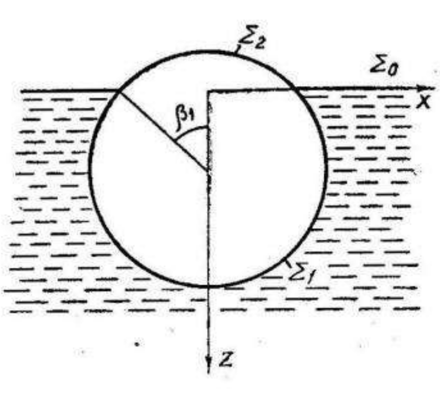
3. Рабинович А. Л., Верховский И. А. Об упругих постоянных ориентированных стеклопластиков. Инж. ж., 1964, т. IV, в. 1.
4. Савин Г. Н., Грилицкий Д. В. Об определении напряженного состояния в анизотропной пластинке с упругим ядром. «Прикладная механика», 1965, т. 1, в. 1.
5. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. «Наукова думка», Киев, 1968.

УДК 533,6.013.42

О. В. БЛАЖІЄВСЬКА

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ЗАМКНЕНОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ НА ПОВЕРХНІ РІДИНИ

Розглянемо замкнену пружну сферичну оболонку, яка плаває на поверхні рідини так, що площина плавання розміщується на довільній, меншій від радіуса оболонки віддалі від екваторіальної площини оболонки (див. рисунок).



Вважаючи, що рідина ідеальна та нестислива, а оболонка — безмоментна та безінерційна, будемо досліджувати власні малі коливання оболонки. Хвильовим рухом на вільній поверхні рідини нехтуватимемо.

Введемо тороїдальні координати α, β, φ, які зв'язані з декартовими координатами x, y, z, співвідношеннями [5]

$$x=\frac{a\,\mathrm{sh}\,\alpha\cos\varphi}{\mathrm{ch}\,\alpha-\cos\beta};\qquad y=\frac{a\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\varphi}{\mathrm{ch}\,\alpha-\cos\beta};$$

$$z=\frac{a\sin\beta}{\mathrm{ch}\,\alpha-\cos\beta},$$

де a — радіус ватерлінії.

В цих координатах вільна поверхня рідини Σ_0 є координатною поверхнею $\beta=0$; поверхня випромінювання Σ_1 є координатною поверхнею $\beta=\beta_1\left(0<\beta_1\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$; незанурена в рідину поверхня оболонки Σ_2 є координатною поверхнею $\beta=\beta_2=-\pi+\beta_1$. В об'ємі, який займає рідина, координата α змінюється в інтервалі $[0,\infty]$, координата φ, яка є звичайним полярним кутом, — в інтервалі $[-\pi,\pi]$; координата β — в інтервалі $[0,\beta_1]$. Безмежно віддаленій точці відповідають координати $\alpha=0$, $\beta=0$.

Розглянемо гармонійні коливання, при яких динамічні нормальні переміщення оболонки w^* та потенціал швидкостей рідини Φ^* зображуються у вигляді

$$w^*(\alpha,\varphi,t)=w(\alpha,\varphi)e^{i\omega t};\qquad \Phi^*(\alpha,\beta,\varphi,t)=\Phi(\alpha,\beta,\varphi)e^{i\omega t}.$$

У лінійній постановці розглядувана задача зводиться до розв'язання рівнянь руху оболонки, які на основі [1] можна записати у вигляді

$$(\nabla_i^2+1-\nu)\left(w_i-\frac{R^2}{Eh}z_i\right)=-(1+\nu)w_i\ \ (i=1,2),\tag{1}$$

та до знаходження розв'язків рівняння руху рідини [3]

$$\Delta\Phi=0,\tag{2}$$

що задовольняють такі умови:

$$\Phi=0 \text{ на } \Sigma_0; \tag{3}$$

$$\frac{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}=-i\omega w_1 \qquad \text{на} \quad \Sigma_1, \tag{4}$$

$$\lim_{\alpha\to 0\ \ \beta\to 0} \operatorname{grad}\Phi=0, \tag{5}$$

де R — радіус сфери; h — товщина оболонки; E — модуль пружності; ν — коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки; $Z_1=i\varrho\omega\Phi(\alpha, \beta_1, \varphi)$ та $Z_2=0$ — амплітуди сил, що діють по зовнішній нормалі до поверхні Σ_1 та Σ_2 відповідно; $Z_1|_{\alpha=\infty}=Z_2$; ϱ — густина рідини; w_1 та w_2 — амплітуди нормальних динамічних зміщень оболонки Σ_1 та Σ_2;

$$\Delta=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

$$\nabla_i^2=\frac{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta_i)^2}{\operatorname{sh}\alpha\sin^2\beta_i}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha}\frac{\partial^2}{d\varphi^2}\right] \qquad (i=1, 2). \tag{6}$$

При цьому амплітуди дотичних переміщень u_i, v_i та зусиль N_i, S_i на лініях $\alpha=\text{const}$ поверхонь Σ_i $(i=1, 2)$ визначаються такими формулами:

$$u_i=\frac{R^2}{a}(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta_i)\left[\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha}\frac{\partial\varkappa_i}{\partial\varphi}+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(w_i-\frac{R^2}{Eh}Z_i\right)\right];$$

$$v_i=\frac{R^2}{a}(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta_i)\left[-\frac{\partial\varkappa_i}{\partial\alpha}+\frac{1}{R\operatorname{sh}\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(w_i-\frac{R^2}{Eh}Z_i\right)\right]; \tag{7}$$

$$N_i=-\frac{Eh}{1+\nu}\left[\frac{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta_i}{a\operatorname{sh}\alpha}\frac{\partial v_i}{\partial\varphi}+\frac{1-\operatorname{ch}\alpha\cos\beta_i}{a\operatorname{sh}\alpha}u_i+\frac{1}{R}\left(w_i-\frac{R^2}{Eh}Z_i\right)\right];$$

$$S_i=\frac{Eh}{1+\nu}\left[\frac{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta_i}{a\operatorname{sh}\alpha}\frac{\partial u_i}{\partial\varphi}-\frac{1-\operatorname{ch}\alpha\cos\beta_i}{a\operatorname{sh}\alpha}v_i+\varkappa_i\right].$$

Тут χ_i — нормальне кручення оболонки, що знаходиться з рівняння $(\nabla_i^2+2)\chi_i=0$.

Розв'язок рівняння (2), який задовольняє умову (5) і обмежений при $\alpha=\infty$, набирає вигляду [5]

$$\Phi=\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta}\sum_{m=0}^{\infty}e^{im\varphi}\int_0^{\infty}[A_m(\tau)\operatorname{ch}(\beta\tau)+B_m(\tau)\operatorname{sh}(\beta\tau)]P^m_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau, \tag{8}$$

де $P^m_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)$ — приєднана сферична функція.

З умови (3), використовуючи узагальнене перетворення Меллера—Фока [5], одержимо $A_m=0$.

Отже,

$$\Phi=\sum_{m=0}^{\infty}\Phi_m(\alpha, \beta)e^{im\varphi}=\sqrt{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)}\sum_{m=0}^{\infty}e^{im\varphi}\int_0^{\infty}B_m(\tau)\operatorname{sh}(\beta\tau)P^m_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau. \tag{9}$$

Згідно з умовою (4), нормальне зміщення зануреної частини оболонки визначається у вигляді

$$w_1(\alpha, \varphi) = \frac{i}{\omega a}\sum_{m=0}^{\infty} e^{im\varphi}\left\{\sqrt{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta_1)^3}\int_0^{\infty} B_m(\tau)\,\tau\operatorname{ch}(\beta_1\tau)\,P^m_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin\beta_1}{2}\sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta_1}\int_0^{\infty} B_m(\tau)\operatorname{sh}(\beta_1\tau)\,P^m_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau\right\}. \quad (10)$$

Після підстановки виразу (10) у рівняння коливань оболонки (1) для визначення кожної з функцій $B_m(\tau)$, яка описує форму коливань з $2m$ вузловими меридіанами, дістанемо однорідне інтегральне рівняння

$$\int_0^{\infty} B_m(\tau)\left[\lambda K_{1m}(\alpha, \tau) - K_{2m}(\alpha, \tau)\right] d\tau = 0, \quad (11)$$

ядро якого залежить від параметра

$$\lambda = \frac{R^3\rho\omega^2}{Eh} - \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Тут

$$K_{1m} = \left\{\left(\frac{1}{2} - \tau^2\right)\operatorname{ch}^2\alpha + \left(2\tau^2 - \frac{1}{2}\right)\cos\beta_1\cdot\operatorname{ch}\alpha + \sin^2\beta_1\left(\tau^2 + \frac{5}{4} - \nu\right) - \tau^2\right\}\times$$

$$\times\operatorname{sh}(\beta_1\tau)P^m_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) + (\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta_1)\operatorname{sh}(\beta_1\tau)\operatorname{sh}\alpha\frac{d}{d\alpha}P^m_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha);$$

$$K_{2m} = \sin\beta_1\left\{\left[\left(\frac{7}{2} - \tau^2\right)\operatorname{ch}^3\alpha + (3\tau^2 - 6)\cos\beta_1\cdot\operatorname{ch}^2\alpha + \right.\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1 - 12\tau^2}{4}\cos^2\beta_1 + \frac{5}{4}\right)\operatorname{ch}\alpha + \cos^3\beta_1\left(\tau^2 + \frac{9}{4}\right) - \frac{5}{4}\cos\beta_1\right]\times$$

$$\times\tau\operatorname{ch}(\beta_1\tau)P^m_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) + 3(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta_1)^2\tau\operatorname{ch}(\beta_1\tau)\operatorname{sh}\alpha\frac{d}{d\alpha}P^m_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) +$$

$$\left. + \frac{1+\nu}{2}\sin^3\beta_1\operatorname{sh}(\beta_1\tau)P^m_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\right\}.$$

За допомогою узагальненого інтегрального перетворення Меллера—Фока можна записати рівняння (11) у вигляді

$$B_m(\tau) + \int_0^{\infty} B_m(\mu)\left[\lambda L_{1m}(\tau, \mu) + L_{2m}(\tau, \mu)\right] d\mu = 0. \quad (13)$$

Виразів L_{1m} та L_{2m} ми не наводимо тут внаслідок їх громіздкості. Інтегральні рівняння типу (13) досліджувались у роботі [2], в якій доведено, що система власних функцій таких рівнянь повна, і в якій дана оцінка власних чисел. Згідно з цією оцінкою власні числа рівняння (13) є дійсні і додатні.

При обчисленні власного числа λ доцільно користуватися рівняннями (11). Кожне з цих рівнянь розв'язуємо узагальненим (проективним) методом Бубнова—Гальоркіна [4]. При виборі системи координатних функцій враховуємо, що [5]

$$B_m(\tau)=(-1)^m \frac{\tau \operatorname{th} \pi\tau}{\operatorname{sh}\beta\tau} \int_0^\infty \Phi_m(\alpha, \beta)(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)^{-1/2} P^m_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) \operatorname{sh}\alpha d\alpha.$$

Оскільки $P^m_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)$ є парною функцією від τ, то кожна з функцій $B_m(\tau)$ є непарною. Умови спряження на ватерлінії виконуватимуться при належному виборі сталих в розв'язках w_2, χ_1, χ_2, якщо записати функції $B_m(\tau)$ у вигляді

$$B_m(\tau)=\frac{\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau}\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}[\tau^{2(n-1)}-\varepsilon_{mn}(-1)^n] \qquad \left(\varepsilon_{mn}=\begin{cases}0 \text{ при } m=0,\ 1;\ n=1\\ 1 \text{ при } m=0,\ 1;\ n\neq 1\end{cases}\right) \tag{14}$$

Коефіцієнти b_{mn} визначимо з умови ортогональності нев'язки до повної в підпросторі M_2 [4] системи функцій t^3, t^4, $t^5, \ldots \left(t=\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha}\right)$. Це дає систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda c^m_{nk}-d^m_{nk})\, b_{mn}=0. \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \tag{15}$$

коефіцієнти якої при кожному фіксованому значенні m визначаються формулами:

$$c^m_{nk}=\int_0^\infty\int_0^\infty K_{1m}(\alpha, \tau)\frac{\tau^{2n-1}-\varepsilon_{mn}\tau(-1)^n}{\operatorname{ch}\pi\tau}\frac{\operatorname{sh}\alpha}{(\operatorname{ch}\alpha)^{k+2}}d\alpha\, d\tau;$$

$$d^m_{nk}=\int_0^\infty\int_0^\infty K_{2m}(\alpha, \tau)\frac{\tau^{2n-1}-\varepsilon_{mn}\tau(-1)^n}{\operatorname{ch}\pi\tau}\frac{\operatorname{sh}\alpha}{(\operatorname{ch}\alpha)^{k+2}}d\alpha\, d\tau.$$

При обчисленні коефіцієнтів c^m_{nk} та d^m_{nk} враховуємо, що

$$\sqrt{2}\int_0^\infty \frac{\tau^{2n-1}}{\operatorname{ch}\pi\tau}\operatorname{sh}(\beta\tau)P^m_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\,d\tau=\sqrt{(x^2-1)^m}\frac{\partial^{2n+m-1}}{\partial x^m\,\partial\beta^{2n-1}}(x+\cos\beta)^{-1/2};$$

$$\sqrt{2}\int_0^\infty \frac{\tau^{2n}}{\operatorname{ch}\pi\tau}\operatorname{ch}(\beta\tau)P^m_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\,d\tau=\sqrt{(x^2-1)^m}\frac{\partial^{2n+m}}{\partial x^m\,\partial\beta^{2n}}(x+\cos\beta)^{-1/2};$$

$$\sqrt{2}\int_0^\infty \frac{\tau^{2n-1}}{\operatorname{ch}\pi\tau}(x^2-1)\operatorname{sh}(\beta\tau)\frac{d}{dx}P^m_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\,d\tau=$$
$$=\sqrt{(x^2-1)^m}\frac{\partial^{2n+m}}{\partial x^{m+1}\partial\beta^{2n-1}}(x+\cos\beta)^{-1/2};$$

$$\sqrt{2}\int_0^\infty \frac{\tau^{2n}}{\operatorname{ch}\pi\tau}(x^2-1)\operatorname{sh}(\beta\tau)\frac{d}{dx}P^m_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\,d\tau=$$
$$=\sqrt{(x^2-1)^m}\frac{\partial^{2n+m+1}}{\partial x^{m+1}\,\partial\beta^{2n}}(x+\cos\beta)^{-1/2};$$

Умова нетривіальності розв'язку системи (15) дає частотне рівняння

$$\det|\lambda c_{nk}^{m} - d_{nk}^{m}| = 0. \tag{16}$$

Корені цього рівняння знаходяться методом редукції. Якщо обмежитись визначником N-го порядку, то у відповідному N-му наближенні одержимо N значень чисел $\Omega = \sqrt{\lambda + \frac{1}{2}}$, які пропорціональні частотам власних коливань із заданим числом вузлових меридіанів.

Оскільки в N-му наближенні рівняння (16) є поліномом N-го порядку відносно параметра λ, то для знаходження коефіцієнтів цього полінома досить обчислити значення функції $f_m(\lambda) = \det|\lambda c_{nk}^{m} - d_{nk}^{m}|$ при $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, N$ і побудувати для неї інтерполяційний поліном Лагранжа, який точно співпадає з характеристичним поліномом (16).

ЛІТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Избранные труды, т. 1. М., 1962.
2. Келдыш М. В. О собственных функциях и собственных значениях некоторых классов несамосопряженных уравнений. ДАН, т. 77, 1951, стр. 11—14.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, Физматгиз, ч. 1. М., 1963.
4. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. «Наука», М., 1965, стр. 317.
5. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости, Физматгиз, М.—Л., 1963.

УДК 517.944

І. О. ПРУСОВ

ПРО ОДИН РОЗВ'ЯЗОК ДЕЯКИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ

1. Основні задачі для області, обмеженої колом. Нехай в області $D^+(|z|<R)$ або $D^-(|z|>R)$ комплексного змінного $z=x+iy=re^{i\theta}$, що обмежене колом L радіуса R, визначена однозначна обмежена функція $u(x, y)$, гармонічна в D^+ або D^-, крім однієї точки $z=z_0$, де вона має особливість

$$u = 2m \ln|z - z_0| + 0(1) \text{ при } z \to z_0. \tag{1}$$

Тут $m = -q(4\pi)^{-1}$, q — відома дійсна стала.

Якщо функція $u(x, y)$ визначена в області D^-, будемо вважати, що при $|z| \to \infty$

$$u = a_0^\infty + \operatorname{Re}(a_1^\infty z) + 0(|z|^{-1}), \tag{2}$$

де $a_1^\infty = a_x^\infty - ia_y^\infty$; a_0^∞, a_x^∞ і a_y^∞ — відомі дійсні сталі, з яких

$$a_x^\infty = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{і} \quad a_y^\infty = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{при} \quad |z| \to \infty.$$

Основна задача полягає у визначенні функції $u(x, y)$ в області D^+ або D^- за її крайовими умовами на контурі L. Для цієї мети скористуємось співвідношенням

$$F_0(z) + \varepsilon F_0(R^2/\bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{3}$$