Метод розв'язування крайових задач для областей $D^-$ і $D$ майже не відрізняється від методу розв'язування розглянутих вище задач. Деякі з цих задач іншими методами досліджені в роботах [1, 2, 5, 6].

## ЛІТЕРАТУРА


1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
2. Келдыш М. В., Седов Л. И. Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций. ДАН СССР, т. XVI, № 1, 1937, 7—10.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки, М.—Л., 1957.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1946.
6. Уздалев А. И. Плоская задача термоупругости для анизотропного тела. «Инж. журнал», т. 2, в 1., 1962.


---

УДК 539.+624.073:531

*Н. П. ФЛЕЙШМАН, Л. И. ОЩИПКО*

# ПРУЖНА РІВНОВАГА ДОВІЛЬНО НАВАНТАЖЕНОЇ ПЛАСТИНКИ З НЕСИМЕТРИЧНО ПІДКРІПЛЕНОЮ КРУГОВОЮ ГРАНИЦЕЮ

Розглядається задача про деформацію круглої пластинки з несиметрично підкріпленою границею та безмежної пластинки з несиметрично підкріпленим круговим отвором. Методом інтегралів типу Коші задачу зведено до системи двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку для знаходження комплексних потенціалів, що визначають прогин $w(x, y)$ та функцію напружень Ері $U(x, y)$. Розв'язок одержано у замкненому вигляді при довільному навантаженні.

1. Граничні умови. Кругова границя пластинки підкріплена пружним ребром. Вісь ребра паралельно зміщена відносно серединної площини пластинки на величину $h_0$. Ребро розглядається тонким, що дозволяє нехтувати його жорсткістю на кручення і згин у своїй площині. Вважаємо, що взаємодія ребра і пластинки відбувається по границі Г.

Граничні умови на Г можна записати у вигляді [2].

$$\varkappa\overline{\varphi_*(t)}-t\overline{\varphi_*'(t)}-\overline{\psi_*(t)}-\frac{h_0 h}{2(1-\nu)D}\left[\overline{\varphi(t)}+\bar{t}\varphi'(t)+\psi(t)\right]-$$

$$-\frac{Ai\dot{\bar{t}}}{D(1-\nu)}\operatorname{Re}\left\{\dot{t}\frac{d}{ds}\left[\overline{\varphi_*(t)}+\bar{t}\varphi_*'(t)+\psi_*(t)\right]\right\}=$$

$$=\frac{Ai\dot{\bar{t}}}{2D(1-\nu)}\operatorname{Re}\left\{\dot{t}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w^0}{\partial x}-i\frac{\partial w^0}{\partial y}\right)\right\}-\frac{1}{2(1-\nu)D}\times$$

$$\times\left\{I_0-I_1-ih_0\int_0^s(p_x^0-ip_y^0)\,ds+iC_1\bar{t}-C_2\right\}; \qquad (1)$$

$$\frac{E_1F}{2\mu h}i\dot{\bar{t}}\,\mathrm{Re}\left\{\dot{t}\frac{d}{ds}[x_1\overline{\varphi(t)}-\bar{t}\varphi'(t)-\psi(t)]\right\}-\overline{\varphi(t)}-\bar{t}\varphi'(t)-$$

$$-\psi(t)+\frac{2h_0}{h}E_1Fi\dot{\bar{t}}\,\mathrm{Re}\left\{\dot{t}\frac{d}{ds}[\overline{\varphi_*(t)}+\bar{t}\varphi_*'(t)+\psi_*(t)]\right\}=$$

$$=-i\dot{\bar{t}}E_1F\frac{h_0}{h}\mathrm{Re}\left[\dot{t}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w^0}{\partial x}-i\frac{\partial w^0}{\partial y}\right)\right]-\frac{i}{h}\int\limits_0^s(p_x^0-ip_y^0)\,ds+C_3, \qquad (2)$$

де

$$\dot{I}_k(s)=-\int\limits_0^s\left[m_k(s_1)-i\int\limits_0^{s_1}p_k(s_2)\,ds_2\right](dx-idy) \qquad (k=0,1),$$

$p_1$, $m_1$ — задані зовнішні перерізуючі сили та моменти на $\Gamma$; $p_0$, $m_0$ — сили і моменти, що визначаються функцією $w^0$; $\varkappa=(3+\nu)/(1-\nu)$; $\varkappa_1=(3-\nu)/(1+\nu)$; $C_1$ — дійсна стала; $C_2$, $C_3$ — комплексні числа; $h$ — товщина пластинки; $p_x^0$, $p_y^0$ — проекції на координатні осі заданих зовнішніх зусиль, що діють на Г в серединній площині пластинки.

Прогин $w(x, y)$ та функція напружень Ері $U(x, y)$ виражаються відповідно за формулами:

$$\begin{gathered}w(x, y)=2\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi_*(z)+\chi_*(z)]+w^0(x, y);\\ U(x, y)=\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z)+\chi(z)].\end{gathered} \qquad (3)$$

Через $w^0$ позначено частковий розв'язок рівняння

$$D\Delta\Delta w=q(x, y) \qquad (4)$$

2. Розв'язок задачі для круглої пластинки з несиметрично підкріпленим краєм. Введемо заміну $z=R\zeta$ і позначимо

$$\begin{gathered}\varphi_*(z)=\varphi(\zeta);\ \ \varphi(z)=2\mu h\varphi_1(\zeta);\\ \psi_*(z)=\psi(\zeta);\ \ \psi(z)=2\mu h\psi_1(\zeta).\end{gathered} \qquad (5)$$

При цьому контур Г переходить в коло $\gamma$ одиничного радіуса, на якому граничні умови (1), (2) запишуться у вигляді:

$$\varkappa\overline{\varphi(\sigma)}-\frac{1}{\sigma}\varphi'(\sigma)-\psi(\sigma)-6\lambda\left[\overline{\varphi_1(\sigma)}+\frac{1}{\sigma}\varphi_1'(\sigma)+\psi_1(\sigma)\right]-$$

$$-\frac{\delta_1}{1-\nu}\frac{1}{\sigma}\mathrm{Re}\left\{\sigma^2\frac{d}{d\sigma}\left[\overline{\varphi(\sigma)}+\frac{1}{\sigma}\varphi'(\sigma)+\psi(\sigma)\right]\right\}=f_1(\sigma); \qquad (6)$$

$$\frac{\delta}{\sigma}\mathrm{Re}\left\{\sigma^2\frac{d}{d\sigma}\left[\varkappa_1\overline{\varphi_1(\sigma)}-\frac{1}{\sigma}\varphi_1'(\sigma)-\psi_1(\sigma)\right]\right\}-\overline{\varphi_1(\sigma)}-\frac{1}{\sigma}\varphi_1'(\sigma)-$$

$$-\psi_1(\sigma)+\frac{2\lambda\delta}{\sigma}\mathrm{Re}\left\{\sigma^2\frac{d}{d\sigma}\left[\overline{\varphi(\sigma)}+\frac{1}{\sigma}\varphi'(\sigma)+\psi(\sigma)\right]\right\}=f_2(\sigma), \qquad (7)$$

де

$$f_1(\sigma)=\frac{\delta_1}{2(1-\nu)}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot\mathrm{Re}\left\{\sigma^2\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial w^0}{\partial x}-i\frac{\partial w^0}{\partial y}\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{2D(1-\nu)}\left[I_0-I_1-ih_0\int\limits_0^s(p_x^0-ip_y^0)\,ds+iC_1\frac{R}{\sigma}-C_2\right];$$

$$f_2(\sigma)=-\frac{\delta}{\sigma}\lambda\,\mathrm{Re}\left[\sigma^2\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial w^0}{\partial x}-i\frac{\partial w^0}{\partial y}\right)\right]-\frac{i}{h}\int_0^s(p_x^0-ip_y^0)\,ds+C_3;$$

$\delta=E_1F/2\mu hR$ — відносна жорсткість ребра на розтяг; $\delta_1=A/DR$ — відносна жорсткість ребра на згин; $\lambda=h_0/h$. $A$ — жорсткість ребра на згин; $E_1$ — модуль Юнга матеріалу ребра; $F$ — площа поперечного перерізу ребра. $D$ — циліндрична жорсткість пластинки.

Введемо функції [4]:

$$U_1(\zeta)=\varphi_1'(\zeta)+\zeta\psi_1(\zeta); \qquad U(\zeta)=\varphi'(\zeta)+\zeta\psi(\zeta). \tag{8}$$

Домноживши умови (6), (7) відповідно на $2\lambda\delta$ і $\delta_1/(1-\nu)$ та просумувавши їх, дістанемо

$$\varkappa\sigma\overline{\varphi(\sigma)}-U(\sigma)-6\lambda\left[\sigma\overline{\varphi_1(\sigma)}+U_1(\sigma)\right]-\frac{\delta_1}{1-\nu}\mathrm{Re}\left[\sigma U'(\sigma)-U(\sigma)-\overline{\varphi'(\sigma)}\right]=\sigma f_1(\sigma); \tag{9}$$

$$2\lambda\delta\left[\varkappa\sigma\overline{\varphi(\sigma)}-U(\sigma)\right]-\left(12\lambda^2\delta+\frac{\delta_1}{1-\nu}\right)\left[\sigma\overline{\varphi_1(\sigma)}+U_1(\sigma)\right]+$$
$$+\frac{\delta_1\delta}{1-\nu}\mathrm{Re}\left[U_1(\sigma)-\sigma U_1'(\sigma)-\varkappa_1\overline{\varphi_1'(\sigma)}\right]=\sigma f_3(\sigma). \tag{10}$$

Тут

$$f_3(\sigma)=2\lambda\delta f_1(\sigma)+\frac{\delta_1}{1-\nu}f_2(\sigma).$$

Помножимо рівняння (9), (10) і комплексно спряжені до них на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$ та проінтегруємо їх по $\gamma$ при $|\zeta|<1$, вважаючи, що [1, 2]

$$\varphi(0)=0;\ \mathrm{Im}\varphi'(0)=0;$$
$$\varphi_1(0)=0;\ \mathrm{Im}\varphi_1'(0)=0.$$

Остаточно матимемо:

$$-\frac{\delta_1}{2(1-\nu)}\left[\zeta U'(\zeta)-U(\zeta)-\varphi'(\zeta)\right]-U(\zeta)-6\lambda U_1(\zeta)=F_1(\zeta); \tag{11}$$

$$\frac{\delta_1\delta}{2(1-\nu)}\left[U_1(\zeta)-\zeta U_1'(\zeta)-\varkappa_1\varphi_1'(\zeta)\right]-\left(12\lambda^2\delta+\frac{\delta_1}{1-\nu}\right)U_1(\zeta)-2\lambda\delta U(\zeta)=F_2(\zeta); \tag{12}$$

$$\frac{\delta_1}{2(1-\nu)}\left[U(\zeta)-\zeta U'(\zeta)+\varphi'(\zeta)\right]+\frac{\varkappa}{\zeta}\varphi(\zeta)-\frac{6\lambda}{\zeta}\varphi_1(\zeta)=F_3(\zeta); \tag{13}$$

$$\frac{\delta_1\delta}{2(1-\nu)}\left[U_1(\zeta)-\zeta U_1'(\zeta)-\varkappa_1\varphi_1'(\zeta)\right]+2\lambda\delta\varkappa\,\varphi(\zeta)-$$
$$-\left(12\lambda^2\delta+\frac{\delta_1}{1-\nu}\right)\frac{\varphi_1(\zeta)}{\zeta}=F_4(\zeta). \tag{14}$$

Тут

$$F_1(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\sigma f_1(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+6\lambda c_1-\left(\varkappa+\frac{\delta_1}{1-\nu}\right)a_1;$$

$$F_2(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\sigma f_3(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\xi}+\left(\frac{\delta_1\delta}{1+\nu}+12\lambda^2\delta+\frac{\delta_1}{1-\nu}\right)c_1-2\lambda\delta\varkappa a_1;$$

$$F_3(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{1}{\sigma}\overline{f_1(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} + 6\lambda c_1 + \left(1 - \frac{\delta_1}{1-\nu}\right)a_1;$$

$$F_4(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{1}{\sigma}\overline{f_3(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} + \left(\frac{\delta_1\delta}{1+\nu} + 12\lambda^2\delta + \frac{\delta_1}{1-\nu}\right)c_1 + 2\lambda\delta a_1;$$

$$a_1 = \varphi'(0); \qquad c_1 = \varphi_1'(0).$$

Покладаючи в рівняннях (11) і (12) $\zeta = 0$, дістанемо два співвідношення для визначення $a_1$ та $c_1$:

$$\left(\frac{2\delta_1}{1-\nu} + \varkappa - 1\right)a_1 - 12\lambda c_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma f_1(\sigma)\,d\sigma = g_1$$

$$2\lambda\delta(\varkappa-1)\,a_1 - 2\left(\frac{\delta_1\delta}{1+\nu} + 12\lambda^2\delta + \frac{\delta_1}{1-\nu}\right)c_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma f_3(\sigma)\,d\sigma = g_2.$$

Звідси

$$a_1 = \frac{1-\nu}{2\delta_1}\frac{[\delta_1\delta(1-\nu) + 12\lambda^2\delta(1-\nu^2) + \delta_1(1+\nu)]\,g_1 - 6\lambda g_2(1-\nu^2)}{12\lambda^2\delta(1-\nu^2) + (\delta_1+1+\nu)\,[\delta(1-\nu)+(1+\nu)]}; \quad (15)$$

$$c_1 = \frac{1-\nu^2}{2\delta_1}\frac{2\lambda\delta(1+\nu)\,g_1 - (\delta_1+1+\nu)\,g_2}{12\lambda^2\delta(1-\nu^2) + (\delta_1+1+\nu)\,[\delta(1-\nu)+(1+\nu)]}. \quad (16)$$

Систему рівнянь (11)—(14) можна звести до такої:

$$U(\zeta) + \frac{\varkappa}{\zeta}\varphi(\zeta) = R_2(\zeta); \qquad U_1(\zeta) - \frac{1}{\zeta}\varphi_1(\zeta) = R_1(\zeta); \quad (17)$$

$$\begin{aligned}\varphi'(\zeta) + a_{11}\frac{1}{\zeta}\varphi(\zeta) + a_{12}\frac{1}{\zeta}\varphi_1(\zeta) &= V_1(\zeta);\\ \varphi_1'(\zeta) + a_{21}\frac{1}{\zeta}\varphi(\zeta) + a_{22}\frac{1}{\zeta}\varphi_1(\zeta) &= V_2(\zeta),\end{aligned} \quad (18)$$

де

$$R_1(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_\gamma \operatorname{Im}[\sigma f_2(\sigma)]\frac{d\sigma}{\sigma-\xi};$$

$$R_2(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_\gamma \operatorname{Im}\{\sigma[f_1(\sigma) - 6\lambda f_2(\sigma)]\}\frac{d\sigma}{\sigma-\xi} + \frac{4}{1-\nu}a_1; \quad (19)$$

$$a_{11} = \frac{3+\nu}{2\delta_1}(1-\nu-\delta_1); \qquad a_{12} = -\frac{3}{\delta_1}(1-\nu)^2\lambda;$$

$$a_{21} = -\frac{\lambda}{\delta_1}(3+\nu)(1+\nu); \qquad a_{22} = \frac{1-\nu^2}{2\delta_1\delta}\left[12\lambda^2\delta + \frac{\delta_1}{1-\nu}(1-\delta)\right]; \quad (20)$$

$$V_1(\zeta) = \frac{(1-\nu)^2}{2\delta_1}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\overline{f_1(\sigma)}}{\sigma(\sigma-\zeta)}d\sigma + \frac{\delta_1}{2\pi(1-\nu)}\int\limits_\gamma \operatorname{Im}\{\sigma[f_1(\sigma) - 6\lambda f_2(\sigma)]\} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\sigma-2\zeta}{(\sigma-\zeta)^2}d\sigma\right\} + \left[\frac{(1-\nu)^2}{2\delta_1} - \frac{3-\nu}{2}\right]a_1 - a_{12}c_1; \quad (21)$$

$$V_2(\zeta) = -\frac{1-\nu^2}{2\delta_1\delta}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{f_3(\sigma)}}{\sigma(\sigma-\zeta)}d\sigma + \frac{\delta_1\delta}{2(1-\nu)\pi}\int\limits_{\gamma}\mathrm{Im}\,[\sigma f_2(\sigma)]\frac{\sigma-2\zeta}{(\sigma-\zeta)^2}d\sigma\right\} -$$

$$-(1+a_{22})\,c_1 - \frac{\lambda(1-\nu^2)}{\delta_1}a_1.$$

Система звичайних диференціальних рівнянь першого порядку (18) служить для знаходження функцій $\varphi(\zeta)$ та $\varphi_1(\zeta)$.

Розв'язок відповідної системи однорідних рівнянь шукаємо у вигляді

$$\varphi(\zeta) = \zeta^{\mu};\ \varphi_1(\zeta) = k\zeta^{\mu}. \tag{22}$$

Підставляючи розв'язок (22) у рівняння (18) при $V_1(\zeta) = V_2(\zeta) = 0$, дістаємо рівняння для визначення чисел $\mu$ та $k$, звідки

$$\begin{aligned}\mu_{1,2} &= -\frac{1}{2}\left[a_{11}+a_{22}\mp\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}}\,\right];\\ k_{1,2} &= \frac{1}{2a_{12}}\left[a_{22}-a_{11}\mp\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}}\,\right].\end{aligned} \tag{23}$$

Загальний інтеграл системи (18) матиме вигляд

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= C_4\zeta^{\mu_1}+C_5\zeta^{\mu_2}+\varphi^0(\zeta);\\ \varphi_1(\zeta) &= k_1C_4\zeta^{\mu_1}+k_2C_5\zeta^{\mu_2}+\varphi_1^0(\zeta).\end{aligned} \tag{24}$$

Тут $\varphi^0(\zeta)$ та $\varphi_1{}^0(\zeta)$ часткові розв'язки системи (18), а саме:

$$\begin{aligned}\varphi^0(\zeta) &= \frac{1}{k_2-k_1}\left\{\zeta^{\mu_1}\int\limits_0^{\zeta}\zeta^{-\mu_1}(k_2V_1-V_2)\,d\zeta+\zeta^{\mu_2}\int\limits_0^{\zeta}\zeta^{-\mu_2}(V_2-k_1V_1)\,d\zeta\right\};\\ \varphi_1^0(\zeta) &= \frac{1}{k_2-k_1}\left\{k_1\zeta^{\mu_1}\int\limits_0^{\zeta}\zeta^{-\mu_1}(k_2V_1-V_2)\,d\zeta+k_2\zeta^{\mu_2}\int\limits_0^{\zeta}\zeta^{-\mu_2}(V_2-k_1V_1)\,d\zeta\right\}.\end{aligned} \tag{25}$$

Для однозначності розв'язку (22) необхідно покласти $C_4 = C_5 = 0$, тоді

$$\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta); \qquad \varphi_1(\zeta) = \varphi_1^0(\zeta).$$

Знаючи $\varphi(\zeta)$ та $\varphi_1(\zeta)$ із співвідношень (3), (8), та (17) визначаємо функції $U(\zeta)$, $U_1(\zeta)$, прогин $w(x, y)$ і функцію напружень Ері $U(x, y)$. Отже, задача повністю розв'язана.

3. Приклад. Кругла пластинка з несиметричним ребром по краю $r=R$ оперта в центрі і навантажена тиском, що змінюється за законом $q=p_0\left(\frac{r}{R}\right)^{n-2}$, $n\geqslant 2$.

У цьому випадку

$$w^0 = \frac{p_0R^4}{n^2D}\left\{\frac{1}{(n+2)^2}\left(\frac{r}{R}\right)^{(n+2)} - \frac{n}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2\ln\frac{r}{R} + \right.$$

$$\left. + \frac{(3+\nu)\,n^2+2(1+\nu)(n-2)}{8(n+2)(1+\nu)}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right\}.$$

Згідно з (21),

$$V_1(\zeta) = -\frac{p_0 R^3 (1-\nu)}{8D(n+2)(1+\nu)} + \left[\frac{(1-\nu)^2}{2\delta_1} - \frac{3-\nu}{2}\right] a_1 - a_{12} c_1;$$

$$V_2(\zeta) = -\lambda \frac{1-\nu^2}{\delta_1} a_1 - (1+a_{22}) c_1.$$

Прогин та функцію Ері одержуємо у вигляді

$$w = \frac{p_0 R^4}{Dn^2} \left\{ \frac{1}{(n+2)^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} - \frac{n}{4} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \ln \frac{r}{R} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8(n+2)} \left[ (n^2+2n-4) + 2n^2 \frac{\delta(1-\nu)+(1+\nu)}{12\lambda^2\delta(1-\nu^2)+(\delta_1+1+\nu)[\delta(1-\nu)+(1+\nu)]} \right] \right\};$$

$$U = -\frac{6\lambda\delta(1-\nu^2)}{h^2(n+2)} \frac{p_0 R^4}{12\lambda^2\delta(1-\nu^2)+(\delta_1+1+\nu)[\delta(1-\nu)+(1+\nu)]}.$$

При $n=2$ (рівномірний тиск) і $\lambda=0$ (симетричне ребро) $U(x, y)=0$, а $w(x, y)$ дає прогин плити з симетричним ребром [2].

4. Р о з в ' я з о к  з а д а ч і  д л я  б е з м е ж н о ї  п л а с т и н к и  з  н е с и м е т р и ч н о  п і д к р і п л е н и м  к р у г о в и м  о т в о р о м. При використанні заміни (5) з врахуванням вигляду функцій для безмежної області [1, 2] граничні умови (1), (2) для цього випадку матимуть вигляд формул (6) і (7), в яких $\delta$ та $\delta_1$ треба замінити на $-\delta$ та $-\delta_1$. При помноженні цих граничних умов на $d\sigma/2\pi i(\sigma-\xi)$ та інтегруванні їх по $\gamma$ при $|\zeta|>1$ з врахуванням [1, 2]

$$\varphi(\infty)=0; \ \psi(\infty)=0;$$
$$\varphi_1(\infty)=0; \ \psi_1(\infty)=0;$$

дістанемо функціональні рівняння (11)—(14) з такими правими частинами:

$$F_1(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sigma f_1 \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{\delta_1}{2(1-\nu)}(2C+\beta_1) - (C+\beta_1) - 6\lambda(\Gamma+\alpha_1+\Gamma'\zeta^2);$$

$$F_2(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sigma f_3 \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{\delta_1\delta}{2(1-\nu)}(\Gamma+\alpha_1-\Gamma'\zeta^2-\varkappa_1\Gamma+\bar{\Gamma}'\zeta^{-2}) -$$

$$-2\lambda\delta(C+\beta_1) - \left(12\lambda^2\delta + \frac{\delta_1}{1-\nu}\right)(\Gamma+\alpha_1+\Gamma'\zeta^2); \quad (27)$$

$$F_3(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\sigma}\bar{f}_1 \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{\delta_1}{2(1-\nu)}(2C+\beta_1) + \varkappa C + 6\lambda(\bar{\Gamma}'\zeta^{-2}-\Gamma);$$

$$F_4(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\sigma}\bar{f}_3 \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} + \frac{\delta_1\delta}{2(1-\nu)}(\Gamma'\zeta^2-\Gamma-\alpha_1+\varkappa_1\Gamma-\bar{\Gamma}'\zeta^{-2}) +$$

$$+ 2\lambda\delta\varkappa C + \left(12\lambda^2\delta + \frac{\delta_1}{1-\nu}\right)(\bar{\Gamma}'\zeta^{-2}-\Gamma),$$

де $\Gamma$ і $\Gamma'$ — дійсна та комплексна сталі, що визначають однорідний плоский напружений стан пластинки на безмежності; $C$ — визначає згинаючі моменти на безмежності.

Для визначення сталих $\alpha_1$ і $\beta_1$ помножимо відповідні граничні умови на $d\sigma/2\pi i(\sigma-\zeta)$ і проінтегруємо їх по $\gamma$ при $|\zeta|<1$. З одержаної системи при $\zeta=0$ знаходимо:

$$\alpha_1=[\zeta\psi_1(\zeta)]_{\zeta=\infty}=\frac{1-\nu}{\delta_1}\,\frac{2\lambda\delta(1-\nu)L_1-(1-\nu+\delta_1)L_2}{12\lambda^2\delta(1-\nu)+(\delta+1)(1-\nu+\delta_1)};$$
$$\beta_1=[\zeta\psi(\zeta)]_{\zeta=\infty}=\frac{1-\nu}{\delta_1}\,\frac{6\lambda(1-\nu)L_2+[12\lambda^2\delta(1-\nu)+\delta_1(\delta+1)]L_1}{12\lambda^2\delta(1-\nu)+(\delta+1)(1-\nu+\delta_1)}. \tag{28}$$

Тут

$$L_1=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f_1(\sigma)\,d\sigma+\frac{2}{1-\nu}(\delta_1-1-\nu)C+12\lambda\Gamma;$$
$$L_2=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f_3(\sigma)\,d\sigma-2\left(\frac{\delta_1\delta}{1+\nu}-12\lambda^2\delta-\frac{\delta_1}{1-\nu}\right)\Gamma-4\lambda\delta\frac{1+\nu}{1-\nu}C. \tag{29}$$

Доведено, що $\alpha_1$ та $\beta_1$ — дійсні величини.

Систему рівнянь (11)—(14) можна звести до вигляду (17)—(18), де

$$R_1(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int \mathrm{Im}\,[\sigma f_2(\sigma)]\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+\alpha_1+\Gamma'\zeta^2+\bar\Gamma'\zeta^{-2};$$

$$R_2(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_\gamma \mathrm{Im}\,\{\sigma[f_1(\sigma)-6\lambda f_2(\sigma)]\}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+(\varkappa+1)C+\beta_1;$$

$$V_1(\zeta)=\frac{(1-\nu)^2}{2\delta_1}\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\overline{f_1(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma(\sigma-\zeta)}+(1+a_{11})C-a_{12}[\bar\Gamma'\zeta^{-2}-\Gamma]-$$
$$-\frac{(1-\nu)}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \mathrm{Im}\,\{\sigma[f_1(\sigma)-6\lambda f_2(\sigma)]\}\frac{\sigma-2\zeta}{(\sigma-\zeta)^2}\,d\sigma; \tag{30}$$

$$V_2(\xi)=-\frac{1-\nu^2}{2\delta_1\delta}\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\overline{f_3(\sigma)}}{\sigma(\sigma-\zeta)}\,d\sigma+\frac{1+\nu}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \mathrm{Im}\,[\sigma f_3(\sigma)]\frac{(\sigma-2\zeta)}{(\sigma-\zeta)^2}\,d\sigma+$$
$$+a_{21}C+a_{22}\bar\Gamma'\zeta^{-2}+(1+a_{22})\Gamma.$$

Вирази для коефіцієнта $a_{ij}$ дістанемо з формул (20), якщо в них замінимо $\delta$ та $\delta_1$ на $-\delta$ та $-\delta_1$.

Аналогічно (25) розв'язок для безмежної пластинки запишемо у вигляді

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{k_1-k_2}\left\{\zeta^{\mu_1}\int_\zeta^\infty\zeta^{-\mu_1}(k_2V_1-V_2)\,d\zeta+\zeta^{\mu_2}\int_\xi^\infty\zeta^{-\mu_2}(V_2-k_1V_1)\,d\zeta\right\};$$
$$\varphi_1(\zeta)=\frac{1}{k_1-k_2}\left\{k_1\zeta^{\mu_1}\int_\zeta^\infty\zeta^{-\mu_1}(k_2V_1-V_2)\,d\zeta+k_2\zeta^{\mu_2}\int_\zeta^\infty\zeta^{-\mu_2}(V_2-k_1V_1)\,d\zeta\right\}, \tag{31}$$

де $k_{1,2}$ і $\mu_{1,2}$ визначаються формулами (23).

5. П р и к л а д. Безмежна пластинка з несиметрично підкріпленим круговим отвором знаходиться в умовах одностороннього згину на безмежності: $M_x^\infty=M$; $M_y^\infty=H_{xy}^\infty=0$.

Комплексні потенціали, що визначають основний прогин $w^0$ мають вигляд

$$\varphi_0(z) = -\frac{MR}{4D}\left[\frac{1}{2(1+\nu)}\cdot\frac{z}{R} + \frac{1}{3+\nu}\frac{R}{z}\right];$$

$$\psi_0(z) = -\frac{MR}{4D}\left[\frac{1}{1-\nu}\frac{z}{R} + \frac{1}{3+\nu}\frac{R^3}{z^3} + \frac{1}{1-\nu}\frac{R}{z}\right].$$

Обчислюємо функції $V_1(\zeta)$ та $V_2(\zeta)$ для цього випадку

$$V_1(\zeta) = -\frac{MR}{2(3+\nu)}\frac{1}{\zeta^2}; \qquad V_2(\zeta)=0.$$

Розв'язок задачі знаходимо у вигляді:

$$\varphi(z)+\varphi_0(z) = -\frac{MR}{4D}\left[\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{z}{R} + b_1\frac{R}{z}\right];$$

$$\psi(z)+\psi_0(z) = -\frac{MR}{4D}\left[\frac{1}{1-\nu}\frac{z}{R} + d_1\frac{R}{z} + d_3\frac{R^3}{z^3}\right];$$

$$\varphi_1(z) = \frac{12RM\lambda}{h^2}\frac{(1-\nu^2)\delta}{\Delta_2}\cdot\frac{R}{z};$$

$$\psi_1(z) = \frac{12RM\lambda(1-\nu)}{h^2}\left\{\frac{2(1+\nu)\delta}{\Delta_2}\frac{R^3}{z^3} - \frac{\delta}{(1+\nu^2)}\frac{1}{\Delta_1}\frac{R}{z}\right\}.$$

Тут

$$b_1 = \frac{1}{\Delta_2}\{[(3+\nu)\delta+(1+\nu)][(\delta_1+1-\nu)+12\lambda^2\delta(3+\nu)(1-\nu)]\};$$

$$d_1 = \frac{1}{(1+\nu)\Delta_1}\{(1+\nu)(\delta+1)-[12\lambda^2\delta(1-\nu)+\delta_1(\delta+1)]\};$$

$$d_3 = \frac{1}{(1-\nu)\Delta_2}\{[(3+\nu)\delta+(1+\nu)][(3-\nu)\delta_1+(1-\nu)^2]+12\lambda^2\delta(1-\nu^2)(3-\nu)\};$$

$$\Delta_1 = 12\lambda^2\delta(1-\nu)+(\delta+1)(1-\nu+\delta_1);$$

$$\Delta_2 = [(3+\nu)\delta+(1+\nu)][(5+\nu)\delta_1+(3+\nu)(1-\nu)]+12\lambda^2\delta(5+\nu)(1-\nu^2)].$$

При $\lambda=0$ одержуємо розв'язок для симетричного кільця ([2], стор. 208). При цьому $U(x, y)\equiv 0$.

У роботі [3] розглянута задача про підкріплення кругового отвору безмежної пластинки несиметричним ребром. Розв'язок знайдено в комплексних рядах Фур'є для випадків двостороннього згину або розтягу.

## ЛІТЕРАТУРА


1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.

2. Савин Г. Н, Флейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. «Наукова думка», К., 1964.

3. Тарасенко О. П. Концентрація напружень біля несиметрично підкріпленого отвору пластинки. Доповіді АН УРСР, А, № 12, 1967.

4. Флейшман Н. П. Изгиб произвольно загруженной тонкой плиты с подкрепленной круговой границей. «Прикладная механика», 1966, т. II, в. 8.