Для числового аналізу нами розв'язувалась укорочена система рівнянь (2.5) для анізотропної плити, виготовленої з авіаційної фанери, що має пружні характеристики [1]: $D_1=1{,}70\cdot 10^5\frac{h^3}{12}$, $D_2=0{,}14\cdot 10^5\frac{h^3}{12}$, $D_3=0{,}183\cdot 10^5\frac{h^3}{12}$, $D_k=0{,}07\cdot 10^5\frac{h^3}{12}$, $\nu_1=0{,}31$, $\nu_2=0{,}026$, $\mu_1=1{,}04+1{,}55i$, $\mu_2=-1{,}04+1{,}55i$.

Крім того, було прийнято: $A=2.00\cdot 10^5\frac{h^3}{12}$, $R=10$, $k=1$, $m=0.5$. Розподіл згинаючих моментів M_τ вздовж лінії спаю підкріплюючого стержня з плитою показано на рисунках, причому рис. 1 відповідає випадку $M_x^\infty=M$, $M_y^\infty=H_{xy}^\infty=0$, а рис. 2 — $M_x^\infty=H_{xy}^\infty=0$, $M_y^\infty=M$. Пунктирною лінією показано розподіл тих же моментів в плиті без підкріплення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехтеориздат, М., 1957.
2. Лурье А. И. О малых деформациях криволинейных стержней. Труды Ленинградского политехнического ин-та, раздел физико-матем. наук, № 3, 1941.
3. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. Гостехтеориздат, 1951.
4. Шереметьев М. П. Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львовского ун-та, 1960.

УДК 539.311

Є. І. ЛУНЬ, А. О. СЯСЬКИЙ

ДО ВИЗНАЧЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ЖОРСТКОГО КІЛЬЦЯ НА ПОВЕРХНІ КРУГОВОГО ЦИЛІНДРА

Задача про концентрацію напружень в циліндричній оболонці з круговим отвором, край якого підкріплений жорстким кільцем, розглядалась в працях [7, 4] методом А. І. Лур'є [3] з використанням рівнянь класичної теорії оболонок.

В цій статті дається розв'язок цієї задачі при використанні рівнянь уточненої теорії оболонок типу Тимошенка [1, 2, 8], які певним чином враховують деформації поперечних зсувів і забезпечують можливість задовольнити п'ятьом граничним умовам на контурі отвору.

Розглянемо кругову циліндричну оболонку товщиною $2h$, радіусом R з круговим отвором, підкріпленим жорстким кільцем.

На середній поверхні оболонки вибираємо декартову (X, Y) і полярну півгеодезичну (ϱ, λ) системи координат, початок яких збігається з центром отвору. Вісь OX направлена по твірній, вісь OY — по дотичній до напрямної, кут λ відраховується від твірної. Основний напружений стан задається зусиллями:

$$\begin{aligned} T_\rho^0&=h(p+q)+h(p-q)\cos 2\lambda;\\ T_\lambda^0&=h(p+q)-h(p-q)\cos 2\lambda; \qquad (1)\\ S_{\rho\lambda}^0&=-h(p-q)\sin 2\lambda. \end{aligned}$$

Для знаходження додаткового напруженого стану, викликаного наявністю отвору, використаємо ключові рівняння теорії типу Тимошенка пологих оболонок [1, 2]

$$\Delta\Delta\sigma + \frac{i\sqrt{3(1-\nu^2)}}{Rh}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} = 0,$$

$$\Delta\psi - \frac{2}{(1-\nu)\,\varepsilon}\,\psi = 0, \tag{2}$$

де

$$\sigma = \frac{2Eh^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\,w - i\varphi;$$

$$\varepsilon = \frac{h^2}{3k'(1-\nu^2)}\frac{E}{G_n}, \tag{3}$$

φ — функція напружень, ψ — функція, через яку виражаються кути повороту нормалі до серединної поверхні, w — нормальний прогин оболонки, k' — коефіцієнт зсуву.

Порядок системи диференціальних рівнянь (2) дає змогу у випадку, що розглядається, задовольнити на контурі отвору при $\varrho=\varrho_0$ п'ятьом граничним умовам:

$$u^*_\rho = u_\rho + u^0_\rho = 0, \qquad u^\circ_\lambda = u_\lambda + u^0_\lambda = 0, \qquad w = w_0 \cos\left(\frac{\rho_0}{R}\sin\lambda\right), \tag{4}$$

$$\gamma_\rho = 0,\ \gamma_\lambda = 0,$$

де u^0_ρ, u^0_λ — складові відповідних величин від основного напруженого стану; u_ρ, u_λ, w, γ_ρ, γ_λ — складові відповідних величин, викликані наявністю отвору; w_0 — переміщення центра кільця в напрямі нормалі до середньої поверхні оболонки.

Із лівих частин перших двох умов із (4) складаємо такі лінійні комбінації, які з врахуванням формул Коші та співвідношень пружності виражаються через тангенціальні зусилля і нормальний прогин оболонки. Отже, граничні умови задачі (4) замінюються такими:

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u^*_\lambda}{\partial\lambda} + u^*_\rho\right) = \frac{1}{2Eh}(T^*_\lambda - \nu T^*_\rho) - \frac{w^*}{R}\cos^2\lambda = 0,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left(u^*_\lambda - \frac{\partial u^*_\rho}{\partial\lambda}\right) = \frac{1}{2Eh}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(1+\nu)(T^*_\lambda - T^*_\rho) + \rho\frac{\partial}{\partial\rho}(T^*_\lambda - \nu T^*_\rho) - \right. \tag{5}$$

$$\left. -2(1+\nu)\frac{\partial}{\partial\lambda}S^*_{\rho\lambda}\right] + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{w^*}{R}\cos 2\lambda + \frac{1}{R}\frac{\partial w^*}{\partial\lambda}\sin 2\lambda - \frac{\rho}{R}\frac{\partial w^*}{\partial\rho}\cos^2\lambda\right] = 0,$$

$$w^* = w_0\cos\left(\frac{\rho_0}{R}\sin\lambda\right),$$

$$\gamma_\rho = \gamma_\lambda = 0.$$

Вирази для зусиль та моментів через функції $\sigma(\varrho,\lambda)$ та $\psi(\varrho,\lambda)$ подано в [2]. Для кутів повороту нормалі маємо формули:

$$\gamma_\rho = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - \frac{\partial f}{\partial\rho}, \qquad \gamma_\lambda = \frac{\partial\psi}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\lambda}, \tag{6}$$

де

$$f = w + \varepsilon\Delta w - \frac{\varepsilon^2}{D}\Delta_k\varphi. \tag{7}$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (2), який задовольняє умовам симетрії і зникає при $\varrho\to\infty$, можна взяти у вигляді [5, 6]

$$\sigma(\rho, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-1)^m \cos 2m\lambda \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(\alpha\rho)\left[J_{n-2m}(\alpha\rho)+J_{n+2m}(\alpha\rho)\right],$$

$$\psi(\rho, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} D_{2m} K_{2m}\left(\sqrt{\frac{2}{(1-\nu)\varepsilon}}\,\rho\right)\sin 2m\lambda, \tag{8}$$

де $C_n = A_n + i B_n$ — комплексні сталі; D_{2m} — дійсні сталі; J_n — функція Бесселя першого роду; $H_n^{(1)}$ — перша функція Ганкеля; K_{2m} — модифікована функція Бесселя другого роду;

$$\alpha = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{2\sqrt{2Rh}}(1+i), \qquad \varepsilon_m = \begin{cases} 1/2 & m=0; \\ 1 & m\neq 0. \end{cases}$$

Підставивши розв'язки в формі (8) в граничні умови (5), враховуючи при цьому (3) та (7), дістаємо

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(\rho)\cos 2m\lambda + \frac{1}{2Eh}(T_\lambda^0 - \nu T_\rho^0) = 0,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m(\rho)\sin 2m\lambda + \frac{1}{2Eh}\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big[(1+\nu)(T_\lambda^0 - T_\rho^0) +$$

$$+ \rho\frac{\partial}{\partial\rho}(T_\lambda^0 - \nu T_\rho^0) - 2(1+\nu)\frac{\partial}{\partial\lambda}S_{\rho\lambda}^0\Big] = 0, \tag{9}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(\rho)\cos 2m\lambda = w_0\cos\left(\frac{\rho_0}{R}\sin\lambda\right),$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_m(\rho)\cos 2m\lambda = 0,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} e_m(\rho)\sin 2m\lambda = 0,$$

де $a_m(\varrho), \ldots, e_m(\varrho)$ — ряди, які містять сталі A_n, B_n і D_{2m}. Загальні члени цих рядів не наводимо внаслідок їх громіздкості. Враховуючи вирази (1), умови (9) дамо у вигляді

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(\rho)\cos 2m\lambda = -\frac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)(p+q)h + (1+\nu)(p-q)h\cos 2\lambda\right],$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m(\rho)\sin 2m\lambda = \frac{2}{Eh}(1+\nu)(p-q)h\sin 2\lambda,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(\rho)\cos 2m\lambda = w_0\left[J_0\left(\frac{\rho_0}{R}\right) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}\left(\frac{\rho_0}{R}\right)\cos 2m\lambda\right], \tag{10}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_m(\rho)\cos 2m\lambda = 0,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} e_m(\rho)\sin 2m\lambda = 0.$$

В (10) права частина третьої умови розкладена в ряд Фур'є. Зрівнявши в рівностях (10) коефіцієнти при однакових $\cos 2m\lambda$ та $\sin 2m\lambda$, одержимо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення сталих, які входять в розв'язок задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лунь Є. І. Спрощення основних рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-матем., в. 3. Вид-во Львівського ун-ту. Львів, 1967.
2. Лунь Є. І. До визначення концентрації напружень біля кругового отвору в циліндричній оболонці. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-матем., в. 4. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1969.
3. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
4. Пирогов И. М. Концентрация напряжений в области жесткого кольца на поверхности кругового цилиндра. Сборник статей Всесоюзного заочного политехнического института, 16, 1957.
5. Приварніков А. К., Чехов В. М. Концентрація напружень навколо кругового отвору в циліндричній оболонці. ДАН УРСР, 1965, № 12.
6. Савін Г. М., Гузь О. М. До питання про концентрацію напружень навколо отворів у циліндричній оболонці. ДАН УРСР, 1964, № 11.
7. Шевляков Ю. А. Концентрація напружень в циліндричній оболонці з круговим вирізом на боковій поверхні. ДАН УРСР, 1965, № 2.
8. Шереметьев М. П., Лунь Е. И. Уточнение линейной моментной теории тонких оболочек. Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Ереван, 1962.

УДК 539.311

Д. В. ГРИЛІЦЬКИЙ, Б. І. ПОПОВИЧ

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ПРО ПРУЖНУ ВЗАЄМОДІЮ АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З КРУГЛИМ ІЗОТРОПНИМ ЯДРОМ

1. Задача про визначення пружної рівноваги необмеженої анізотропної пластинки з впаяним круглим ізотропним ядром при дії зосереджених силових або моментних факторів розв'язана Г. М. Савіним і Д. В. Грилицьким [4] при допущенні, що ядро спаяне з пластинкою по всьому обводу.

В даній роботі розглядається ця задача при умові, що колова лінія спаю послаблена декількома (наприклад, «m») вільними від зовнішніх напружень розрізами, а напружений стан викликається силою і моментом, які прикладені в області пластинки. При цьому вважаємо, що береги розрізів не контактують в процесі деформації; товщина ядра рівна товщині пластинки, яка має в кожній точці площину пружної симетрії, паралельну до серединної площини. Сукупність розрізів позначимо через $\gamma''(\gamma''=\gamma_1''+\gamma_2''+\ldots+\gamma_m'')$, а сукупність дуг спаю ядра з пластинкою — через $\gamma'(\gamma'=\gamma_1'+\gamma_2'+\ldots+\gamma_m')$.

Будемо користуватися декартовою системою координат з початком в центрі ядра, радіус якого приймемо рівним одиниці ($\gamma'+\gamma''=\gamma$ — одиничне коло).

Точку прикладення зосередженої сили з компонентами X, Y позначимо через $z_0^{(1)}=x_0^{(1)}+iy_0^{(1)}$, зосередженого моменту M — через $z_0^{(2)}=x_0^{(2)}+iy_0^{(2)}$. Згідно з постановкою задачі $|z_0^{(1)}|\geqslant 1$, $|z_0^{(2)}|\geqslant 1$.

Треба визначити напружений стан у пластинці та ядрі, зокрема напруження на коловій лінії розділу матеріалів.

При розв'язуванні задачі відокремимо ядро від пластинки і розглянемо окремо пружну рівновагу ядра і пружну рівновагу пластинки з круглим отвором, замінивши дію їх одне на друге на лініях спаю