В (10) права частина третьої умови розкладена в ряд Фур'є. Зрівнявши в рівностях (10) коефіцієнти при однакових $\cos 2m\lambda$ та $\sin 2m\lambda$, одержимо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення сталих, які входять в розв'язок задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лунь Є. І. Спрощення основних рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-матем., в. 3. Вид-во Львівського ун-ту. Львів, 1967.
2. Лунь Є. І. До визначення концентрації напружень біля кругового отвору в циліндричній оболонці. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-матем., в. 4. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1969.
3. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
4. Пирогов И. М. Концентрация напряжений в области жесткого кольца на поверхности кругового цилиндра. Сборник статей Всесоюзного заочного политехнического института, 16, 1957.
5. Приварніков А. К., Чехов В. М. Концентрація напружень навколо кругового отвору в циліндричній оболонці. ДАН УРСР, 1965, № 12.
6. Савін Г. М., Гузь О. М. До питання про концентрацію напружень навколо створів у циліндричній оболонці. ДАН УРСР, 1964, № 11.
7. Шевляков Ю. А. Концентрація напружень в циліндричній оболонці з круговим вирізом на боковій поверхні. ДАН УРСР, 1965, № 2.
8. Шереметьев М. П., Лунь Е. И. Уточнение линейной моментной теории тонких оболочек. Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Ереван, 1962.

УДК 539.311

Д. В. ГРИЛІЦЬКИЙ, Б. І. ПОПОВИЧ

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ПРО ПРУЖНУ ВЗАЄМОДІЮ АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З КРУГЛИМ ІЗОТРОПНИМ ЯДРОМ

1. Задача про визначення пружної рівноваги необмеженої анізотропної пластинки з впаяним круглим ізотропним ядром при дії зосереджених силових або моментних факторів розв'язана Г. М. Савіним і Д. В. Грилицьким [4] при допущенні, що ядро спаяне з пластинкою по всьому обводу.

В даній роботі розглядається ця задача при умові, що колова лінія спаю послаблена декількома (наприклад, «m») вільними від зовнішніх напружень розрізами, а напружений стан викликається силою і моментом, які прикладені в області пластинки. При цьому вважаємо, що береги розрізів не контактують в процесі деформації; товщина ядра рівна товщині пластинки, яка має в кожній точці площину пружної симетрії, паралельну до серединної площини. Сукупність розрізів позначимо через $\gamma''(\gamma''=\gamma_1''+\gamma_2''+\ldots+\gamma_m'')$, а сукупність дуг спаю ядра з пластинкою — через $\gamma'(\gamma'=\gamma_1'+\gamma_2'+\ldots+\gamma_m')$.

Будемо користуватися декартовою системою координат з початком в центрі ядра, радіус якого приймемо рівним одиниці ($\gamma'+\gamma''=\gamma$ — одиничне коло).

Точку прикладення зосередженої сили з компонентами X, Y позначимо через $z_0^{(1)}=x_0^{(1)}+iy_0^{(1)}$, зосередженого моменту M — через $z_0^{(2)}=x_0^{(2)}+iy_0^{(2)}$. Згідно з постановкою задачі $|z_0^{(1)}|\geqslant 1$, $|z_0^{(2)}|\geqslant 1$.

Треба визначити напружений стан у пластинці та ядрі, зокрема напруження на коловій лінії розділу матеріалів.

При розв'язуванні задачі відокремимо ядро від пластинки і розглянемо окремо пружну рівновагу ядра і пружну рівновагу пластинки з круглим отвором, замінивши дію їх одне на друге на лініях спаю шуканими контактними напруженнями σ_r і $\tau_{r\varphi}$, які визначаються із умови рівності зміщень на дугах спаю.

Граничні умови першої основної задачі для ядра мають вигляд [2]

$$\Phi_{01}(t)+\overline{\Phi_{01}(t)}-\frac{1}{t}\overline{\Phi'_{01}(t)}-\frac{1}{t^2}\overline{\Psi_{01}(t)}=\begin{cases}\sigma_r(t)+i\tau_{r\varphi}(t) & (t\in\gamma'),\\ 0 & (t\in\gamma'').\end{cases}$$

$$\Phi_{01}(t)+\overline{\Phi_{01}(t)}-t\Phi'_{01}(t)-t^2\Psi_{01}(t)=\begin{cases}\sigma_r(t)-i\tau_{r\varphi}(t) & (t\in\gamma'),\\ 0 & (t\in\gamma'').\end{cases}\quad(1.1)$$

В нашому випадку функції напружень $\Phi_{01}(t)$ і $\Psi_{01}(t)$ — голоморфні всередині одиничного кола.

З умов (1.1) визначаємо:

$$\Phi_1(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{f(t)\,dt}{t-\zeta}-i\bar{A}_0\zeta;$$

$$\Psi_1(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{\overline{f(t)}\,dt}{t-\zeta}+\frac{1}{\pi i\zeta^2}\int_{\gamma'}\frac{f(t)\,dt}{t-\zeta}-\frac{1}{2\pi i\zeta}\int_{\gamma'}\frac{f(t)\,dt}{(t-\zeta)^2}-i\frac{A_0+\bar{A}_0}{\xi},\quad(1.2)$$

де позначено

$$\Phi_1(\zeta)=i\zeta\Phi_{01}(\zeta);\quad \Psi_1(\zeta)=i\zeta\Psi_{01}(\zeta);\quad f(t)=it[\sigma_r(t)+i\tau_{r\varphi}(t)].\quad(1.3)$$

$$A_0=-i\Phi_1'(0).\quad(1.4)$$

Граничні умови першої основної задачі для анізотропної пластинки запишуться [1, 5]

$$2\,\mathrm{Re}\,[\varphi_2(z_1)+\psi_2(z_2)]=-\int_0^s Y_n\,ds+C_1,$$

$$2\,\mathrm{Re}\,[s_1\varphi_2(z_1)+s_2\psi_2(z_2)]=\int_0^s X_n\,ds+C_2.\quad(1.5)$$

Функції напружень φ_2 і ψ_2 у розглядуваному випадку мають вигляд [4]

$$\varphi_2(z_1)=A^{(1)}\ln(z_1-z_{01}^{(1)})+\frac{a_0^{(1)}}{z_1-z_{01}^{(2)}}+\varphi_{02}(z_1),$$

$$\psi_2(z_2)=A^{(2)}\ln(z_2-z_{02}^{(1)})+\frac{a_0^{(2)}}{z_2-z_{02}^{(2)}}+\psi_{02}(z_2),\quad(1.6)$$

де $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ — параметри, які залежать від величини сили; $a_0^{(1)}$, $a_0^{(2)}$ — параметри, які залежать від величини моменту; $\varphi_{02}(z_1)$ і $\psi_{02}(z_2)$ — голоморфні функції своїх змінних; $z_{0k}^{(j)}=x_0^{(j)}+s_k y_0^{(j)}$ $(k,\ j=1,2,\ldots)$.

Із граничних умов (1.5) знаходимо:

$$\Phi_2(\zeta_1)=F_1(\zeta_1)+\frac{1}{4\pi i\,(s_2-s_1)}\int_{\gamma'}\frac{(i-s_2)\overline{f(t)}-(i+s_2)f(t)}{t-\zeta_1}dt,$$

$$\Psi_2(\zeta_2)=F_2(\zeta_2)-\frac{1}{4\pi i\,(s_2-s_1)}\int_{\gamma'}\frac{(i-s_1)\overline{f(t)}-(i+s_1)f(t)}{t-\zeta_2}dt.\quad(1.7)$$

В формулах (1.7) введені позначення:

$$\Phi_2(\zeta_1)=i\zeta_1\frac{d}{d\zeta_1}[\omega_1(\zeta_1)];\qquad \Psi_2(\zeta_2)=i\zeta_2\frac{d}{d\zeta_2}[\omega_2(\zeta_2)].\quad(1.8)$$

$$z_k=\omega_k(\zeta_k)=\frac{1}{2}\left[(1-is_k)\,\zeta_k+(1+is_k)\frac{1}{\zeta_k}\right] \qquad (k=1,\ 2). \qquad (1.9)$$

$$F_1(\zeta_1)=\frac{iA^{(1)}\zeta_1}{\zeta_1-\zeta_{01}^{(1)}}-\frac{iB^{(1)}\zeta_1}{(\zeta_1-\zeta_{01}^{(2)})^2}-\frac{i}{s_2-s_1}\left[\sum_{k=1}^{2}(\bar{s}_k-s_2)\left(\frac{\overline{A^{(k)}}}{1-\zeta_1\overline{\zeta_{0k}^{(1)}}}-\frac{\overline{B^{(k)}}}{(1-\zeta_1\overline{\zeta_{0k}^{(2)}})^2}\right)\right],$$

$$(1.10)$$

$$F_2(\zeta_2)=\frac{iA^{(2)}\zeta_2}{\zeta_2-\zeta_{02}^{(1)}}-\frac{iB^{(2)}\zeta_2}{(\zeta_2-\zeta_{02}^{(2)})^2}+\frac{i}{s_2-s_1}\left[\sum_{k=1}^{2}(\bar{s}_k-s_1)\left(\frac{\overline{A^{(k)}}}{1-\zeta_2\overline{\zeta_{0k}^{(1)}}}-\frac{\overline{B^{(k)}}}{(1-\zeta_2\overline{\zeta_{0k}^{(2)}})^2}\right)\right],$$

де

$$B^{(k)}=\frac{2a_0^{(k)}[\zeta_{0k}^{(2)}]^2}{(1-is_k)[\zeta_{0k}^{(2)}]^2-(1+is_k)}; \qquad \zeta_{0k}^{(j)}=\frac{z_{0k}^{(j)}+\sqrt{[z_{0k}^{(j)}]^2-(1+s_k^2)}}{1-is_k} \qquad (1.11)$$

$$(k,\ j=1,2).$$

2. Задовольняючи умовам рівності на γ' похідних від зміщень по дуговій координаті φ, одержимо систему двох сингулярних інтегральних рівнянь відносно двох шуканих функцій $f(\sigma)$ і $\overline{f(\sigma)}$

$$\begin{gathered}\frac{b_0}{\pi i}\int\limits_{\gamma'}\frac{f(t)\,dt}{t-\sigma}-\frac{\bar{b}_0}{\pi i}\int\limits_{\gamma'}\frac{\overline{f(t)}\,dt}{t-\sigma}-[af(\sigma)+\bar{a}\overline{f(\sigma)}]=G_1(\sigma),\\ \frac{d_0}{\pi i}\int\limits_{\gamma'}\frac{f(t)\,dt}{t-\sigma}+\frac{\bar{d}_0}{\pi i}\int\limits_{\gamma'}\frac{\overline{f(t)}\,dt}{t-\sigma}-[cf(\sigma)-\bar{c}\,\overline{f(\sigma)}]=G_2(\sigma)\end{gathered} \qquad (2.1)$$

$$(\sigma\in\gamma').$$

В рівняннях (2.1) позначено:

$$G_1(\sigma)=\frac{i(1+\varkappa)}{\mu}\left(\frac{A_0}{\sigma}-\bar{A}_0\sigma\right)-4\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{A_1^{(k)}\sigma}{\sigma-\zeta_{0k}^{(1)}}+\frac{\overline{A_1^{(k)}}}{1-\sigma\overline{\zeta_{0k}^{(1)}}}-\frac{B_1^{(k)}\sigma}{(\sigma-\zeta_{0k}^{(2)})^2}-\frac{\overline{B_1^{(k)}}\sigma}{(1-\sigma\overline{\zeta_{0k}^{(2)}})^2}\right],$$

$$G_2(\sigma)=-\frac{i(1+\varkappa)}{\mu}\left(\frac{A_0}{\sigma}+\bar{A}_0\sigma\right)- \qquad (2.2)$$

$$-4\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{iA_2^{(k)}\sigma}{\sigma-\zeta_{0k}^{(1)}}+\frac{i\overline{A_2^{(k)}}}{1-\sigma\overline{\zeta_{0k}^{(1)}}}-\frac{iB_2^{(k)}\sigma}{(\sigma-\zeta_{0k}^{(2)})^2}-\frac{i\overline{B_2^{(k)}}\sigma}{(1-\sigma\overline{\zeta_{0k}^{(2)}})^2}\right],$$

де

$$\begin{aligned}A_1^{(k)}&=iA^{(k)}\left[p_k+\frac{\bar{p}_1(s_k-\bar{s}_2)-\bar{p}_2(s_k-\bar{s}_1)}{\bar{s}_2-\bar{s}_1}\right];\\ A_2^{(k)}&=iA^{(k)}\left[q_k+\frac{\bar{q}_1(s_k-\bar{s}_2)-\bar{q}_2(s_k-\bar{s}_1)}{\bar{s}_2-\bar{s}_1}\right].\end{aligned} \qquad (k=1,2) \qquad (2.3)$$

$B_1^{(k)}$ і $B_2^{(k)}$ визначаються, відповідно, першою і другою формулами (2.3), в яких $A^{(k)}$ замінено на $B^{(k)}$;

$$a=\frac{\varkappa-1}{2\mu}-\frac{p_1(i+s_2)+p_2(i+s_1)}{s_2-s_1}-\frac{\bar{p}_1(i+\bar{s}_2)-\bar{p}_2(i+\bar{s}_1)}{\bar{s}_2-\bar{s}_1},$$

$$b_0=-\frac{\varkappa+1}{2\mu}-\frac{p_1(i+s_2)+p_2(i+s_1)}{s_2-s_1}+\frac{\bar{p}_1(i+\bar{s}_2)-\bar{p}_2(i+\bar{s}_1)}{\bar{s}_2-\bar{s}_1},$$

$$c = \frac{\varkappa-1}{2\mu} + \frac{q_1(1-is_2)-q_2(1-is_1)}{s_2-s_1} + \frac{\bar{q}_1(1-i\bar{s}_2)-\bar{q}_2(1-i\bar{s}_1)}{\bar{s}_2-\bar{s}_1}, \quad (2.4)$$

$$d_0 = -\frac{\varkappa+1}{2\mu} + \frac{q_1(1-is_2)-q_2(1-is_1)}{s_2-s_1} - \frac{\bar{q}_1(1-i\bar{s}_2)-\bar{q}_2(1-i\bar{s}_1)}{\bar{s}_2-\bar{s}_1};$$

p_k, q_k $(k=1,2)$ — відомі параметри [1, 5].

Система сингулярних інтегральних рівнянь (2.1) розв'язується в замкнутому вигляді. $2m$ невідомих сталих, які ввійшли в розв'язок системи, визначаються з умови однозначності зміщень на кожному із розрізів γ_j'' $(j=1, 2, \ldots, m)$

$$\int\limits_{\gamma_j''} \frac{\frac{\partial}{\partial\varphi}[u_2(\sigma)-u_1(\sigma)]}{\sigma}\, d\sigma=0, \qquad \int\limits_{\gamma_j''} \frac{\frac{\partial}{\partial\varphi}[v_2(\sigma)-v_1(\sigma)]}{\sigma}\, d\sigma=0, \quad (2.5)$$

де u_1, v_1 і u_2, v_2 — декартові компоненти вектора переміщень в ядрі і, відповідно, в пластинці.

На основі розв'язку системи рівнянь (2.1) визначаються функції напружень як в ядрі, так і в пластинці, а також контактні напруження. Для визначення постійної A_0 служить рівність (1.4).

3. Розглянемо випадок одного розрізу на лінії спаю. Запишемо для цього випадку остаточні вирази для функцій напружень в ядрі і шайбі

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \cdot W_k(\zeta) - i\bar{A}_0\zeta,$$
$$\Psi_1(\zeta) = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} \sum_{k=1}^{2} \left\{\left[(-1)^k + \frac{\lambda_k}{\zeta^2}\right] \cdot W_k(\zeta) - \frac{\lambda_k}{\zeta}\frac{d}{d\zeta}W_k(\zeta)\right\} - i\,\frac{A_0+\bar{A}_0}{\zeta}. \quad (3.1)$$

$$\Phi_2(\zeta_1) = F_1(\zeta_1) + \frac{1}{2(s_2-s_1)(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=1}^{2} [(-1)^k(i-s_2)-\lambda_k(i+s_2)]\, W_k(\zeta),$$
$$\Psi_2(\zeta_2) = F_2(\zeta_2) - \frac{1}{2(s_2-s_1)(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=1}^{2} [(-1)^k(i-s_1)-\lambda_k(i+s_1)]\, W_k(\zeta). \quad (3.2)$$

В формулах (3.1), (3.2) позначено:

$$W_k(\zeta) = \nu_k(\zeta) - X_{0k}(\zeta)\,[\Omega_k(\zeta) - D_0^{(k)}] \qquad (k=1,\ 2). \quad (3.3)$$

$$\nu_k(\zeta) = \frac{1}{2R_k}[G_1(\zeta)+N_kG_2(\zeta)] \qquad (k=1,2); \quad \lambda_1=d_2; \quad \lambda_2=-d_1. \quad (3.4)$$

$\Omega_k(\zeta)$ дорівнює сумі головних частин полюсів функції $\frac{\nu_k(\zeta)}{X_{0k}(\zeta)}$ в точках $\zeta_{0k}^{(j)}$, $\frac{1}{\zeta_{0k}^{(j)}}$, 0, ∞.

Під функцією

$$X_{0k}(\zeta) = (\zeta-e^{i\theta})^{-\frac{1}{2}+i\beta_k}(\zeta-e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}-i\beta_k} \qquad (k=1,\ 2) \quad (3.5)$$

розуміється та вітка, яка при великих $|\zeta|$ має розклад

$$X_{0k}(\zeta)=\frac{1}{\zeta}+\frac{a_{-2}^{(k)}}{\zeta^2}+\ldots;$$

$$\beta_k=\frac{\ln g_k}{2\pi},\quad g_k=\frac{R_k+Q_k}{R_k-Q_k},\quad R_k=b_0+N_kd_0,\quad Q_k=a+N_kc;\ (k=1,\ 2)\qquad (3.6)$$

Θ — центральний кут, що визначає положення дуги γ''.

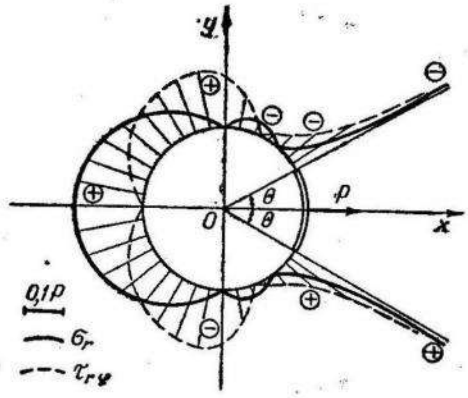


Рис. 1.

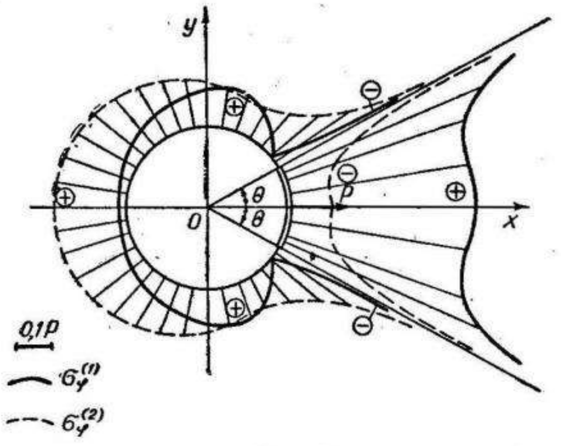


Рис. 2.

Параметри N_k і d_k $(k=1{,}2)$ визначаються із співвідношення:

$$\frac{b_0+Nd_0}{-(\bar{b}_0-N\bar{d}_0)}=\frac{a+Nc}{\bar{a}-\bar{N}c}=\frac{1}{d}.\qquad (3.3)$$

$D_0^{(k)}$ визначається по формулі

$$D_0^{(k)}=\lim_{|\zeta|\to 0}\left[\Omega_k(\zeta)-\frac{\nu_k(\zeta)}{X_{0k}(\zeta)}\right]\qquad (k=1,\ 2).\qquad (3.8)$$

Контактні напруження визначаються з допомогою формул:

$$\sigma_r(t)=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\sum_{k=1}^{2}\frac{\lambda_k(1+g_k)}{g_k\cdot t}X_{0k}^{+}(t)\left[\Omega_k(t)-D_0^{(k)}\right]\right\},\qquad (t\in\gamma')$$

$$\tau_{r\varphi}(t)=\mathrm{Im}\left\{\frac{i}{\lambda_1+\lambda_2}\sum_{k=1}^{2}\frac{\lambda_k(1+g_k)}{g_k\cdot t}X_{0k}^{+}(t)\left[\Omega_k(t)-D_0^{(k)}\right]\right\}.\qquad (3.9)$$

4. На рис. 1 і 2 показані графіки розподілу контактних і відповідно кільцевих напружень на коловій лінії розділу алюмінієвої шайби (ядра) і пластинки з текстоліту СВАМ із зв'язуючим БФ-4 [3] при наявності одного розрізу, який характеризується центральним кутом $2\Theta=60°$, при дії сили P, прикладеної в точці пластинки $z_0^{(1)}=x_0^{(1)}=1$ і направленої вздовж осі Ox.

Кільцеві напруження в ядрі позначені через $\sigma_\varphi^{(1)}$, в пластинці — через $\sigma_\varphi^{(2)}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1957.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.

3. Рабинович А. Л., Верховский И. А. Об упругих постоянных ориентированных стеклопластиков. Инж. ж., 1964, т. IV, в. 1.

4. Савин Г. Н., Грилицкий Д. В. Об определении напряженного состояния в анизотропной пластинке с упругим ядром. «Прикладная механика», 1965, т. 1, в. 1.

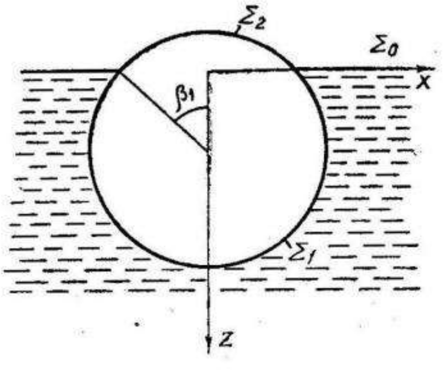
5. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. «Наукова думка», Киев, 1968.

УДК 533,6.013.42

О. В. БЛАЖІЄВСЬКА

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ЗАМКНЕНОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ НА ПОВЕРХНІ РІДИНИ

Розглянемо замкнену пружну сферичну оболонку, яка плаває на поверхні рідини так, що площина плавання розміщується на довільній, меншій від радіуса оболонки віддалі від екваторіальної площини оболонки (див. рисунок).



Вважаючи, що рідина ідеальна та нестислива, а оболонка — безмоментна та безінерційна, будемо досліджувати власні малі коливання оболонки. Хвильовим рухом на вільній поверхні рідини нехтуватимемо.

Введемо тороїдальні координати α, β, φ, які зв'язані з декартовими координатами x, y, z, співвідношеннями [5]

$$x=\frac{a\,\mathrm{sh}\,\alpha\cos\varphi}{\mathrm{ch}\,\alpha-\cos\beta};\qquad y=\frac{a\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\varphi}{\mathrm{ch}\,\alpha-\cos\beta};$$

$$z=\frac{a\sin\beta}{\mathrm{ch}\,\alpha-\cos\beta},$$

де a — радіус ватерлінії.

В цих координатах вільна поверхня рідини Σ_0 є координатною поверхнею $\beta=0$; поверхня випромінювання Σ_1 є координатною поверхнею $\beta=\beta_1\left(0<\beta_1\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$; незанурена в рідину поверхня оболонки Σ_2 є координатною поверхнею $\beta=\beta_2=-\pi+\beta_1$. В об'ємі, який займає рідина, координата α змінюється в інтервалі $[0,\infty]$, координата φ, яка є звичайним полярним кутом, — в інтервалі $[-\pi,\pi]$; координата β — в інтервалі $[0,\beta_1]$. Безмежно віддаленій точці відповідають координати $\alpha=0$, $\beta=0$.

Розглянемо гармонійні коливання, при яких динамічні нормальні переміщення оболонки w^* та потенціал швидкостей рідини Φ^* зображуються у вигляді

$$w^*(\alpha,\varphi,t)=w(\alpha,\varphi)e^{i\omega t};\qquad \Phi^*(\alpha,\beta,\varphi,t)=\Phi(\alpha,\beta,\varphi)e^{i\omega t}.$$

У лінійній постановці розглядувана задача зводиться до розв'язання рівнянь руху оболонки, які на основі [1] можна записати у вигляді

$$(\nabla_i^2+1-\nu)\left(w_i-\frac{R^2}{Eh}z_i\right)=-(1+\nu)w_i\ \ (i=1,2),\tag{1}$$

та до знаходження розв'язків рівняння руху рідини [3]

$$\Delta\Phi=0,\tag{2}$$