

ЛІТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.
2. Мартинович Т. Л. Обобщение теоремы Бетти—Максвелла в двумерной теории упругости. Прикладная механика, т. II, в. 3, 1966.
3. Шереметьев М. П. Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1960.

УДК 593.3

Т. Л. МАРТИНОВИЧ, І. О. НИЩЕНКО

ПРО ОДИН СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ЗГИНУ АНІЗОТРОПНИХ ПЛИТ

Розглянемо тонку однорідну анізотропну плиту, серединна площина якої займає область S , обмежену простими гладкими замкнутими контурами L_1 та L_2 ($L = L_1 + L_2$). В кожній точці плити існує площина пружної симетрії, паралельна серединній площині плити.

1. Нехай внутрішній контур L_1 підкріплений тонким пружним стержнем постійного поперечного перерізу з жорсткістю A — на згин та жорсткістю $C = A/k$ — на кручення. Будемо вважати, що стержень спаяний з плитою до деформації і що одна з головних осей інерції поперечного перерізу стержня лежить в серединній площині плити. На стержень діють згинаючі моменти $m_1(s)$ та згинаючі зусилля $p_1(s)$, а на контурі L_2 — згинаючі моменти $m_2(s)$ та згинаючі зусилля $p_2(s)$.

Якщо область S необмежена, то контур L_2 віддалений в нескінченність. Під час обходу область S залишається зліва.

Щоб одержати граничні умови задачі, мислено відокремимо стержень від плити, а його дію на останню замінимо або зусиллями M_n , $N_n + \partial H_{sn}/\partial s$, або значеннями прогинів w та їх нормальної похідної $\partial w/\partial n$ точок контура L_1 . Відповідно до такої заміни для плити можна розв'язувати або першу основну задачу, граничні умови для якої згідно з [3] в диференціальній формі мають вигляд:

$$dV = d \left[\left(q_1 + i \frac{p_1}{\mu_1} \right) \varphi(z_1) + \left(\bar{q}_1 + i \frac{\bar{p}_1}{\bar{\mu}_1} \right) \overline{\varphi(z_1)} + \right. \\ \left. + \left(q_2 + i \frac{p_2}{\mu_2} \right) \psi(z_2) + \left(\bar{q}_2 + i \frac{\bar{p}_2}{\bar{\mu}_2} \right) \overline{\psi(z_2)} \right] = \begin{cases} -I_0(t) dt & \text{на } L_1; \\ -I_2(t) dt & \text{на } L_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

або основну змішану задачу, граничні умови для якої такі:

$$dU = d \left[(1 + i\mu_1) \varphi(z_1) + (1 + i\bar{\mu}_1) \overline{\varphi(z_1)} + (1 + i\mu_2) \psi(z_2) + \right. \\ \left. + (1 + i\bar{\mu}_2) \overline{\psi(z_2)} \right] = -id \left[i \left(\frac{\partial w}{\partial n} + i \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] \quad \text{на } L_1, \quad (1.2)$$

$$dV = -I_2(t) dt \quad \text{на } L_2.$$

Тут позначено

$$I_0(t) = M_n + i \int_{t_0}^t \left(N_n + \frac{\partial H_{sn}}{\partial s} \right) ds + iC_0,$$

$$I_j(t) = m_j(t) + i \int_{t_0}^t p_j(s) ds + iC_j \quad (j=1, 2, \dots),$$

μ_j — корені характеристичного рівняння, $z_j = x + \mu_j y$,

$$p_j = \frac{h^3}{12} (a_{11} + a_{12} \mu_j^2 + 2\mu_j a_{16}),$$

$$q_j = \frac{h^3}{12} (a_{12} + a_{22} \mu_j^2 + 2\mu_j a_{26}),$$

$a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{16}, a_{26}$ — пружні характеристики матеріалу плити [1].

Домножимо рівності (1.1), (1.2) та їм комплексно спряжені на довільну функцію $F(z)$, голоморфну в області S , і проінтегруємо вздовж відповідних контурів. В результаті одержимо граничні умови у вигляді контурних інтегралів, що містять довільну функцію $F(z)$:

$$\begin{aligned} \int_L F(t) dV &= - \int_{L_1} F(t) I_0(t) dt - \int_{L_2} F(t) I_2(t) dt, \\ \int_L \overline{F(t)} dV &= - \int_{L_1} \overline{F(t)} I_0(t) dt - \int_{L_2} \overline{F(t)} I_2(t) dt, \\ \int_{L_1} F(t) dU + \int_{L_2} F(t) dV &= -i \int_{L_1} F(t) d \left[i \left(\frac{\partial w}{\partial n} + i \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] - \int_{L_1} F(t) I_1(t) dt, \\ \int_{L_1} \overline{F(t)} dU + \int_{L_2} \overline{F(t)} dV &= -i \int_{L_1} \overline{F(t)} d \left[i \left(\frac{\partial w}{\partial n} + i \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] - \int_{L_1} \overline{F(t)} I_1(t) dt. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Розглядаючи рівновагу та деформацію елемента стержня, що знаходиться під дією внутрішніх згинаючих та скручуючих моментів L_n, L_τ , зусиль $M_n, N_n + \partial H_{sn}/\partial s$ з боку плити, зовнішніх згинаючих моментів $m_1(s)$ та згинаючих зусиль $p_1(s)$, можна встановити, згідно з [2, 4], такі залежності:

$$\begin{aligned} d[i(L_n + iL_\tau)] &= iI_0(t) dt - iI_1(t) dt, \\ d \left[i \left(\frac{\partial w}{\partial n} + i \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] &= \frac{i}{2A} [(1+k)(L_n + iL_\tau) + (1-k)(L_n - iL_\tau)] dt. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Підставляючи (1.4) в (1.3), одержуємо інтегральні співвідношення, які служать для визначення функцій $\varphi(z_1), \psi(z_2)$, а також внутрішніх моментів в стержні L_n, L_τ :

$$\begin{aligned} \int_L F(t) dV &= -i \int_{L_1} i(L_n + iL_\tau) dF(t) - \int_{L_1} F(t) I_1(t) dt - \int_{L_2} F(t) I_2(t) dt, \\ \int_L \overline{F(t)} dV &= -i \int_{L_1} i(L_n + iL_\tau) d\overline{F(t)} - \int_{L_1} \overline{F(t)} I_1(t) dt - \int_{L_2} \overline{F(t)} I_2(t) dt, \\ \int_{L_1} F(t) dU + \int_{L_2} F(t) dV &= - \int_{L_2} F(t) I_2(t) dt + \\ &+ \frac{1}{2A} \int_{L_1} F(t) [(1+k)(L_n + iL_\tau) + (1-k)(L_n - iL_\tau)] dt, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\int_{L_1} \overline{F(t)} dU + \int_{L_1} \overline{F(t)} dV = - \int_{L_1} \overline{F(t)} I_2(t) dt + \\ + \frac{1}{2A} \int_{L_1} \overline{F(t)} [(1+k)(L_n + iL_\tau) + (1-k)(L_n - iL_\tau)] dt.$$

2. Розглянемо задачу про згин моментами M_x^∞ , M_y^∞ , M_{xy}^∞ анізотропної плити з еліптичним отвором, край якого підкріплений пружним стержнем.

Будемо за вихідну брати область S , яка розміщена між двома співфокусними еліпсами L_1 , L_2 , причому L_2 віддалений в нескінченність.

Конформно відображаємо область S на кільце, яке розміщене між концентричними колами γ_1 , γ_2 радіусів $\varrho_1=1$, $\varrho_2=\infty$, поклавши

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad |m| < 1, \quad (2.1)$$

де

$$R = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad m = \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1}$$

a_1 , b_1 — півосі еліпса L_1 .

Тоді, очевидно, функції

$$z_j = \omega_j(\zeta_j) = \frac{1}{2} \left\{ [(1+m) - i(1-m)\mu_j] \zeta_j + [(1+m) + i(1-m)\mu_j] \frac{1}{\zeta_j} \right\} \quad (2.2)$$

будуть конформно переводити відповідні області зміни z_1 , z_2 на зовнішність одиничного кола γ_1 , причому для контурних точок γ_1 змінні ζ_1 , ζ_2 набувають одне й те ж значення $\sigma = e^{i\alpha}$.

Функції $\Phi(\zeta_1) = \varphi[\omega_1(\zeta_1)]$, $\Psi(\zeta_2) = \psi[\omega_2(\zeta_2)]$, $F_1(\zeta) = F[\omega(\zeta)]$, голоморфні зовні одиничного кола γ_1 , включаючи нескінченно віддалену точку, можна розкласти в ряди Лорана, а величину $L_n + iL_\tau$ — в комплексний ряд Фур'є:

$$\Phi(\zeta_1) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta_1^{-n}, \quad \Psi(\zeta_2) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \zeta_2^{-n}, \\ F_1(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \zeta^{-n}, \quad L_n + iL_\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \sigma^n. \quad (2.3)$$

Сталі A_0 , B_0 визначаються з умов на нескінченності [3]. Підставивши (2.1), (2.3) в співвідношення (1.5) та виконавши інтегрування, одержимо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів A_n , B_n , α_n .

Ця система має такий вигляд:

$$\left(q_1 - i \frac{p_1}{\mu_1} \right) A_{j+1} + \left(q_2 - i \frac{p_2}{\mu_2} \right) B_{j+1} = -\bar{H}_3 + \bar{Q}_3 \delta_{j1}, \\ \left(q_1 + i \frac{p_1}{\mu_1} \right) A_{j+1} + \left(q_2 + i \frac{p_2}{\mu_2} \right) B_{j+1} = H_4 - Q_4 \delta_{j1}, \\ (1 - i\mu_1) A_{j+1} + (1 - i\mu_2) B_{j+1} = (\bar{Q}_1 + \bar{Q}_3) \delta_{j1} - \bar{H}_1, \\ (1 + i\mu_1) A_{j+1} + (1 + i\mu_2) B_{j+1} = -(Q_2 + Q_4) \delta_{j1} + H_2, \\ (j=1, 2, 3, \dots). \quad (2.4)$$

Тут введені позначення:

$$Q_1 = \left[(1-q_1) + i \left(\mu_1 - \frac{p_1}{\mu_1} \right) \right] A_0 + \left[(1-q_2) + i \left(\mu_2 - \frac{p_2}{\mu_2} \right) \right] B_0,$$

$$Q_2 = \left[(\bar{q}_1 - 1) + \left(\bar{\mu}_1 - \frac{\bar{p}_1}{\bar{\mu}_1} \right) \right] \bar{A}_0 + \left[(\bar{q}_2 - 1) + i \left(\bar{\mu}_2 - \frac{\bar{p}_2}{\bar{\mu}_2} \right) \right] \bar{B}_0,$$

$$Q_3 = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{2} R, \quad Q_4 = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty}{2} R,$$

$$H_1 = 0,5A^{-1} [(1+k)(\alpha_{j-1} - m\alpha_{j+1}) + (1-k)(\bar{\alpha}_{-j+1} - m\bar{\alpha}_{-j-1})] R,$$

$$H_2 = 0,5A^{-1} [(1+k)(\alpha_{-j-1} - m\alpha_{-j+1}) + (1-k)(\bar{\alpha}_{j+1} - m\bar{\alpha}_{j-1})] R,$$

$$H_3 = -\frac{j}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n (P_{|n-j+1|} - mP_{|n-j-1|}),$$

$$H_4 = \frac{j}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n (P_{|n+j+1|} - mP_{|n+j-1|}),$$

$$P_l = \int_{\Gamma_1^+} \frac{\sigma^l d\sigma}{V(m-\sigma^2)(1-m\sigma^2)} = \begin{cases} -4m^{\frac{l}{2}} \int_0^1 \frac{x^l dx}{V(1-x^2)(1-m^2x^2)} & \text{при } l \text{ парному;} \\ 0 & \text{при } l \text{ непарному.} \end{cases}$$

$$\delta_{jn} = \begin{cases} 1 & (j=n) \\ 0 & (j \neq n) \end{cases}$$

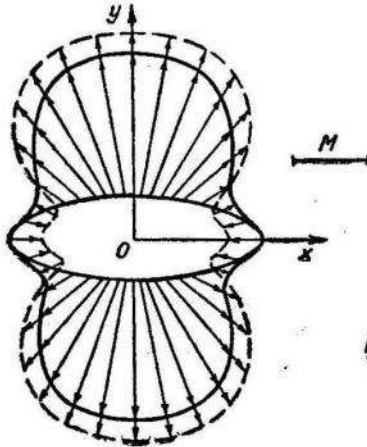


Рис. 1.

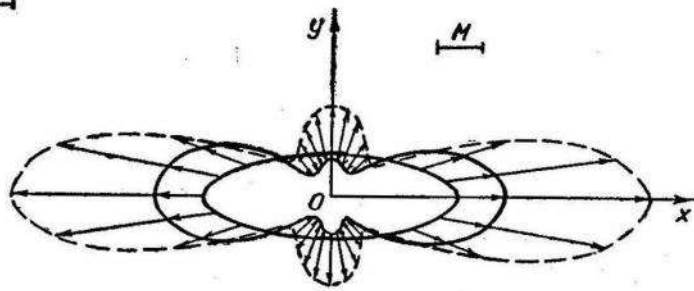


Рис. 2.

Виключивши з (2.4) A_{j+1} , B_{j+1} , дістанемо систему алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів α_n :

$$\begin{aligned} & \frac{[H_4(q_k \mu_k - ip_k) + \bar{H}_3(q_k \mu_k + ip_k)] \mu_1 \mu_2}{\mu_k (q_1 \mu_1 p_2 - q_2 \mu_2 p_1)} - \frac{\bar{H}_1(1+i\mu_k) + H_2(1-i\mu_k)}{(\mu_2 - \mu_1)} = \\ & = \left\{ \frac{[\bar{Q}_3(q_k \mu_k + ip_k) + Q_4(q_k \mu_k - ip_k)] \mu_1 \mu_2}{\mu_k (q_1 \mu_1 p_2 - q_2 \mu_2 p_1)} - \frac{Q_3(1+i\mu_k) + Q_4(1-i\mu_k)}{\mu_2 - \mu_1} - \right. \\ & \left. - \frac{\bar{Q}_1(1+i\mu_k) + Q_2(1-i\mu_k)}{\mu_2 - \mu_1} \right\} \delta_{j1}, \quad (k=1, 2), \quad (j=1, 2, 3, \dots). \quad (2.5) \end{aligned}$$

Для числового аналізу нами розв'язувалась укорочена система рівнянь (2.5) для анізотропної плити, виготовленої з авіаційної фанери, що має пружні характеристики [1]: $D_1 = 1,70 \cdot 10^5 \frac{h^3}{12}$, $D_2 = 0,14 \cdot 10^5 \frac{h^3}{12}$, $D_3 = 0,183 \cdot 10^5 \frac{h^3}{12}$, $D_4 = 0,07 \cdot 10^5 \frac{h^3}{12}$, $\nu_1 = 0,31$, $\nu_2 = 0,026$, $\mu_1 = 1,04 + 1,55i$, $\mu_2 = -1,04 + 1,55i$.

Крім того, було прийнято: $A = 2,00 \cdot 10^5 \frac{h^3}{12}$, $R = 10$, $k = 1$, $m = 0.5$.

Розподіл згинаючих моментів M_t вздовж лінії спаю підкріплюючого стержня з плитою показано на рисунках, причому рис. 1 відповідає випадку $M_x^\infty = M$, $M_y^\infty = H_{xy}^\infty = 0$, а рис. 2 — $M_x^\infty = H_{xy}^\infty = 0$, $M_y^\infty = M$. Пунктирною лінією показано розподіл тих же моментів в плиті без підкріплення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лехницький С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехтеориздат, М., 1957.
2. Лурье А. И. О малых деформациях криволинейных стержней. Труды Ленинградского политехнического ин-та, раздел физико-матем. наук, № 3, 1941.
3. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. Гостехтеориздат, 1951.
4. Шереметьев М. П. Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львовского ун-та, 1960.

УДК 539.311

Є. І. ЛУНЬ, А. О. СЯСЬКИЙ

ДО ВИЗНАЧЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ЖОРСТКОГО КІЛЬЦЯ НА ПОВЕРХНІ КРУГОВОГО ЦИЛІНДРА

Задача про концентрацію напружень в циліндричній оболонці з круговим отвором, край якого підкріплений жорстким кільцем, розглядалась в працях [7, 4] методом А. І. Лур'є [3] з використанням рівнянь класичної теорії оболонок.

В цій статті дається розв'язок цієї задачі при використанні рівнянь уточненої теорії оболонок типу Тимошенка [1, 2, 8], які певним чином враховують деформації поперечних зсувів і забезпечують можливість задовольнити п'ятьом граничним умовам на контурі отвору.

Розглянемо кругову циліндричну оболонку товщиною $2h$, радіусом R з круговим отвором, підкріпленим жорстким кільцем.

На середній поверхні оболонки вибираємо декартову (X, Y) і полярну півгеодезичну (ρ, λ) системи координат, початок яких збігається з центром отвору. Вісь OX направлена по твірній, вісь OY — по дотичній до напрямної, кут λ відраховується від твірної. Основний напружений стан задається зусиллями:

$$\begin{aligned} T_\rho^0 &= h(p+q) + h(p-q) \cos 2\lambda; \\ T_\lambda^0 &= h(p+q) - h(p-q) \cos 2\lambda; \\ S_{\rho\lambda}^0 &= -h(p-q) \sin 2\lambda. \end{aligned} \quad (1)$$