7. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. «Наука», 1967.

8. Nowacki W. A Three-Dimensional Thermoelastic Problem with Discontinuous Boundary Conditions, Archiwum Mechaniki Stosowanej, т. IX, № 3, 1957.

9. Singh Avtar. Axisymmetrical Thermal Stress in Transversely Isotropic Bodies. Archiwum Mechaniki Stosowanej, т. XII, № 3, 1960.

УДК 539.384

Т. Л. МАРТИНОВИЧ, В. П. ВУШКО

ПРО ОДИН СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗМІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОРІДНИХ І КУСОЧНО-ОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ

Нехай пружне ізотропне середовище заповнює скінченну (або нескінченну) плоску область D, обмежену контуром $L=L_1+L_2+\ldots+L_{m+1}$, причому L_j $(j=1, 2, \ldots, m+1)$ — замкнуті гладкі (або кусочно-гладкі) лінії, які не перетинаються між собою, а контур L_{m+1} охоплює всі попередні.

У випадку нескінченної області D зовнішній контур L_{m+1} віддалений в нескінченність. За додатний напрямок обходу контура L прийнято той, який залишає область D зліва.

I. Основна змішана крайова задача. Нехай на одній частині межі $L_{\mathrm{I}}=L^{\mathrm{II}}+L_2^{\mathrm{I}}+\ldots+L_{m+1}^{\mathrm{I}}$ області D задані зовнішні напруження X_n, Y_n, а на останній частині межі $L_{\mathrm{II}}=L_1^{\mathrm{II}}+L_2^{\mathrm{II}}+\ldots+L_{m+1}^{\mathrm{II}}$ задані переміщення $u=g_1(t)$, $v=g_2(t)$, причому $L=L_{\mathrm{I}}+L_{\mathrm{II}}$.

На підставі формул плоскої задачі [1] будемо мати *

$$d[\varphi_1(t)+t\overline{\varphi_1'(t)}+\overline{\psi_1(t)}]=i(X_n+iY_n)ds \text{ на } L_{\mathrm{I}} \tag{1.1}$$

$$d[\varkappa\varphi_1(t)-t\overline{\varphi_1'(t)}-\overline{\psi_1(t)}]=2\mu d(g_1+ig_2) \text{ на } L_{\mathrm{II}} \tag{1.2}$$

Помножимо рівності (1.1) і (1.2) на довільну функцію $F_1(z)$, голоморфну в області D, і проінтегруємо їх відповідно по L_{I} і L_{II}, а потім з першої рівності віднімемо другу, в результаті дістанемо інтегральне співвідношення для визначення функції $\Phi_1(z)$:

$$\int_{L_{\mathrm{I}}}\Phi_1(t)\overline{F_1(t)}\,dt-\varkappa\int_{L_{\mathrm{II}}}\Phi_1(t)\overline{F_1(t)}\,dt-\int_{L}\overline{\Phi_1(t)}\,\overline{F_1'(t)}\,t\,\overline{dt}=$$
$$=i\int_{L_{\mathrm{I}}}\overline{F_1(t)}(X_n+iY_n)\,ds-2\mu\int_{L_{\mathrm{II}}}\overline{F_1(t)}\,d(g_1+ig_2). \tag{1.3}$$

Якщо функція $\Phi_1(z)$ з контурної рівності (1.3) знайдена, то функція $\Psi_1(z)$ визначається з інтегрального співвідношення

$$\int_{L}\overline{\Psi_1(t)}F_1(t)\,\overline{dt}=(\varkappa+1)\int_{L_{\mathrm{II}}}\Phi_1(t)F_1(t)\,dt+\int_{L}\overline{\Phi_1(t)}F_1'(t)\,t\,dt+$$
$$+i\int_{L_{\mathrm{I}}}F_1(t)(X_n+iY_n)\,ds-2\mu\int_{L_{\mathrm{II}}}F_1(t)\,d(g_1+ig_2), \tag{1.4}$$

одержаного шляхом таких самих міркувань, що і формула (1.3).

---

* Тут і далі припускається, що об'ємні сили відсутні.

Тут t — афікс точки межі області L; μ — модуль зсуву; $\varkappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ — для плоского напруженого стану і $\varkappa = 3-4\nu$ — для плоскої деформації; ν — коефіцієнт Пуассона; $F_1(z)$ — довільна функція, голоморфна в області D.

Зокрема, при $L_{II}=0$, $L_I = L$ одержуємо контурні умови першої основної задачі, а при $L_I=0$, $L_{II}=L$ — контурні умови другої основної задачі [2].

II. Кусочно-однорідне середовище. Основна змішана задача. Нехай область D складається з двох частин — D_1 і D_2, які відповідають двом різним матеріалам. Лінію відокремлення пружних середовищ D_1 і D_2 позначимо через L_0. Всі величини, що стосуються області D_1, будемо позначати індексом 1, а ті самі величини, що стосуються області D_2 — індексом 2.

Нехай на одній частині межі L_1^I і L_2^I області $D=D_1+D_2$ задані зовнішні напруження X_n, Y_n, а на останній частині — межі L_1^{II} і L_2^{II} задані переміщення $u=g_1(t)$ і $v=g_2(t)$, причому $L_1 = L_1^I + L_1^{II}$, $L_2 = L_2^I + L_2^{II}$; $L_1+L_2=L$ — межа області $D=D_1+D_2$.

На лінії відокремлення середовищ L_0 повинні справджуватися умови

$$u_1+iv_1=u_2+iv_2 \qquad \text{на} \quad L_0, \tag{2.1}$$

$$X_{1n}+iY_{1n}=X_{2n}+iY_{2n} \qquad \text{на} \quad L_0. \tag{2.2}$$

Мислено відокремимо області D_1 і D_2 і розглянемо окремо для кожної з них основну змішану задачу, коли на контурі L_0 задані напруження. На підставі формули (1.3) одержимо

$$\int\limits_{L_2^I+L_0} \Phi_2(t)\overline{F(t)}\,dt - \varkappa_2 \int\limits_{L_2^{II}} \Phi_2(t)\overline{F(t)}\,dt - \int\limits_{L_2^I+L_2^{II}+L_0} \overline{\Phi_2(t)}\,\overline{F'(t)}\,t\,d\bar{t} =$$

$$= i\int\limits_{L_2^I+L_0} \overline{F(t)}(X_n+iY_n)\,ds - 2\mu_2 \int\limits_{L_2^{II}} \overline{F(t)}\,d(g_1+ig_2); \tag{2.3}$$

$$\int\limits_{L_1^I+L_0} \Phi_1(t)\overline{F(t)}\,dt - \varkappa_1 \int\limits_{L_1^{II}} \Phi_1(t)\overline{F(t)}\,dt - \int\limits_{L_1^I+L_1^{II}+L_0} \overline{\Phi_1(t)}\,\overline{F'(t)}\,t\,d\bar{t} =$$

$$= i\int\limits_{L_1^I+L_0} \overline{F(t)}(X_n+iY_n)\,ds - 2\mu_1 \int\limits_{L_1^{II}} \overline{F(t)}\,d(g_1+ig_2). \tag{2.4}$$

Додаючи рівності (2.3) і (2.4) з врахуванням умови спряження (2.2), приходимо до такої контурної умови відносно функцій Φ_1 і Φ_2:

$$\int\limits_{L_2^I+L_0} \Phi_2(t)\overline{F(t)}\,dt - \varkappa_2 \int\limits_{L_2^{II}} \Phi_2(t)\overline{F(t)}\,dt - \int\limits_{L_2+L_0} \overline{\Phi_2(t)}\,\overline{F'(t)}\,t\,d\bar{t} +$$

$$+ \int\limits_{L_1^I+L_0} \Phi_1(t)\overline{F(t)}\,dt - \varkappa_1 \int\limits_{L_1^{II}} \Phi_1(t)\overline{F(t)}\,dt - \int\limits_{L_1+L_0} \overline{\Phi_1(t)}\,\overline{F'(t)}\,t\,d\bar{t} = \tag{2.5}$$

$$= i\int\limits_{L_2^I+L_1^I} \overline{F(t)}(X_n+iY_n)\,ds - 2\mu_2 \int\limits_{L_2^{II}} \overline{F(t)}\,d(g_1+ig_2) - 2\mu_1 \int\limits_{L_1^{II}} \overline{F(t)}\,d(g_1+ig_2),$$

причому $F(z)$ — довільна функція, голоморфна в області $D=D_1+D_2$.

Тепер розглянемо основну змішану задачу окремо для області D_1 і для області D_2, коли на контурі L_0 задані переміщення. Згідно з формулою (1.3) дістаємо

$$\int_{L_2^{I}} \Phi_2(t)\overline{F(t)}\,dt-\varkappa_2\int_{L_2^{II}+L_0}\Phi_2(t)\overline{F(t)}\,dt-\int_{L_2^{I}+L_2^{II}+L_0}\overline{\Phi_2(t)}\,\overline{F'(t)}\,t\,d\bar{t}=$$

$$=i\int_{L_2^{I}}\overline{F(t)}\,(X_n+iY_n)\,ds-2\mu_2\int_{L_2^{II}+L_0}\overline{F(t)}\,d\,(g_1+ig_2); \qquad (2.6)$$

$$\int_{L_1}\Phi_1(t)\overline{F(t)}\,dt-\varkappa_1\int_{L_1^{II}+L_0}\Phi_1(t)\overline{F(t)}\,dt-\int_{L_1^{I}+L_1^{II}+L_0}\overline{\Phi_1(t)}\,\overline{F'(t)}\,t\,d\bar{t}=$$

$$=i\int_{L_1^{I}}\overline{F(t)}\,(X_n+iY_n)\,ds-2\mu_1\int_{L_1^{II}+L_0}\overline{F(t)}d(g_1+ig_2). \qquad (2.7)$$

Помножимо рівність (2.6) на μ_1, рівність (2.7) — на μ_2 і потім додамо їх з врахуванням умови спряження (2.1). Після цього одержимо:

$$\mu_1\int_{L_2^{I}}\Phi_2(t)\overline{F(t)}\,dt-\mu_1\varkappa_2\int_{L_2^{II}+L_0}\Phi_2(t)\overline{F(t)}\,dt-\mu_1\int_{L_2+L_0}\overline{\Phi_2(t)}\,\overline{F'(t)}\,t\,d\bar{t}+$$

$$+\mu_2\int_{L_1^{I}}\Phi_1(t)\overline{F(t)}\,dt-\mu_2\varkappa_1\int_{L_1^{II}+L_0}\Phi_1(t)\overline{F(t)}\,dt-\mu_2\int_{L_1+L_0}\overline{\Phi_1(t)}\,\overline{F'(t)}\,t\,d\bar{t}=$$

$$=i\mu_1\int_{L_2}\overline{F(t)}\,(X_n+iY_n)\,ds+i\mu_2\int_{L_1^{II}}\overline{F(t)}\,(X_n+iY_n)\,ds-$$

$$-2\mu_1\mu_2\int_{L_2^{II}+L_1^{II}}\overline{F(t)}\,d(g_1+ig_2). \qquad (2.8)$$

Контурні умови (2.5) і (2.8) служать для визначення функцій $\Phi_1(z)$ і $\Phi_2(z)$.

Якщо функції $\Phi_j(z)$ з формул (2.5) і (2.8) знайдені, то функції $\Psi_1(z)$ і $\Psi_2(z)$ визначаються з таких інтегральних співвідношень

$$\int_{L_1+L_0}\overline{\Psi_1(t)}\,F(t)\,d\bar{t}=\int_{L_1+L_0}\overline{\Phi_1(t)}F'(t)\,t\,dt-\frac{\mu_1(1+\varkappa_1)}{\mu_2-\mu_1}\int_{L_1^{II}}\Phi_1(t)\,F(t)\,dt-$$

$$-\frac{\mu_2(1+\varkappa_1)}{\mu_2-\mu_1}\int_{L_1}\Phi_1(t)\,F(t)\,dt-\frac{\mu_1(1+\varkappa_2)}{\mu_2-\mu_1}\int_{L_2}\Phi_2(t)\,F(t)\,dt+$$

$$+i\int_{L_1^{I}}F(t)\,(X_n+iY_n)\,ds-2\mu_1\int_{L_1^{II}}F(t)\,d\,(g_1+ig_2), \qquad (2.9)$$

$$\int_{L_1+L_3} \overline{\Psi_2(t)}\, F(t)\, d\bar{t} = \int_{L_3+L_0} \overline{\Phi_2(t)}\, F'(t)\, t\, dt + \frac{\mu_2(1+\varkappa_2)}{\mu_2-\mu_1} \int_{L_2^{\mathrm{II}}} \Phi_2(t)\, F(t)\, dt +$$

$$+ \frac{\mu_1(1+\varkappa_2)}{\mu_2-\mu_1} \int_{L_2^{\mathrm{I}}} \Phi_2(t)\, F(t)\, dt + \frac{\mu_2(1+\varkappa_1)}{\mu_2-\mu_1} \int_{L_1} \Phi_1(t)\, F(t)\, dt +$$

$$+ i \int_{L_2^{\mathrm{I}}} F(t)(X_n+iY_n)\, ds - 2\mu_2 \int_{L_2^{\mathrm{II}}} F(t)\, d(g_1+ig_2), \tag{2.10}$$

які одержані шляхом тих самих міркувань, що і формули (2.5) і (2.8).

Додатним напрямком обходу дуг L_1, L_2 і L_0 вважається той, при якому області D_1 і D_2 залишаються зліва.

Зокрема, при $L_1^{\mathrm{II}}=0$, $L_2^{\mathrm{II}}=0$, $L_1^{\mathrm{I}}=L_1$ і $L_2^{\mathrm{I}}=L_2$ одержуємо контурні умови першої основної задачі, а при $L_1^{\mathrm{I}}=0$, $L_2^{\mathrm{I}}=0$, $L_1^{\mathrm{II}}=L_1$ і $L_2^{\mathrm{II}}=L_2$ — контурні умови другої основної задачі для кусочно-однорідного пружного середовища.

Поширення формул (2.5), (2.8) — (2.10) на той випадок, коли область D складається з декількох однорідних частин D_j з різними пружними сталими і заданим стрібком переміщень на лінії відокремлення середовищ L_0, не викликає утруднень.

Зазначимо, що для обчислення нормальної складової контактного напруження $\sigma_n\,(\sigma_n^{(1)}=\sigma_n^{(2)})$ на лінії відокремлення середовищ L_0, а також нормальних напружень $\sigma_\tau^{(1)}$ і $\sigma_\tau^{(2)}$ на площадках, перпендикулярних до лінії L_0, достатньо знати лише функції $\Phi_1(z)$ і $\Phi_2(z)$ для цих середовищ (n і τ — одиничні вектори нормалі і дотичної до лінії L_0). Для обчислення дотичних контактних напружень $\tau_{n\tau}$ на лінії L_0 треба знати ще функцію $\Psi(z)$ для будь-якого з цих середовищ [3].

Наведені вище крайові умови в формі контурних інтегралів, що містять довільну голоморфну функцію $F(z)$, особливо зручні при розв'язуванні задач в рядах для тих областей, на які конформно відображається зовнішність кола або кругового кільця раціональною функцією $z=\omega(\zeta)$.

III. Еліптичне софокусне кільце із змішаними крайовими умовами. Нехай для простоти частина t_1Mt_2 зовнішнього контура кільця L_2 ненавантажена, а на останній частині $t_2Nt_3(t_3=t_1)$ контура L_2 задані переміщення $u=0$, $v=0$. До внутрішнього контура кільця L_1 прикладений рівномірний тиск інтенсивності p_1. Вісь Ox напрямлена вздовж більшої півосі еліпса. Функція

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\frac{m}{\zeta}\right) \tag{3.1}$$

конформно відображає кільце, що міститься між концентричними колами γ_1 і γ_2 радіусів ϱ_1 і ϱ_2, на розглядувану область, причому

$$m=\frac{a_1-b_1}{a_1+b_1}, \qquad R=\frac{a_1+b_1}{2}; \qquad \rho_1=1, \qquad \rho_2=\frac{a_2+b_2}{a_1+b_1}>1;$$

a_j, b_j — півосі конфокальних еліпсів.

На площині ζ точкам t_1, t_2 і t_3 відповідають точки

$$\sigma_1=\rho_2 e^{i\alpha_1}, \qquad \sigma_2=\rho_2 e^{i\alpha_2}, \qquad \sigma_3=\rho_2 e^{i(\alpha_1+2\pi)}. \tag{3.2}$$

В нових позначеннях

$$\Phi(\zeta)=\Phi_1[\omega(\zeta)],\ \Psi(\zeta)=\Psi_1[\omega(\zeta)],\ F(\zeta)=F_1[\omega(\zeta)].$$

Формула (1.3) в перетвореній області для розглядуваного прикладу набирає вигляду

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\Phi(\sigma)\overline{F(\sigma)}\,\omega'(\sigma)\,d\sigma+\int_{\gamma_1}\Phi(\sigma)\overline{F(\sigma)}\,\omega'(\sigma)\,d\sigma-\varkappa\int_{\sigma_3}^{\sigma_3}\Phi(\sigma)\overline{F(\sigma)}\,\omega'(\sigma)\,d\sigma-$$

$$-\int_{\gamma_2+\gamma_1}\overline{\Phi(\sigma)}\,\overline{F'(\sigma)}\,\omega(\sigma)\,d\bar{\sigma}=-P_1\int_{\gamma_1}\overline{F(\sigma)}\,\omega'(\sigma)\,d\sigma. \qquad (3.3)$$

Функції $\Phi(\zeta)$ і $F(\zeta)$ голоморфні в кільці $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$, розвинені в ряд Лорана

$$\begin{aligned}\Phi(\zeta)&=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\zeta^k+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\zeta^{-k}\\ F(\zeta)&=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\zeta^n+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\zeta^{-n}.\end{aligned}\qquad (3.4)$$

Внесемо розклади (3.4) в крайову умову (3.3). Тепер по черзі будемо вважати, що всі коефіцієнти розкладу довільної функції $F(\zeta)$ дорівнюють нулю, крім одного з них — C_j або $D_j(j=0,\ 1,\ 2,\ldots)$, і після інтегрування дістанемо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів A_k і B_k функції $\Phi(\zeta)$.

Розв'язувалася укорочена система одержаних рівнянь 27 порядку при таких даних: $\nu=0{,}3$; $\varkappa=2{,}08$; $\alpha_1=0$; $\alpha_2=\pi$; $m=0{,}5$, $\left(a_1=3b_1,\ a_2=4b_1,\ b_2=2\sqrt{2}\,b_1,\ \rho_2=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.

θ, *град*	1	5	15	30	45	60	75	90
$\sigma_\theta^{(1)}/P_1$	8,21	9,39	9,71	5,06	1,92	−0,40	−1,01	−1,29
$\sigma_\theta^{(2)}/P_1$	5,13	4,45	−0,72	1,57	0,92	3,81	2,43	4,68

θ, *град*	−1	−5	−15	−30	−45	−60	−75	−90
$\sigma_\theta^{(1)}/P_1$	7,45	5,76	1,88	0,44	0,03	−0,48	−0,11	−0,16
$\sigma_\theta^{(2)}/P_1$	1,12	0,82	0,02	0,15	−0,19	−0,16	−0,26	−0,20
$\sigma_\rho^{(2)}/P_1$	3,74	2,74	0,06	0,49	−0,65	−0,52	−0,86	−0,66

Функція напружень $\Psi(\zeta)$ визначається з контурної умови (1.4). Значення напружень в окремих контурних точках еліптичного кільця наведені вище. Ці значення одержані при розрахунку, який проводився на ЕОМ «Минск-22».

ЛІТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.
2. Мартынович Т. Л. Обобщение теоремы Бетти—Максвелла в двумерной теории упругости. Прикладная механика, т. II, в. 3, 1966.
3. Шереметьев М. П. Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1960.

УДК 593.3

Т. Л. МАРТИНОВИЧ, І. О. НІЩЕНКО

ПРО ОДИН СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ЗГИНУ АНІЗОТРОПНИХ ПЛИТ

Розглянемо тонку однорідну анізотропну плиту, серединна площина якої займає область S, обмежену простими гладкими замкнутими контурами L_1 та L_2 $(L=L_1+L_2)$. В кожній точці плити існує площина пружної симетрії, паралельна серединній площині плити.

1. Нехай внутрішній контур L_1 підкріплений тонким пружним стержнем постійного поперечного перерізу з жорсткістю A — на згин та жорсткістю $C=A/k$ — на кручення. Будемо вважати, що стержень спаяний з плитою до деформації і що одна з головних осей інерції поперечного перерізу стержня лежить в серединній площині плити. На стержень діють згинаючі моменти $m_1(s)$ та згинаючі зусилля $p_1 s$, а на контурі L_2 — згинаючі моменти $m_2(s)$ та згинаючі зусилля $p_2(s)$.

Якщо область S необмежена, то контур L_2 віддалений в нескінченність. Під час обходу область S залишається зліва.

Щоб одержати граничні умови задачі, мислено відокремимо стержінь від плити, а його дію на останню замінимо або зусиллями M_n, $N_n+\partial H_{sn}/\partial s$, або значеннями прогинів w та їх нормальної похідної $\partial w/\partial n$ точок контура L_1. Відповідно до такої заміни для плити можна розв'язувати або першу основну задачу, граничні умови для якої згідно з [3] в диференціальній формі мають вигляд:

$$dV=d\left[\left(q_1+i\frac{p_1}{\mu_1}\right)\varphi(z_1)+\left(\overline{q_1}+i\frac{\overline{p_1}}{\overline{\mu_1}}\right)\overline{\varphi(z_1)}+\right.$$

$$\left.+\left(q_2+i\frac{p_2}{\mu_2}\right)\psi(z_2)+\left(\overline{q_2}+i\frac{\overline{p_2}}{\overline{\mu_2}}\right)\overline{\psi(z_2)}\right]=\begin{cases}-I_0(t)\,dt & \text{на } L_1;\\ -I_2(t)\,dt & \text{на } L_2,\end{cases} \qquad (1.1)$$

або основну змішану задачу, граничні умови для якої такі:

$$dU=d\left[(1+i\mu_1)\varphi(z_1)+(1+i\overline{\mu_1})\overline{\varphi(z_1)}+(1+i\mu_2)\psi(z_2)+\right.$$

$$\left.+(1+i\overline{\mu_2})\overline{\psi(z_2)}\right]=-id\left[i\left(\frac{\partial w}{\partial n}+i\frac{\partial w}{\partial s}\right)\right] \quad \text{на} \quad L_1, \qquad (1.2)$$

$$dV=-\dot{I}_2(t)\,dt \text{ на } L_2.$$

Тут позначено

$$I_0(t)=M_n+i\int_{t_0}^{t}\left(N_n+\frac{\partial H_{sn}}{\partial s}\right)ds+iC_0,$$

$$I_j(t)=m_j(t)+i\int_{t_0}^{t}p_j(s)\,ds+iC_j \qquad (j=1,\ 2,\ldots),$$

μ_j — корені характеристичного рівняння, $z_j=x+\mu_j y$,