Умова нетривіальності розв'язку системи (15) дає частотне рівняння

$$\det|\lambda c_{nk}^m - d_{nk}^m| = 0. \tag{16}$$

Корені цього рівняння знаходяться методом редукції. Якщо обмежитись визначником N-го порядку, то у відповідному N-му наближенні одержимо N значень чисел $\Omega = \sqrt{\lambda + \frac{1}{2}}$, які пропорціональні частотам власних коливань із заданим числом вузлових меридіанів.

Оскільки в N-му наближенні рівняння (16) є поліномом N-го порядку відносно параметра λ, то для знаходження коефіцієнтів цього полінома досить обчислити значення функції $f_m(\lambda) = \det|\lambda c_{nk}^m - d_{nk}^m|$ при $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, N$ і побудувати для неї інтерполяційний поліном Лагранжа, який точно співпадає з характеристичним поліномом (16).

ЛІТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Избранные труды, т. 1. М., 1962.
2. Келдыш М. В. О собственных функциях и собственных значениях некоторых классов несамосопряженных уравнений. ДАН, т. 77, 1951, стр. 11—14.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, Физматгиз, ч. 1. М., 1963.
4. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. «Наука», М., 1965, стр. 317.
5. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости, Физматгиз, М.—Л., 1963.

УДК 517.944

І. О. ПРУСОВ

ПРО ОДИН РОЗВ'ЯЗОК ДЕЯКИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ

1. Основні задачі для області, обмеженої колом. Нехай в області $D^+(|z|<R)$ або $D^-(|z|>R)$ комплексного змінного $z = x + iy = re^{i\theta}$, що обмежене колом L радіуса R, визначена однозначна обмежена функція $u(x, y)$, гармонічна в D^+ або D^-, крім однієї точки $z = z_0$, де вона має особливість

$$u = 2m \ln|z - z_0| + 0(1) \text{ при } z \to z_0. \tag{1}$$

Тут $m = -q(4\pi)^{-1}$, q — відома дійсна стала.

Якщо функція $u(x, y)$ визначена в області D^-, будемо вважати, що при $|z| \to \infty$

$$u = a_0^\infty + \operatorname{Re}(a_1^\infty z) + 0(|z|^{-1}), \tag{2}$$

де $a_1^\infty = a_x^\infty - ia_y^\infty$; a_0^∞, a_x^∞ і a_y^∞ — відомі дійсні сталі, з яких

$$a_x^\infty = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{і} \quad a_y^\infty = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{при} \quad |z| \to \infty.$$

Основна задача полягає у визначенні функції $u(x, y)$ в області D^+ або D^- за її крайовими умовами на контурі L. Для цієї мети скористуємось співвідношенням

$$F_0(z) + \varepsilon F_0(R^2/\bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{3}$$

де $\varepsilon=\pm 1$; $F_0(z)$ — довільна аналітична функція в областях D^+ і D^-; $u(x, y)$ і $v(x, y)$ — дійсні функції, з яких $u(x, y)$ — шукана функція, а $v(x, y)$ — допоміжна функція. Знак ε вибирається в залежності від зручності.

Диференціюючи формулу (3) по Θ і r, матимемо

$$F(z)+\varepsilon\left(\frac{R}{r}\right)^2 F\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)=\frac{1}{iz}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}+i\frac{\partial v}{\partial \theta}\right), \tag{4}$$

$$F(z)-\varepsilon\left(\frac{R}{r}\right)^2 F\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right). \tag{5}$$

Тут $F(z)=F_0'(z)$ — однозначна аналітична функція в області D^+ або D^-, крім точок $z=z_0$ і $z=\alpha=R^2/\overline{z}_0$, де вона має особливості:

$$\begin{aligned} F(z)&=m(z-z_0)^{-1}+0(1) \text{ при } z\to z_0;\\ F(z)&=m(z-z_0)^{-1}+0(1) \text{ при } z\to z_0; \end{aligned} \tag{6}$$

При цих умовах визначена за формулою (3) функція $u(x, y)$ має в точці $z=z_0$ згадану вище особливість, а функція $v(x, y)$ обмежена в точці $z=z_0$.

Якщо функція $u(x, y)$ визначена в області D^-, то у відповідності з умовою (2) будемо вважати, що

$$\begin{aligned} F_0(z)&=a_0^\infty+a_1^\infty z+0(z)^{-1} \quad \text{при} \quad |z|\to\infty,\\ F(z)&=a_1^\infty+0(z)^{-2} \quad \text{при} \quad |z|\to\infty. \end{aligned} \tag{7}$$

Якщо ж функція $u(x, y)$ визначена в області D^+, ми будемо вважати, що праві частини формул (4) і (5) обмежені при $z\to 0$. Для цього функція $F(z)$ в області D^- повинна задовольняти деяким умовам. Так, коли приймемо, що при $|z|\to\infty$

$$F(z)=B_0+B_1 z^{-1}+B_2 z^{-2}+\ldots.$$

то для виконання умови, яка вимагається, необхідно і достатньо, щоб

$$B_0=0,\ B_1=0. \tag{8}$$

Крім того, ми будемо вважати, що функція $F(z)$ неперервно продовжується на всі точки t контура L з сторін D^+ і D^-, крім скінченної кількості точок $t=c$, в околі яких вона має особливість

$$|F(z)|<A|z-c|^{-\alpha}(0\leqslant\alpha<1). \tag{9}$$

Користуючись формулами (3)—(5), можна знайти розв'язок задач Діріхле, Неймана і змішаної задачі про визначення функції $u(x, y)$. Більш коротко ці задачі будемо називати задачами I, II і III. В свою чергу всі ці задачі зводяться до визначення функцій $F_0(z)$ і $F(z)$ за крайовими значеннями правих частин формул (3)—(5).

З формули (3) випливає, що функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$, взагалі кажучи, гармонічно неспряжені. Проте значення однієї з них в області їх визначення взагалі залежить від крайового значення другої функції. В зв'язку з цим далі покладемо, що

$$v(x, y)=0 \qquad \text{і} \qquad \frac{d}{dn}v(x, y)=0 \tag{10}$$

на всіх ділянках контура L, де задаються відповідно функція $u(x, y)$ і її похідна по нормалі n. Ця умова є необхідною для того, щоб при нульових крайових умовах функція u дорівнювала нулеві в області її визначення.

Приймаючи, що крайові значення на контурі L функції $u(x, y)$ і її похідних по r і Θ задовольняють умову Гельдера (H), можна знайти розв'язок основних крайових задач по визначенню функцій $F_0(z)$ і $F(z)$. Метод розв'язку їх надто подібний до методу розв'язку основних крайових задач теорії пружності (див. [4], § 112—114, 122—124). Тому наведемо для прикладу розв'язки лише деяких задач.

Задача I для круга. Нехай на контурі L області D^+ задано $u=f(t)$ ($f(t)$ — дійсна функція). Тоді на підставі формули (3) при $\varepsilon=-1$ маємо

$$F_0^+(t)-F_0^-(t)=f(t) \quad \text{на} \quad L. \tag{11}$$

Тут, як і далі, знаками плюс і мінус позначаються крайові значення функцій із сторін D^+ та D^- на L.

Розв'язком крайової задачі (11) при врахуванні умови (6) є функція [1, 4]

$$F_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau-z}+m\ln\frac{z-z_0}{z-\alpha}+m\ln(-\alpha). \tag{12}$$

Функцію $u(x, y)$ знайдемо за формулами (3) і (12). Крім того, знайдемо, що $v(x, y)=0$ в області D^+.

Задача II для круга. Якщо на контурі L області D^+ відома похідна по нормалі від функції $u(x, y)$, дорівнює $f(t)$, за формулою (5) при $\varepsilon=1$ маємо крайову умову

$$F^+(t)-F^-(t)=Rt^{-1}f(t) \text{ на } L. \tag{13}$$

Розв'язком цієї крайової задачі є функція

$$F(z)=\frac{R}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau(\tau-z)}+\frac{m}{z-z_0}+\frac{m}{z-\alpha}+B_0.$$

Задовольняючи умову (8), знайдемо що

$$B_0=0, \qquad 4\pi m-R\int_0^{2\pi} f(t)\,d\theta=0.$$

Останнє співвідношення є необхідною умовою розв'язку задачі Неймана для круга.

Задача III для області D^-. Нехай $L'=\Sigma L_k'$ є сукупність n дуг $L_k'=a_kb_k$ на контурі L, які не мають між собою спільних точок; $L''=L-L'$ — інша частина контура L. І нехай на контурі L області D^- задані значення

$$u=f_1(t) \text{ на } L' \text{ і } \frac{du}{dr}=f_2(t) \text{ на } L'', \tag{14}$$

де $f_j(t)$ — відомі дійсні функції на контурі L.

У цьому випадку доцільно розглянути такі дві задачі.

Задача *A*

$$\begin{gathered} F^-(t)+F^+(t)=f_1'(t) \text{ на } L'; \\ F^-(t)-F^+(t)=0 \text{ на } L''. \end{gathered} \tag{15}$$

Задача B

$$F^-(t)-F^+(t)=0 \text{ на } L', \quad F^-(t)+F^+(t)=Rt^{-1}f_2(t) \text{ на } L''. \tag{16}$$

Крайові умови для цих задач одержані на підставі формул (4) і (5) при $\varepsilon=1$ і $\varepsilon=-1$, з прийняттям відповідно, що $f_2(t)=0$ і $f_1(t)=0$. Накладанням розв'язків задач A і B знайдемо розв'язок задачі, що відповідає умові (14).

Функція $F(z)$, яка задовольняє умови (15) і (9) і має особливості (6) в точках $z=z_0$ і $z=\alpha$, визначається за формулою [4]

$$F(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{L'}\frac{f_3(\tau)\,d\tau}{X^+(\tau)(\tau-z)}+X(z)\left[P_n(z)+\frac{k_1}{z-z_0}+\frac{k_2}{z-\alpha}\right], \tag{17}$$

де

$$X(z)=\prod_{k=1}^{n}[(z-a_k)(z-b_k)]^{-\frac{1}{2}}, \qquad z^nX(z)=1 \quad \text{при } |z|\to\infty;$$

$$f_3(t)=\frac{d}{dt}f_1(t), \qquad k_1=\frac{m}{X(z_0)}, \qquad k_2=\frac{m}{X(\alpha)};$$

$P_n(z)=C_0z^n+C_1z^{n-1}+\ldots+C_n$ — поліном степеня n з довільними комплексними коефіцієнтами; $X(z)$ — частковий розв'язок однорідної крайової задачі, яка відповідає задачі (15).

Коефіцієнти полінома визначаються з умови на безмежності (7) та з $n-1$ незалежних рівнянь

$$\int\limits_{b_k}^{a_{k+1}}[F^-(t)+F^+(t)]dt=f_1(a_{k+1})-f_1(b_k). \tag{18}$$

Розв'язок задачі B має аналогічний вигляд.

Відмінність розв'язку полягає тільки в тому, що $X(z)$ є частковий розв'язок однорідної задачі, яка відповідає задачі B.

2. Основні задачі для площини з розрізами вздовж дуги кола. Нехай вздовж кола $|z|=R$ є n розрізів $L_k=a_kb_k$. І нехай $L=\Sigma L_k$; D — вся площина комплексного змінного $z=x+iy=re^{i\Theta}$, за винятком точок t дуги L; L^+ і L^- — береги розрізів на L із сторін $r<R$ і $r>R$ відповідно.

Розглянемо крайову задачу про визначення в області D однозначної гармонічної функції $u(x,y)$, обмеженої всюди в області $D+L^++L^-$, за винятком точок $z=z_0$ і $|z|\to\infty$, де вона має особливості (1), (2). Для цієї мети скористуємось співвідношеннями:

$$F_0(z)+\Omega_0(R^2/\bar{z})=u(x,y)+iv(x,y); \tag{19}$$

$$F(z)+\left(\frac{R}{r}\right)^2\Omega\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)=\frac{1}{iz}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+i\frac{\partial v}{\partial\theta}\right); \tag{20}$$

$$F(z)-\left(\frac{R}{r}\right)^2\Omega\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right), \tag{21}$$

останні два з яких одержані диференціюванням першого по Θ і r.

Тут $F(z)=F_0'(z)$, $\Omega(z)=\Omega_0'(z)$; $F(z)$ і $\Omega(z)$ — функції, голоморфні в області D, крім точок $z=z_0$ і $z=\alpha=R^2/\bar{z}_0$, де вони мають особливості:

$$\begin{aligned} F(z)&=m(z-z_0)^{-1}+O(1) \text{ при } z\to z_0;\\ \Omega(z)&=m(z-\alpha)^{-1}+O(1) \text{ при } z\to\alpha; \end{aligned} \tag{22}$$

$u(x, y)$ — шукана функція, $v(x, y)$ — допоміжна функція, що задовольняє умову (10) на L^+ і L^-. Поведінка функції $F(z)$ на безмежності визначається формулою (7).

Приймаючи, що при $|z|\to\infty$ функція $\Omega(z)$ зображується рядом

$$\Omega(z)=B_0+B_1z^{-1}+B_2z^{-2}+\ldots$$

ми будемо вважати, що коефіцієнти

$$B_0=0,\ B_1=0. \tag{23}$$

На підставі формул (20) і (21) маємо умову на L:

$$F^+(t)+\Omega^-(t)=f_1^+(t) \quad \text{на} \quad L^+, \tag{24}$$

$$F^-(t)+\Omega^+(t)=f_1^-(t) \quad \text{на} \quad L^-, \tag{25}$$

$$F^+(t)-\Omega^-(t)=f_2^+(t) \quad \text{на} \quad L^+, \tag{26}$$

$$F^-(t)-\Omega^-(t)=f_2^-(t) \quad \text{на} \quad L^-, \tag{27}$$

де

$$f_1(t)=\frac{d}{dt}(u+iv), \qquad f_2(t)=Rt^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right). \tag{28}$$

Беручи до уваги формули (24)—(27) і умову (10), можна знайти розв'язки задач I, II і змішаної задачі. Метод їх розв'язку майже не відрізняється від методу, запропонованого М. І. Мусхелішвілі [4, § 124] для плоскої задачі теорії пружності. Так, якщо, наприклад, на L задано

$$u=f^-(t) \text{ на } L^- \text{ і } u=f^+(t) \text{ на } L^+,$$

то на підставі формул (24) і (25) знайдемо

$$F(z)-\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{q(\tau)\,d\tau}{\tau-z}+\frac{m}{z-z_0}-\frac{m}{z-\alpha}+D_0,$$

$$F(z)+\Omega(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{p(\tau)\,d\tau}{X^+(\tau)(\tau-z)}+X(z)\left[P_n(z)+\frac{k_1}{z-z_0}+\frac{k_2}{z-\alpha}\right],$$

де

$$q(t)=f^+(t)-f^-(t),\quad p(t)=f^+(t)+f^-(t),$$
$$k_1=m[X(z_0)]^{-1},\quad k_2=m[X(\alpha)]^{-1},$$

D_0 — довільна стала; а через $X(z)$ і $P_n(z)$ позначено те саме, що і в формулі (17).

Стала D_0 і коефіцієнти полінома визначаються з умов (7), (23), а також з рівнянь

$$\int\limits_{b_k}^{a_{k+1}}[F^+(t)+\Omega^-(t)]\,dt=f(a_{k+1})-f(b_k), \tag{29}$$

загальне число яких дорівнює $n-1$.

Коефіцієнти поліномів при розв'язуванні інших крайових задач визначаються з умов (7) і (23) і, крім того, з співвідношень

$$\int\limits_{L_k} [(F^+ + \Omega^-) - (F^- + \Omega^+)]\, dt = 0, \tag{30}$$

які обов'язково повинні виконуватись внаслідок однозначності функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ при обході розрізів L_k, а також з співвідношень (29), якщо відомі значення функції $u(x, y)$ в точках a_{k+1} і b_k. При розв'язуванні розглянутої вище задачі I співвідношення (30) виконуються тотожно і тому не дають рівнянь для визначення коефіцієнтів полінома.

3. Основні крайові задачі для анізотропної півплощини і анізотропної площини з розрізами на відрізках прямої. Нехай функція $u(x, y)$, визначена в області $D^-(y<0)$ або в області D (вся площина, за винятком n відрізків $L_k = a_k b_k$ на прямій $y=0$), задовольняє рівнянню еліптичного типу

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{31}$$

всюди в області її визначення, крім точки $z = x_0 + iy_0$, де вона має логарифмічну особливість. Тут λ_{ij} — відомі дійсні сталі, з яких $\lambda_{jj} \neq 0$.

Як випливає з роботи С. Г. Лехніцького [3] (див. також роботу [6]), $u(x, y) = \mathrm{Re}\, F_0(z_1)$, де $F_0(z_1)$ — аналітична функція комплексного змінного $z_1 = x + \lambda y$; λ — корінь характеристичного рівняння

$$\lambda_{22}\lambda^2 + 2\lambda_{12}\lambda + \lambda_{11} = 0 \ (\mathrm{Im}\, \lambda = 0).$$

З метою одержання розв'язку основних крайових задач для області D^- доцільно користуватися формулами

$$F_0(z_1) + \varepsilon F_0(\overline{z}_1) = u + iv, \tag{32}$$

$$F(z_1) + \varepsilon F(\overline{z}_1) = \frac{\partial}{\partial x}(u + iv), \tag{33}$$

$$\lambda F(z_1) + \varepsilon \overline{\lambda} F(\overline{z}_1) = \frac{\partial}{\partial y}(u + iv), \tag{34}$$

де $\varepsilon = \pm 1$, $F_1(z_1) = F'_0(z_1)$, $\overline{z}_1 = x + \overline{\lambda} y$, $u = u(x, y)$ — шукана функція, $v = v(x, y)$ — допоміжна функція, значення якої на контурі області визначаються умовою (10). Як і раніше, вибір знака ε залежить від зручності.

Визначена в областях D^- і $D^+(y>0)$ голоморфна функція $F(z_1)$ має особливості в точках $z_0 = x_0 + \lambda y_0$ і $\overline{z}_0 = x_0 + \overline{\lambda} y_0$:

$$F(z_1) = \frac{m}{z_1 - z_0} + 0(1)\,(z_1 \to z_0), \qquad F(z_1) = \frac{\varepsilon m}{z_1 - \overline{z}_0} + 0(1)\,(z_1 \to \overline{z}_0). \tag{35}$$

При $|z_1| \to \infty$ функції $F_0(z_1)$ і $F(z_1)$ мають вигляд

$$F_0(z_1) = a_1^\infty z_1 + a_0^\infty + 0(z_1)^{-1}, \qquad F(z_1) = a_1^\infty + 0(z_1)^{-2}, \tag{36}$$

де a_0^∞ і a_1^∞ позначено те, що і в умові (2).

Основні формули для визначення функції $u(x, y)$ в області D відрізняються від формул (32)—(36) тільки тим, що в формулах (32)—(34) і в другій з формул (35) функції $F_0(\overline{z}_1)$, $F(\overline{z}_1)$ і $F(z_1)$ заміняються відповідно функціями $\Omega_0(\overline{z}_1)$, $\Omega(\overline{z}_1)$ і $\Omega(z_1)$.

Метод розв'язування крайових задач для областей D^{-} і D майже не відрізняється від методу розв'язування розглянутих вище задач. Деякі з цих задач іншими методами досліджені в роботах [1, 2, 5, 6].

ЛІТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
2. Келдыш М. В., Седов Л. И. Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций. ДАН СССР, т. XVI, № 1, 1937, 7—10.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки, М.—Л., 1957.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1946.
6. Уздалев А. И. Плоская задача термоупругости для анизотропного тела. «Инж. журнал», т. 2. в 1., 1962.

УДК 539.+624.073:531

Н. П. ФЛЕЙШМАН, Л. И. ОЩИПКО

ПРУЖНА РІВНОВАГА ДОВІЛЬНО НАВАНТАЖЕНОЇ ПЛАСТИНКИ З НЕСИМЕТРИЧНО ПІДКРІПЛЕНОЮ КРУГОВОЮ ГРАНИЦЕЮ

Розглядається задача про деформацію круглої пластинки з несиметрично підкріпленою границею та безмежної пластинки з несиметрично підкріпленим круговим отвором. Методом інтегралів типу Коші задачу зведено до системи двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку для знаходження комплексних потенціалів, що визначають прогин $w(x, y)$ та функцію напружень Ері $U(x, y)$. Розв'язок одержано у замкненому вигляді при довільному навантаженні.

1. Граничні умови. Кругова границя пластинки підкріплена пружним ребром. Вісь ребра паралельно зміщена відносно серединної площини пластинки на величину h_0. Ребро розглядається тонким, що дозволяє нехтувати його жорсткістю на кручення і згин у своїй площині. Вважаємо, що взаємодія ребра і пластинки відбувається по границі Г.

Граничні умови на Г можна записати у вигляді [2].

$$\varkappa\overline{\varphi_{*}(t)}-t\varphi_{*}'(t)-\psi_{*}(t)-\frac{h_0 h}{2(1-\nu)D}[\overline{\varphi(t)}+\bar{t}\varphi'(t)+\psi(t)]-$$

$$-\frac{Ai\dot{\bar{t}}}{D(1-\nu)}\operatorname{Re}\left\{\dot{t}\frac{d}{ds}[\overline{\varphi_{*}(t)}+\bar{t}\varphi_{*}'(t)+\psi_{*}(t)]\right\}=$$

$$=\frac{Ai\dot{\bar{t}}}{2D(1-\nu)}\operatorname{Re}\left\{\dot{t}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w^0}{\partial x}-i\frac{\partial w^0}{\partial y}\right)\right\}-\frac{1}{2(1-\nu)D}\times$$

$$\times\left\{I_0-I_1-ih_0\int_0^s(p_x^0-ip_y^0)\,ds+iC_1\bar{t}-C_2\right\}; \tag{1}$$