2\beta-\frac{1}{4a^2}(r^2-2b^2-2a^2)A(b,\ r), \qquad (23)$$

де через μ та β позначені вирази

$$a\beta=B(b,r),\ b=\mu B(b,r). \qquad (24)$$

Перший інтеграл взятий нами із таблиці [3], другий — обчислений на основі роботи [9].

Визначимо температурні напруження. В нашому випадку маємо квазіплоский напружений стан [4], тобто два компоненти тензора напружень в кожній точці пружного шару будуть рівні нулю

$$\sigma_{zz}(r, z)=0; \ \tau_{rz}(r, z)=0, \tag{25}$$

два інших обчислюються за формулами

$$\sigma_{rr}(r, z)=-2G\frac{1}{r}\frac{\partial\psi(r, z)}{\partial r}, \qquad \sigma_{\varphi\varphi}(r, z)=-2G\frac{\partial^2\psi(r, z)}{\partial r^2}, \tag{26}$$

де функція напружень $\psi(r, z)$ в кожній точці шару задовольняє диференціальному рівнянню

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=(1+\nu)\,\alpha_t T(r, z). \tag{27}$$

Тут ν — коефіцієнт Пуассона, α_t — коефіцієнт лінійного розширення від температури, G — модуль зсуву, $T(r, z)$ — температура.
Із (27) знаходимо

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{(1+\nu)\,\alpha_t}{r}\int\limits_0^r \rho T(z, \rho)\,d\rho. \tag{28}$$

Використовуючи співвідношення

$$\int\limits_0^r \rho j_0(\xi\rho)\,d\rho=\frac{r}{\xi}j_1(\xi r) \tag{29}$$

та користуючись значенням інтегралів

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin a\xi}{\xi^2}e^{-b\xi}j_1(\xi r)\,d\xi=\frac{r}{2}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2(1-\mu)^2\beta+A(b, r)\right], \tag{30}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{a\xi^3}\left(\frac{\sin a\xi}{a\xi}-\cos a\xi\right)e^{-b\xi}j_1(\xi r)\,d\xi=-\frac{5br}{24a}-\frac{r}{16a^2}(r^2-4b^2-4a^2)\,A(b, r)+$$
$$+\frac{b}{24ar}(4r^2-a^2-b^2)(1-\mu)+\frac{1}{48r}(3r^2-2b^2+6a^2)(1-\mu)^2\beta,$$

за формулами (18), (28) і (26) знаходимо напруження $\sigma_{rr}(r, z)$

$$-\frac{1}{2Gm}\sigma_{rr}(r,z)=f_1(r,z)\left[1+\frac{2S_1}{\pi}\frac{a}{h}+\frac{4S_1^2}{\pi^2}\left(\frac{a}{h}\right)^2\right]+\left\{\frac{(24S_1^3-\pi^2S_3)(h-z)\,a}{3\pi^2r^2}+\right.$$
$$+\frac{24S_1^3-2\pi^2S_3}{3\pi^3r^2}\left[r^2f_1(r, z)-(h-z)\,a\right]+\frac{S_3}{\pi}\left[\frac{4a^2-r^2}{16a^2}N(r, z)+\right.$$
$$+\frac{r^2+2a^2}{16ar^2}P(r, z)-\frac{13r^2-10a^2}{48ar^2}K(r, z)+\frac{R(r, z)}{4a^2}+$$
$$\left.\left.+\frac{Q(r, z)-L(r, z)}{24ar^2}\right]\right\}\left(\frac{a}{h}\right)^3+\left\{\frac{(48S_1^4-4\pi^2S_1S_3)(h-z)\,a}{3\pi^4r^2}+\right.$$

$$+\frac{16S_1^4-2\pi^2S_1S_3}{\pi^4r^2}[r^2f_1(r,\ z)-(h-z)a]+\frac{S_1S_3}{\pi^2}\left[\frac{4a^2-r^2}{8a^2}N(r,\ z)+\right.$$

$$+\frac{r^2+2a^2}{8ar^2}P(r,\ z)-\frac{13r^2-10a^2}{24ar^2}K(r,\ z)+\frac{R(r,\ z)}{2a^2}+$$

$$\left.\left.+\frac{Q(r,\ z)-L(r,\ z)}{12ar^2}\right]\right\}\left(\frac{a}{h}\right)^4+\ldots. \qquad (31)$$

Напруження $\sigma_{\varphi\varphi}(r,z)$ визначається за формулою

$$-\frac{1}{2Gm}\sigma_{\varphi\varphi}(r,\ z)=\frac{\pi}{2T_0}T(r,\ z)+\frac{1}{2Gm}\sigma_{rr}(r,\ z), \qquad (32)$$

яка на основі (20) і (31) набирає вигляду

$$-\frac{1}{2Gm}\sigma_{\varphi\varphi}(r,\ z)=f_2(r,\ z)\left[1+\frac{2S_1}{\pi}\cdot\frac{a}{h}+\frac{4S_1^2}{\pi^2}\left(\frac{a}{h}\right)^2\right]+$$

$$+\left\{\frac{(\pi^2S_3-24S_1^3)(h-z)a}{3\pi^3r^2}+\frac{24S_1^3-2\pi^2S_3}{3\pi^3r^2}[r^2f_2(r,\ z)+(h-z)a]+\right.$$

$$+\frac{S_3}{\pi}\left[\frac{4a^2-3r^2}{16a^2}N(r,\ z)+\frac{3r^2-2a^2}{16ar^2}P(r,\ z)-\frac{23r^2-10a^2}{48ar^2}K(r,\ z)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{R(r,\ z)}{4a^2}-\frac{Q(r,z)-L(r,z)}{24ar^2}\right]\right\}\left(\frac{a}{h}\right)^3+\left\{\frac{(4\pi^2S_1S_3-48S_1^4)(h-z)a}{3\pi^4r^2}+\right.$$

$$+\frac{16S_1^4-2\pi^2S_1S_3}{\pi^4r^2}[r^2f_2(r,\ z)+(h-z)a]+\frac{S_1S_3}{\pi^2}\left[\frac{4a^2-3r^2}{16a^2}N(r,\ z)+\right.$$

$$+\frac{3r^2-2a^2}{8ar^2}P(r,\ z)-\frac{23r^2-10a^2}{24ar^2}K(r,\ z)+\frac{R(r,\ z)}{2a^2}-$$

$$\left.\left.-\frac{Q(r,\ z)-L(r,\ z)}{12ar^2}\right]\right\}\left(\frac{a}{h}\right)^4+\ldots. \qquad (33)$$

Тут введені такі позначення:

$$f_1(r,\ z)=\frac{1}{2}N(r,\ z)+\frac{(h-z)a}{r^2}+\frac{a}{2r^2}[K(r,\ z)+P(r,\ z)],$$

$$f_2(r,\ z)=\frac{1}{2}N(r,\ z)-\frac{(h-z)a}{r^2}-\frac{a}{2r^2}[K(r,\ z)+P(r,\ z)],$$

$$Q(r,\ z)=\frac{z^4}{B(r,\ z)}-\frac{(2h-z)^4}{B(2h-z,\ r)}-0{,}6\frac{(1{,}6h+z)^4}{B(1{,}6h+z,\ r)}+$$

$$+0{,}6\frac{(3{,}6h-z)^4}{B(3{,}6h-z,\ r)}+0{,}1\frac{(5{,}588h+z)^4}{B(5{,}588h+z,\ r)}-0{,}1\frac{(7{,}588h-z)^4}{B(7{,}588h-z,\ r)},$$

$$L(r,z)=z^2B(r,z)-(2h-z)^2B(2h-z,r)-0{,}6(1{,}6h+z)^2B(1{,}6h+ \qquad (34)$$

$$+z,r)+0{,}6(3{,}6h-z)^2B(3{,}6h-z,r)+0{,}1(5{,}588h+z)^2B(5{,}588h+z,r)-$$

$$-0{,}1(7{,}588h-z)^2B(7{,}588h-z,r),$$

$$m=2T_0(1+\nu)\alpha_t/\pi.$$

При $r=0$ напруження $\sigma_{rr}(0, z)$ і $\sigma_{\varphi\varphi}(0, z)$ співпадають між собою

$$\sigma_{rr}(0,\ z)=\sigma_{\varphi\varphi}(0,\ z)=-Gm\left\{\left[1+\frac{2S_1}{\pi}\cdot\frac{a}{h}+\frac{4S_1^2}{\pi^2}\left(\frac{a}{h}\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{24S_1^3-2\pi^2S_3}{3\pi^3}\left(\frac{a}{h}\right)^3+\frac{16S_1^4-2\pi^2S_1S_3}{\pi^4}\left(\frac{a}{h}\right)^4\right]N(0,\ z)+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left[\frac{S_3}{\pi}\left(\frac{a}{h}\right)^3+\frac{2S_1S_3}{\pi^2}\left(\frac{a}{h}\right)^4\right]\left[\frac{h-z}{a}+N(0,\ z)+\frac{R(0,\ z)}{a^2}\right]\right\}. \tag{35}$$

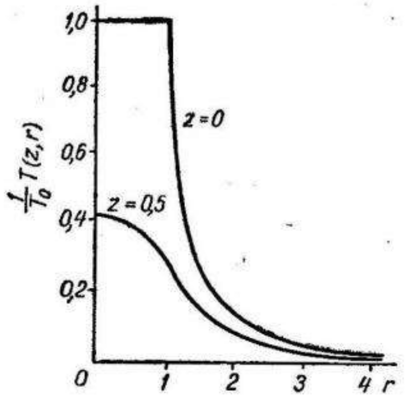

Рис. 1.

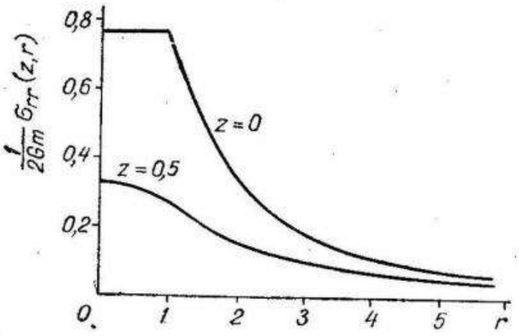

Рис. 2.

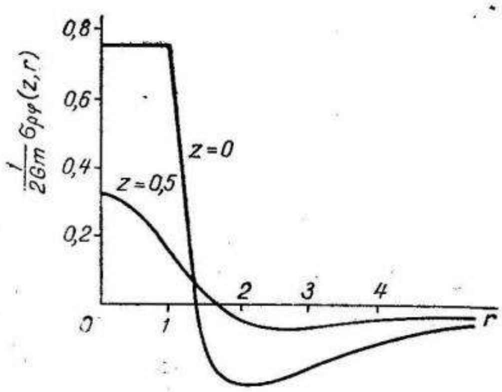

Рис. 3.

На рис. 1, 2, 3 показані графіки розподілу температури і напружень для $z=0$ і $z=0{,}5$ при $a=h=1$.

При спрямуванні в попередніх формулах h до безмежності одержимо результати В. Новацького [4, 8].

ЛІТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Юдович В. И. Удар круглой пластинки о слой воды конечной глубины. ПММ, 1957, т. 21, в. 4.

2. Ворович И. И., Устинов Ю. А. О давлении штампа на слой конечной толщины. ПММ, 1959, т. 23, в. 3.

3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.

4. Новацкий В. Вопросы термоупругости. Изд-во АН СССР, М., 1962.

5. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М., 1952.

6. Снеддон И. Преобразования Фурье. ИЛ, 1955.

7. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. «Наука», 1967.
8. Nowacki W. A Three-Dimensional Thermoelastic Problem with Discontinuous Bourdary Conditions, Archiwum Mechaniki Stosowanej, т. IX, № 3, 1957.
9. Singh Avtar. Axisymmetrical Thermal Stress in Transversely Isotropic Bodies. Archiwum Mechaniki Stosowanej, т. XII, № 3, 1960.

УДК 539.384

Т. Л. МАРТИНОВИЧ, В. П. ВУШКО

ПРО ОДИН СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗМІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОРІДНИХ І КУСОЧНО-ОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ

Нехай пружне ізотропне середовище заповнює скінченну (або нескінченну) плоску область D, обмежену контуром $L=L_1+L_2+\ldots+L_{m+1}$, причому L_j $(j=1, 2, \ldots, m+1)$ — замкнуті гладкі (або кусочно-гладкі) лінії, які не перетинаються між собою, а контур L_{m+1} охоплює всі попередні.

У випадку нескінченної області D зовнішній контур L_{m+1} віддалений в нескінченність. За додатний напрямок обходу контура L прийнято той, який залишає область D зліва.

I. Основна змішана крайова задача. Нехай на одній частині межі $L_{\mathrm{I}}=L^{\mathrm{II}}+L_2^{\mathrm{I}}+\ldots+L_{m+1}^{\mathrm{I}}$ області D задані зовнішні напруження X_n, Y_n, а на останній частині межі $L_{\mathrm{II}}=L_1^{\mathrm{II}}+L_2^{\mathrm{II}}+\ldots+L_{m+1}^{\mathrm{II}}$ задані переміщення $u=g_1(t)$, $v=g_2(t)$, причому $L=L_{\mathrm{I}}+L_{\mathrm{II}}$.

На підставі формул плоскої задачі [1] будемо мати *

$$d[\varphi_1(t)+t\overline{\varphi_1'(t)}+\overline{\psi_1(t)}]=i(X_n+iY_n)ds \text{ на } L_{\mathrm{I}} \tag{1.1}$$

$$d[\varkappa\varphi_1(t)-t\overline{\varphi_1'(t)}-\overline{\psi_1(t)}]=2\mu d(g_1+ig_2) \text{ на } L_{\mathrm{II}} \tag{1.2}$$

Помножимо рівності (1.1) і (1.2) на довільну функцію $F_1(z)$, голоморфну в області D, і проінтегруємо їх відповідно по L_{I} і L_{II}, а потім з першої рівності віднімемо другу, в результаті дістанемо інтегральне співвідношення для визначення функції $\Phi_1(z)$:

$$\int\limits_{L_{\mathrm{I}}}\Phi_1(t)\overline{F_1(t)}\,dt-\varkappa\int\limits_{L_{\mathrm{II}}}\Phi_1(t)\overline{F_1(t)}\,dt-\int\limits_{L}\overline{\Phi_1(t)}\,\overline{F_1'(t)}\,t\,\overline{dt}=$$
$$=i\int\limits_{L_{\mathrm{I}}}\overline{F_1(t)}(X_n+iY_n)\,ds-2\mu\int\limits_{L_{\mathrm{II}}}\overline{F_1(t)}\,d(g_1+ig_2). \tag{1.3}$$

Якщо функція $\Phi_1(z)$ з контурної рівності (1.3) знайдена, то функція $\Psi_1(z)$ визначається з інтегрального співвідношення

$$\int\limits_{L}\overline{\Psi_1(t)}\,F_1(t)\,\overline{dt}=(\varkappa+1)\int\limits_{L_{\mathrm{II}}}\Phi_1(t)F_1(t)\,dt+\int\limits_{L}\overline{\Phi_1(t)}\,F_1'(t)\,t\,dt+$$
$$+i\int\limits_{L_{\mathrm{I}}}F_1(t)(X_n+iY_n)\,ds-2\mu\int\limits_{L_{\mathrm{II}}}F_1(t)\,d(g_1+ig_2), \tag{1.4}$$

одержаного шляхом таких самих міркувань, що і формула (1.3).

---

* Тут і далі припускається, що об'ємні сили відсутні.