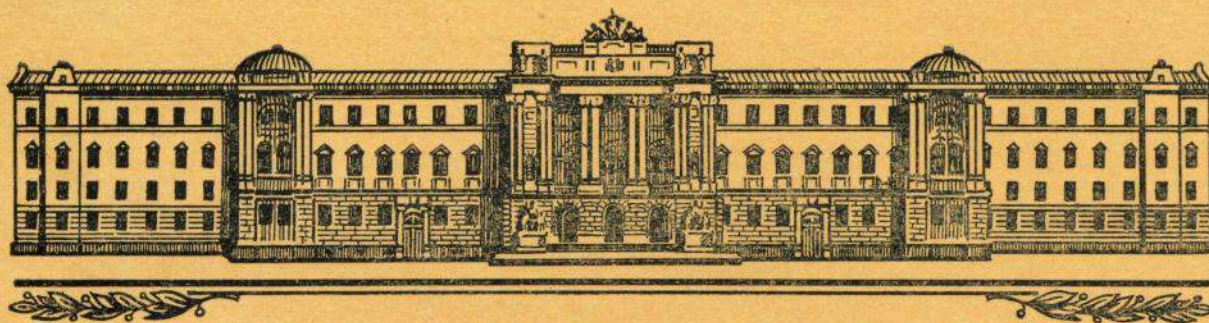




ЛЬВІВСЬКИЙ ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ім. Ів. ФРАНКА

ВІСНИК

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 5

1971

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК

ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА
ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ім. ІВАНА ФРАНКА

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 5

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
Львів 1971

УДК : 513,517,518,539

У збірнику вміщені статті з теорії функцій, диференціальних та інтегральних рівнянь, геометрії і теорії пружності. Розрахований на наукових працівників, аспірантів та студентів старших курсів.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

А. А. Гольдберг, Д. В. Грилицький,
О. С. Кованько (відповідальний редактор),
В. Г. Костенко, О. М. Костовський,
Т. Л. Мартинович (відповідальний секретар).

МАТЕМАТИКА

УДК 517.944:947

МАРІЯ Д. МАРТИНЕНКО, МИХАЙЛО Д. МАРТИНЕНКО

ПРО ТРИВИМІРНІ ГАРМОНІЧНІ ФУНКЦІЇ В ОБЛАСТЯХ З «ЩІЛИНАМИ»

Стаття присвячена доведенню того, що при деяких припущеннях відносно гармонічної функції вона може бути зображена у просторі з розрізом вздовж незамкненої поверхні типу Ляпунова, обмеженої гладкою кривою, у вигляді потенціалу простого або подвійного шару. Одержаний результат обґрунтовує законність застосування рядом авторів потенціалу простого шару (або подвійного шару) для ефективного знаходження розв'язку ряду задач математичної фізики.

Позначимо через E_3 — тривимірний простір, через S — незамкнену поверхню Ляпунова, обмежену гладкою кривою Γ , через $E_3 \setminus S$ — простір зовні S (іншими словами, простір з розрізом вздовж S).

Теорема 1. Нехай $u(M)$ та $v(M)$ — двічі неперервно диференційовні функції у $E_3 \setminus S$, регулярні на нескінченності, неперервно диференційовні аж до поверхні S , за винятком лінії Γ , в околі якої їх перші похідні зростають не швидше, ніж $\frac{C}{R_0^\alpha(M)}$, де $R_0(M)$ — віддаль до Γ , $C = \text{const}$, $0 \leq \alpha < 1$. Тоді справедливі такі формули:

$$\begin{aligned} \iiint_{\infty} \{v \Delta u + (\text{grad } u, \text{grad } v)\} d\tau &= - \iint_S v_+ \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_+ dS + \iint_S v_- \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_- dS, \\ \iiint_{\infty} \{v \Delta u - u \Delta v\} d\tau &= - \iint_S \left\{ v_+ \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_+ - u_+ \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right]_+ \right\} dS + \\ &+ \iint_S \left\{ v_- \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_- - u_- \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right]_- \right\} dS, \end{aligned} \quad (1)$$

де n — певний напрям нормалі до S ; u_+ , $\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_+$, u_- , $\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_-$ — граничні значення u та $\frac{\partial u}{\partial n}$ при наближенні до поверхні S в напрямі $\vec{n}$ та $-\vec{n}$ відповідно («зверху» та «знизу»).

Для доведення теореми побудуємо навколо Γ трубчасту поверхню як обгортку множини сфер радіуса ϵ , центри яких лежать на кривій Γ . Оточимо тепер поверхню S замкненою кусково-гладкою поверхнею S_ϵ , яка складається з двох поверхонь, «паралельних» поверхні S і розмішених по різні сторони від S на віддалі ϵ , та із з'єднуючої їх частини

T_ϵ трубчастій поверхні. Позначимо через D_ϵ необмежену область, границею якої є поверхня S_ϵ . Для довільних функцій $u(M)$ та $v(M)$, неперервно диференційовних у D_ϵ аж до границі та двічі неперервно диференційовних всередині області D_ϵ , мають місце такі формули:

$$\begin{aligned} \iiint_{D_\epsilon} \{v\Delta u + (\text{grad } u, \text{grad } v)\} d\tau &= - \iint_{S_\epsilon} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS; \\ \iiint_{D_\epsilon} \{v\Delta u - u\Delta v\} d\tau &= - \iint_{S_\epsilon} \left\{ v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\} dS, \end{aligned} \quad (2)$$

де ν позначає орт внутрішньої нормалі до S_ϵ .

Перейдемо в формулах (2) до границі при $\epsilon \rightarrow 0$. Очевидно, що границя прaviх частин буде існувати, якщо інтеграли по трубчастій поверхні T_ϵ

$$\iint_{T_\epsilon} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS, \quad \iint_{T_\epsilon} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \quad (3)$$

будуть прямувати до нуля, коли $\epsilon \rightarrow 0$. Введемо на поверхні T_ϵ змінні φ та l (φ — кут, що зростає від нуля до 2π , а l — довжина дуги лінії Γ , що відлічується від деякої фіксованої точки в певному напрямі). Тоді елемент площі поверхні трубки T_ϵ буде дорівнювати $\epsilon dl d\varphi$ й інтеграли (3) матимуть вигляд

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L u \frac{\partial v}{\partial \epsilon} \epsilon dl d\varphi, \quad \int_0^{2\pi} \int_0^L v \frac{\partial u}{\partial \epsilon} \epsilon dl d\varphi.$$

Звідси випливає, що при $\epsilon \rightarrow 0$ інтеграли (3) прямують до нуля внаслідок зроблених припущень стосовно функцій u та v . Тому в границі при $\epsilon \rightarrow 0$ дістанемо формули Гріна (1) для простору з розрізом вздовж S .

Нехай функції $u(M)$ та $v(M)$ визначені в обмеженій області D , границя якої складається з скінченної кількості гладких компонентів, що не перетинаються між собою, $S = \Sigma \cup \sigma$, де $\Sigma = \bigcup_k \Sigma_k$ — сукупність гладких замкнених поверхонь Σ_k , $\sigma = \bigcup_k \sigma_k$ — сукупність гладких незамкнених поверхонь σ_k , обмежених гладкими кривими Γ_k , і нехай функції $u(M)$ та $v(M)$ мають відповідну кількість похідних в цій області, причому перші похідні функцій $u(M)$ та $v(M)$ поблизу лінії Γ_k поведуть себе, як $\frac{C}{R_k^\alpha(M)}$ (C — стала, $R_k(M)$ — віддаль від точки M до лінії Γ_k , $0 \leq \alpha < 1$). В цьому випадку, як легко бачити, справджуються такі формули Гріна:

$$\begin{aligned} \iiint_D \{v\Delta u + (\text{grad } u, \text{grad } v)\} d\tau &= - \iint_\Sigma v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iint_\sigma v \frac{\partial u}{\partial n} dS; \\ \iiint_D \{v\Delta u - u\Delta v\} d\tau &= - \iint_\Sigma \left\{ v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right\} dS - \iint_\sigma \left\{ v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right\} dS, \end{aligned}$$

де n — орт внутрішньої нормалі до $S = \Sigma \cup \sigma$.

Інтеграли по незамкнених поверхнях слід розуміти як інтеграли по двосторонній поверхні, тобто

$$\iint_{\sigma_k} f dS = \iint_{\sigma_k} f_+ dS + \iint_{\sigma_k} f_- dS,$$

де f_+ та f_- — граничні значення f при наближенні до σ_k «зверху» та «знизу».

Теорема 2. Нехай функція $u(M)$ гармонічна у просторі з розрізом вздовж незамкненої поверхні Ляпунова, обмеженої гладкою кривою, регулярна на нескінченності, неперервно диференційовна в усьому просторі аж до розрізу, за винятком границі цього розрізу, в околі якої вона обмежена, а її перші похідні зростають не швидше, ніж $\frac{C}{R_0^\alpha}$, де

C — стала, R_0 — віддаль до границі розрізу, $0 \leq \alpha < 1$. Тоді, якщо при наближенні до розрізу в напрямі додатної та від'ємної нормалі ця функція набирає однакових значень $\{[u]_+ = [u]_-\}$, то вона зображується у вигляді потенціалу простого шару; якщо при наближенні до внутрішніх точок розрізу «зверху» та «знизу» нормальна похідна цієї функції приймає рівні значення $\left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_+ = \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_- \right\}$, то вона зображується у вигляді потенціалу подвійного шару.

Для доведення теореми застосуємо другу формулу Гріна до функції $v = \frac{1}{R}$ (R — віддаль між точками M та N) та гармонічної функції $u(M)$. Тоді дістанемо

$$u(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{1}{R} \left[\frac{\partial u(N)}{\partial n} \right]_+ - u_+(N) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} \right\} d_N S + \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{1}{R} \left[\frac{\partial u(N)}{\partial n} \right]_- - u_-(N) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} \right\} d_N S,$$

або

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ [u_+(N) - u_-(N)] \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \left[\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n} \right)_+ - \left(\frac{\partial u(N)}{\partial n} \right)_- \right] \right\} d_N S. \quad (4)$$

З формули (4) випливає, що коли гармонічна функція $u(M)$ приймає на S «зверху» та «знизу» однакові значення (тобто $u_+ = u_-$), то

$$u(M) = \iint_S \frac{1}{R} \mu(N) d_N S, \quad (5)$$

де

$$\mu(N) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[\frac{\partial u(N)}{\partial n} \right]_- - \left[\frac{\partial u(N)}{\partial n} \right]_+ \right\}. \quad (5')$$

Якщо функція $u(M)$ задовольняє у внутрішніх точках S умову

$$\left[\frac{\partial u(N)}{\partial n} \right]_+ = \left[\frac{\partial u(N)}{\partial n} \right]_-,$$

то

$$u(M) = \iint_S v(N) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} d_N S, \quad (6)$$

де

$$v(N) = \frac{1}{4\pi} [u_+(N) - u_-(N)]. \quad (6')$$

Формули (5), (6) показують, що при виконанні сформульованих у теоремі 2 умов гармонічна у просторі з розрізом функція може бути зображена у вигляді простого або подвійного шару. При цьому з формули (5') випливає, що густина простого шару на границі поверхні шару може мати особливість типу $\frac{C}{R_0^\alpha}$, де $C = \text{const}$, $0 \leq \alpha < 1$, R_0 — віддаль до границі поверхні шару.

Теорема 2 узагальнює відомий результат класичної теорії потенціалу [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М., 1947.
2. Sommerfeld A. Proc. Lond. Math. Soc., 28, 395 (1897).

УДК 518.517.91/94

М. Я. БАРТИШ

ПРО ОДНУ МОДИФІКАЦІЮ РІЗНИЦЕВОГО АНАЛОГУ МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

Розглянемо нелінійну крайову задачу

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad g(x_0, x_1) = d \quad (1)$$

на проміжку $[0, 1]$; $f(t, x)$, $g(x_0, x_1)$, $x(t)$, d визначаються аналогічно, як в [4]. Для розв'язування задачі (1) використаємо обчислювальну схему:

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(k,s)}}{dt} &= \Gamma_f^{(k)}(t) z_k^{(s)} + f^{(k,s-1)}(t); \\ \Gamma_0^{(k)} z_{k0}^{(s)} + \Gamma_1^{(k)} z_{k1}^{(s)} &= d - g^{(k,s-1)}; \\ x^{(k,s)} &= x^{(k,s-1)} + z_k^{(s)} \quad (k=0, 1, 2, \dots; s=1, 2, \dots, p); \\ x^{(k)} &= x^{(k,0)} = x^{(k-1,p)}, \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$\Gamma_f^{(k)}(t) = \Gamma_f(t, x^{(k)}, y^{(k)}) = \left(\dots \frac{f_i(t, x^{(k)} + e_j y_j^{(k)}) - f_i(t, x^{(k)})}{y_j^{(k)}} \dots \right);$$

$$\Gamma_0^{(k)} = \Gamma_0(x_0^{(k)}, x_l^{(k)}, y_0^{(k)}) = \left(\dots \frac{g_i(x_0^{(k)} + e_j y_{0j}^{(k)}, x_l^{(k)}) - g_i(x_0^{(k)}, x_l^{(k)})}{y_{0j}^{(k)}} \dots \right);$$

$$\Gamma_l^{(k)} = \Gamma_l(x_0^{(k)}, x_l^{(k)}, y_l^{(k)}) = \left(\dots \frac{g_i(x_0^{(k)}, x_l^{(k)} + e_j y_{lj}^{(k)}) - g_i(x_0^{(k)}, x_l^{(k)})}{y_{lj}^{(k)}} \dots \right)$$

є різницеві аналоги матриць Якобі для вектор-функцій $f(t, x)$, $g(x_0, x_l)$; $y(t)$ — N -вимірний вектор-функція

$$(\min_{t, l} |y_i(t)| > 0); \quad f^{(k, s)}(t) = f(t, x^{(k, s)}), \quad g^{(k, s)} = g(x_0^{(k, s)}, x_l^{(k, s)}).$$

Легко бачити, що обчислювальна схема різницевого аналогу методу лінеаризації [2] є частковий випадок схеми (2).

В цій статті доведемо збіжність обчислювальної схеми (2), а також дамо алгоритм для визначення оптимальної (в розумінні кількості операцій, використаних на обчислення кінцевого результату) схеми розв'язування конкретної крайової задачі (1), тобто покажемо, як вибрати p , щоб обчислювальна схема із класу (2) давала розв'язок задачі (1) при виконанні мінімального числа операцій.

Введемо деякі позначення. Нехай $\Phi^{(x)}(t, \alpha)[\tilde{\Phi}^{(x)}(t, \alpha)]$ — фундаментальна матриця, яка задовольняє системі

$$\frac{d\Phi^{(x)}}{dt} = \Gamma_f(t, x, y) \Phi^{(x)}, \quad \Phi^{(x)}(\alpha, \alpha) = E;$$

$$\left[\frac{d\tilde{\Phi}^{(x)}}{dt} = \tilde{\Gamma}_f(t, x, x^*) \tilde{\Phi}^{(x)}, \quad \tilde{\Phi}^{(x)}(\alpha, \alpha) = E \right];$$

S_t — області, які визначаються при кожному $t \in [0, l]$ нерівністю

$$\|x(t) - x^{(0)}(t)\| \leq \rho,$$

де $x^{(0)}(t)$ задана вектор-функція. Для скорочення запису введемо:

$$b = \sqrt{2} (\sqrt{b_1^2 + b_2^2} + \sqrt{b_2^2 + b_3^2});$$

$$\Phi^{(k)}(t) = \Phi^{(x^{(k)})}(t, 0);$$

$$\tilde{\Gamma}_f^{(k)}(t) = \Gamma_f(t, x^{(k)}, x^*) = \int_0^1 \Gamma_f(t, x^* + \tau(x^{(k)} - x^*)) d\tau.$$

Теорема. Нехай виконуються умови:

- 1) $\|y^{(k)}(t)\| \leq c \|x^{(k+1)}(t) - x^{(k)}(t)\|$;
- 2) $\|\Gamma_f(t, x, y)\| \leq a_1$ для $x(t) \in S_t$, $x(t) + e_j y_j(t) \in S_t$;
- 3) $\|\Gamma_l(x_0, x_l, y_l)\| \leq a_2$ для $x_0 \in S_0$, $x_l \in S_l$, $x_l + y_l \in S_l$;
- 4) $\|[\Gamma_0(x_0, x_l, y_0) + \Gamma_l(x_0, x_l, y_l) \Phi^{(x)}(l, 0)]^{-1}\| \leq a_3$ для $x_0 \in S_0$, $x_0 + y_0 \in S_0$, $x_l + y_l \in S_l$, $x_l \in S_l$.

а лінійні крайові задачі (2) мають розв'язок при кожному k ;

$$\begin{aligned}
 5) \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\| \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_{0j} \cdot \partial x_{0i}} \tau d\tau d\gamma \right\|^2 \leq b_1^2; \\
 & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\| \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_{0i} \cdot \partial x_{0j}} d\tau d\gamma \right\|^2 \leq b_1^2; \\
 & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\| \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_{lj} \cdot \partial x_{li}} \tau d\tau d\gamma \right\|^2 \leq b_3^2; \\
 & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\| \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_{lj} \cdot \partial x_{li}} d\tau d\gamma \right\|^2 \leq b_3^2; \\
 & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\| \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_{0j} \cdot \partial x_{li}} \tau d\tau d\gamma \right\|^2 \leq b_2^2; \\
 & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\| \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_{0j} \cdot \partial x_{li}} d\tau d\gamma \right\|^2 \leq b_2^2; \\
 & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\| \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_{lj} \cdot \partial x_{0i}} \tau d\tau d\gamma \right\|^2 \leq b_2^2; \\
 & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\| \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_{lj} \cdot \partial x_{0i}} d\tau d\gamma \right\|^2 \leq b_2^2;
 \end{aligned}$$

якщо аргументи других похідних $(1-\gamma)x_0 + \tau(1-\gamma)e_j y_{0j} + \tau z_0 + \gamma(1-\tau)x_0^*$, $(1-\gamma)x_l + \tau(1-\gamma)e_j y_{lj} + \tau z_l + \gamma(1-\tau)x_l^*$ належать відповідно S_0 , S_l при $0 \leq \tau, \gamma \leq 1$;

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\| \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \tau d\tau d\gamma \right\|^2 \leq a^2; \\
 & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\| \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j} d\tau d\gamma \right\|^2 \leq a^2,
 \end{aligned}$$

якщо аргументи другої похідної $(1-\gamma)x + \tau(1-\gamma)e_j y_j + \gamma(1-\tau)x^* + \tau z$ для всіх $t \in [0, 1]$ і $0 \leq \gamma, \tau \leq 1$ належать S_l ;

7) початкове наближення $x^{(0)}(t)$ вибрано як розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx^{(0)}}{dt} = f(t, x^{(0)}) \quad x^{(0)}(0) = x_0^{(0)}$$

з таким початковим вектором $x_0^{(0)}$, що

$$\beta = \alpha(2+c) \max_t \left\| \tilde{\Phi}^{(0)}(t) [\tilde{\Gamma}_0^{(0)} + \tilde{\Gamma}_l^{(0)} \tilde{\Phi}^{(0)}(l)]^{-1} (d - g(x_0^{(0)}, x_l^{(0)})) \right\| < 1$$

i

$$\omega(\beta) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{2^i} \leq \frac{\rho}{3+c},$$

де

$$\alpha = e^{a_1 t} \left[\left[b + a_2 a \sqrt{2} \left(\frac{e^{a_1 t} - 1}{a_1} \right) \right] a_3 + 2 a \frac{1 - e^{-a_1 t}}{a_1} \right].$$

Тоді послідовність $\{x^{(h)}(t)\}$, одержана за схемою (2), збігається до границі $x^*(t)$, яка належить області S_t для всіх $t \in [0, 1]$ і є розв'язком задачі (1), причому

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq \frac{1}{\alpha(2+c)} \beta^{(p+1)k}.$$

Доведення. Існування розв'язку задачі (1) впливає з теореми 1 [1], якщо до цієї теореми застосувати умови розглядуваної нами теореми, тобто послідовність $\{x^{(h)}(t)\}$ одержана за схемою (2), при $p=1$ збігається до границі $x^*(t)$, яка є розв'язком задачі (1). Покажемо, що до $x^*(t)$ збігається послідовність $\{x^{(h)}(t)\}$, яка одержана за схемою (2) при $p > 1$. З (2) знаходимо:

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(k,s)}}{dt} - \frac{dx^*}{dt} &= \Gamma_f^{(k)}(t)(x^{(k,s)} - x^*) - \Gamma_f^{(k)}(t)(x^{(k,s-1)} - x^*) + \\ &\quad + f(t, x^{(k,s-1)}) - f(t, x^*), \\ \Gamma_{(0)}^{(k)}(x_0^{(k,s)} - x_0^*) + \Gamma_l^{(k)}(x_l^{(k,s)} - x_l^*) &= d - g^{(k,s-1)} + \\ &\quad + \Gamma_0^{(k)}(x_0^{(k,s-1)} - x_0^*) + \Gamma_l^{(k)}(x_l^{(k,s-1)} - x_l^*). \end{aligned} \quad (3)$$

Введемо позначення

$$\xi^{(k,s)}(t) = x^{(k,s)}(t) - x^*(t), \quad \tilde{\Gamma}_f^{(k,s)}(t) = \int_0^1 \Gamma_f(t, x^* + \tau \xi^{(k,s)}(t)) d\tau,$$

$$\tilde{\Gamma}_0^{(k,s)} = \int \Gamma_0(x_0^* + \tau \xi_0^{(k,s)}, x_l^* + \tau \xi_l^{(k,s)}) d\tau, \quad (4)$$

$$\tilde{\Gamma}_l^{(k,s)} = \int_0^1 \Gamma_l(x_0^* + \tau \xi_0^{(k,s)}, x_l^* + \tau \xi_l^{(k,s)}) d\tau.$$

З (3), беручи до уваги рівності

$$f(t, x^{(k,s-1)}) - f(t, x^*) = \Gamma_f^{(k,s-1)}(t) \xi^{(k,s-1)}(t),$$

$$g(x_0^{(k,s-1)}, x_l^{(k,s-1)}) - g(x_0^*, x_l^*) = \tilde{\Gamma}_0^{(k,s-1)} \xi_0^{(k,s-1)} + \tilde{\Gamma}_l^{(k,s-1)} \xi_l^{(k,s-1)}, \quad (5)$$

дістанемо

$$\frac{d\xi^{(k,s)}(t)}{dt} = \Gamma_f^{(k)}(t) \xi^{(k,s)}(t) - \Gamma_f^{(k)}(t) \xi^{(k,s-1)}(t) + \tilde{\Gamma}_f^{(k,s-1)}(t) \xi^{(k,s-1)}(t), \quad (6)$$

$$\Gamma_0^{(k)} \xi_0^{(k,s)} + \Gamma_l^{(k)} \xi_l^{(k,s)} = [\Gamma_0^{(k)} - \tilde{\Gamma}_0^{(k,s-1)}] \xi_0^{(k,s-1)} + [\Gamma_l^{(k)} - \tilde{\Gamma}_l^{(k,s-1)}] \xi_l^{(k,s-1)}.$$

Оцінимо розв'язок крайової задачі (6). За допомогою фундаментальної матриці розв'язок системи (6) можна записати у вигляді [3]

$$\xi^{(k,s)}(t) = \Phi^{(k)}(t) \xi_0^{(k,s)} + \int_0^t \Phi^{(k)}(t, \tau) [\tilde{\Gamma}_f^{(k,s-1)}(\tau) - \Gamma_f^{(k)}(\tau)] \xi^{(k,s-1)}(\tau) d\tau. \quad (7)$$

При використанні рівності (7) крайові умови задачі (6) можна визначити так

$$\begin{aligned} [\Gamma_0^{(k)} + \Gamma_l^{(k)} \Phi^{(k)}(l)] \xi_0^{(k, s)} &= [\Gamma_0^{(k)} - \tilde{\Gamma}_0^{(k, s-1)}] \xi_0^{(k, s-1)} + \\ &+ [\Gamma_l^{(k)} - \tilde{\Gamma}_l^{(k, s-1)}] \xi_l^{(k, s-1)} - \Gamma_l^{(k)} \int_0^l \Phi^{(k)}(l, \tau) \times \\ &\times [\tilde{\Gamma}_f^{(k, s-1)}(\tau) - \Gamma_f^{(k)}(\tau)] \xi^{(k, s-1)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

З даної рівності одержимо

$$\begin{aligned} \|\xi_0^{(k, s)}\| &\leq \|[\Gamma_0^{(k)} + \Gamma_l^{(k)} \Phi^{(k)}(l)]^{-1}\| \left\{ \|\Gamma_0^{(k)} - \tilde{\Gamma}_0^{(k, s-1)}\| + \right. \\ &+ \|\Gamma_l^{(k)} - \tilde{\Gamma}_l^{(k, s-1)}\| + \|\Gamma_l^{(k)}\| \int_0^l \exp\left(\int_\tau^l \|\Gamma_f^{(k)}(\tau_1)\| d\tau_1\right) \times \\ &\times \max_\tau \|\Gamma_f^{(k)}(\tau) - \tilde{\Gamma}_f^{(k, s-1)}(\tau)\| d\tau \Big\} \max_t \|\xi^{(k, s-1)}(t)\|. \end{aligned} \quad (8)$$

Тепер можна записати таку оцінку для $\xi^{(k, s)}(t)$:

$$\begin{aligned} \|\xi^{(k, s)}(t)\| &\leq \left\{ \exp\left(\int_0^t \|\Gamma_f^{(k)}(t)\| dt\right) \|[\Gamma_0^{(k)} + \Gamma_l^{(k)} \Phi^{(k)}(l)]^{-1}\| \times \right. \\ &\times \left[\|\Gamma_0^{(k)} - \tilde{\Gamma}_0^{(k, s-1)}\| + \|\Gamma_l^{(k)} - \tilde{\Gamma}_l^{(k, s-1)}\| + \|\Gamma_l^{(k)}\| \times \right. \\ &\times \left. \int_0^l \exp\left(\int_\tau^l \|\Gamma_f^{(k)}(\tau_1)\| d\tau_1\right) \max_\tau \|\Gamma_f^{(k)}(\tau) - \tilde{\Gamma}_f^{(k, s-1)}(\tau)\| d\tau \right] + \\ &+ \left. \int_0^t \exp\left(\int_\tau^t \|\Gamma_f^{(k)}(t_1)\| dt_1\right) \max_\tau \|\tilde{\Gamma}_f^{(k, s-1)}(\tau) - \Gamma_f^{(k)}(\tau)\| d\tau \right\} \max_t \|\xi^{(k, s-1)}(t)\|. \end{aligned} \quad (9)$$

Припустимо, що виконуються умови (5), (6) розглядуваної нами теореми. Тоді справедливі оцінки:

$$\begin{aligned} \|\Gamma_f^{(k)} - \tilde{\Gamma}_f^{(k, s-1)}\| &\leq \sqrt{2} a \max_t [\|x^*(t) - x^{(k, s-1)}(t)\| + \\ &+ (1+c) \|x^*(t) - x^{(k)}(t)\|]; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0^{(k)} - \tilde{\Gamma}_0^{(k, s-1)}\| &\leq \sqrt{2(b_1^2 + b_2^2)} \max_t [\|x^*(t) - x^{(k, s-1)}(t)\| + \\ &+ (1+c) \|x^*(t) - x^{(k)}(t)\|]; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \|\Gamma_l^{(k)} - \tilde{\Gamma}_l^{(k, s-1)}\| &\leq \sqrt{2(b_2^2 + b_3^2)} \max_t [\|x^*(t) - x^{(k, s-1)}(t)\| + \\ &+ (1+c) \|x^*(t) - x^{(k)}(t)\|]. \end{aligned} \quad (12)$$

Розглянемо, як одержати одну з даних оцінок, наприклад першу. Нехай $\Gamma_{f_j}'(t, w^{(k)})$ — матриця Якобі від вектор-функції $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ по аргументах $x_i (i=1, 2, \dots, N)$, тоді

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{x^{(k)} + \tau e_j y_j^{(k)}} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{x^* + \tau \xi^{(k, s-1)}} = \\ & = \int_0^1 \Gamma_{f_j}'(t, w^{(k)}) d\gamma [x^{(k)} + \tau e_j y_j^{(k)} - x^* - \tau \xi^{(k, s-1)}], \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$w^{(k)} = x^{(k)} + \tau e_j y_j^{(k)} + \gamma (x^* + \tau \xi^{(k, s-1)} - x^{(k)} - \tau e_j y_j^{(k)}).$$

Використовуючи (13), дістанемо

$$\begin{aligned} \| \Gamma_f^{(k)} - \tilde{\Gamma}_f^{(k, s-1)} \|^2 & \leq \sum_{j=1}^N \left\| \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{x^{(k)} + \tau e_j y_j^{(k)}} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{x^* + \tau \xi^{(k, s-1)}} \right] d\tau \right\|^2 \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^N \left\| \int_0^1 \int_0^1 \Gamma_{f_j}'(t, w^{(k)}) d\gamma [x^{(k)} - x^* + \tau (e_j y_j^{(k)} - \xi^{(k, s-1)})] d\tau \right\|^2 \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^N \left\{ \left\| \int_0^1 \int_0^1 \Gamma_{f_j}'(t, w^{(k)}) d\gamma d\tau \right\| \|x^{(k)} - x^*\| + \right. \\ & \left. + \left\| \int_0^1 \int_0^1 \Gamma_{f_j}'(t, w^{(k)}) \tau d\gamma d\tau \right\| (\|y^{(k)}\| + \|\xi^{(k, s-1)}(t)\|) \right\}^2. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left\| \int_0^1 \int_0^1 \Gamma_{f_j}'(t, w^{(k)}) d\gamma d\tau \right\|^2 & \leq \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \left\| \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} d\tau d\gamma \right\|^2 \leq a^2, \\ \sum_{j=1}^N \left\| \int_0^1 \int_0^1 \Gamma_{f_j}'(t, w^{(k)}) \tau d\gamma d\tau \right\|^2 & \leq \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \left\| \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \tau d\tau d\gamma \right\|^2 \leq a^2, \end{aligned}$$

то, припускаючи, що $w^{(k)} \in S_L$, дістанемо

$$\| \Gamma_f^{(k)} - \tilde{\Gamma}_f^{(k, s-1)} \| \leq \sqrt{2} a \{ \|x^{(k)} - x^*\| (1 + c) + \|x^{(k, s-1)} - x^*\| \}.$$

Аналогічно доводимо справедливість оцінок (11), (12). З (9), використовуючи оцінки (10) — (12), маємо:

$$\begin{aligned} \|\xi^{(k, s)}(t)\| & \leq e^{a_1 t} \left\{ a_3 (b + \sqrt{2} a a_2) \frac{e^{a_1 t} - 1}{a_1} + \sqrt{2} a \frac{1 - e^{-a_1 t}}{a_1} \right\} \times \\ & \times \max_t \|\xi^{(k, s-1)}(t)\| [\|x^{(k)} - x^*\| (1 + c) + \|x^{(k, s-1)} - x^*\|] \leq \\ & \leq a \max_t [\|x^{(k, s-1)} - x^*\|^2 + (1 + c) \|x^{(k)} - x^*\| \|x^{(k, s-1)} - x^*\|]. \end{aligned} \quad (14)$$

Запишемо нерівність (14) послідовно для $s=1, 2, \dots, p$

$$\begin{aligned}
 \|x^{(k, 1)} - x^*\| &\leq \alpha (2 + c) \max_t \|x^{(k)} - x^*\|^2 = c_1 \max_t \|x^{(k)} - x^*\|^2; \\
 \|x^{(k, 2)} - x^*\| &\leq \alpha c_1 \max_t \|x^{(k)} - x^*\|^3 [c_1 \|x^{(k)} - x^*\| + (1 + c)] \leq \\
 &\leq c_2 \max_t \|x^{(k)} - x^*\|^3; \\
 &\vdots \\
 \|x^{(k, p)} - x^*\| &\leq \alpha c_{p-1} \max_t \|x^{(k)} - x^*\|^{p+1} [c_{p-1} \|x^{(k)} - x^*\|^{p-1} + (1 + c)] \leq \\
 &\leq c_p \max_t \|x^{(k)} - x^*\|^{p+1}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Відзначимо, що при виконанні умови

$$c_1 \max_t \|x^* - x^{(k)}\| \leq 1 \tag{16}$$

можна прийняти

$$c_s = c_1^s. \tag{17}$$

Для встановлення справедливості виразів (15)–(17) достатньо показати, що аргументи других похідних в (13) належать S_t при $t \in [0, l]$. Оскільки

$$\begin{aligned}
 d - g(x_0^{(0)}, x_l^{(0)}) &= g(x_0^*, x_l^*) - g(x_0^{(0)}, x_l^{(0)}) = \\
 &= \tilde{\Gamma}_0^{(0)}(x_0^* - x_0^{(0)}) + \tilde{\Gamma}_l^{(0)}(x_l^* - x_l^{(0)})
 \end{aligned} \tag{18}$$

а $x^{(0)}$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{dx^{(0)}}{dt} = f(t, x^{(0)}) \quad x^{(0)}(0) = x_0^{(0)},$$

то можна записати

$$x^{(0)} - x^* = \tilde{\Phi}^{(0)}(t)(x_0^{(0)} - x_0^*). \tag{19}$$

З (18), (19) дістанемо

$$x_0^{(0)} - x_0^* = [\tilde{\Gamma}_0^{(0)} + \tilde{\Gamma}_l^{(0)} \tilde{\Phi}^{(0)}(l)]^{-1} (g(x_0^{(0)}, x_l^{(0)}) - d). \tag{20}$$

З (19), (20), беручи до уваги умови теореми, знаходимо

$$\begin{aligned}
 c_1 \max_t \|x^* - x^{(0)}\| &\leq \alpha (2 + c) \max_t \|\tilde{\Phi}^{(0)}(t) \times \\
 &\times [\tilde{\Gamma}_0^{(0)} + \tilde{\Gamma}_l^{(0)} \tilde{\Phi}^{(0)}(l)]^{-1} (d - g(x_0^{(0)}, x_l^{(0)}))\| < 1.
 \end{aligned} \tag{21}$$

З (15) і (21) одержимо

$$\begin{aligned}
 \|x^{(k)} - x^*\| &\leq \max_t \|x^{(0)} - x^*\|; \\
 \|x^{(k, s)} - x^*\| &\leq \max_t \|x^{(0)} - x^*\|.
 \end{aligned} \tag{22}$$

З (21), (22) і умов теореми бачимо, що $x^{(k)}$ і $x^{(k, s)}$ належать S_t . Покажемо, що $w^{(k)} \in S_t$. Дійсно,

$$\begin{aligned} \|w^{(k)} - x^{(0)}\| &= \|x^{(k)} + \tau y_j^{(k)} e_j + \gamma [x^* + \tau (x^{(k, s-1)} - x^*) - x^{(k)} - \\ &- \tau y_j^{(k)} e_j] - x^{(0)}\| \leq (1 - \gamma) \|x^{(k)} - x^*\| + \|x^* - x^{(0)}\| + \tau (1 - \gamma) \|y^{(k)}\| + \\ &+ \gamma \tau \|x^{(k, s-1)} - x^*\| \leq (3 + c) \max_t \|x^{(0)} - x^*\| \leq \rho. \end{aligned}$$

Аналогічно перевіряються умови $w_0^{(k)} \in S_0$, $w_l^{(k)} \in S_l$. Одержані оцінки показують, що при виведенні нерівності (14) можна використовувати умови теореми. Отже, нерівність (15) виконується при будь-якому k . З (15) дістанемо

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq \frac{1}{\alpha(2+c)} \beta^{(p+1)k}.$$

Доведена теорема дає можливість ставити задачу про вибір оптимального обчислювального процесу з класу (2). Якщо вважати, що для одержання $x^{(k+1)}$ за відомим наближенням $x^{(k)}$ необхідно здійснити p кроків ітерації (розв'язуємо p лінійних крайових задач), то легко бачити, що збіжність ітераційного процесу (2) при $p > 1$ має менший порядок, ніж збіжність різницевого аналогу методу лінеаризації. Однак не можна говорити, що обчислювальна схема (2) менш ефективна, ніж різницевий аналог методу лінеаризації. Схема (2) відрізняється від схеми різницевого аналогу методу лінеаризації. При використанні схеми (2) значення матриць $\Gamma_f(t)$ (при інтегруванні лінійної крайової задачі $\Gamma_f(t)$ обчислюється в багатьох точках $t_i \in [0, 1]$), $\Gamma_0(x_0, x_l)$, $\Gamma_l(x_0, x_l)$ замінюються новими після розв'язку p лінійних крайових задач. При використанні схеми різницевого аналогу значення цих матриць змінюється на кожному кроці. Оскільки для обчислення даних матриць необхідно виконати велике число операцій, то доцільно використовувати схеми з класу (2). Припустимо, що при розв'язуванні лінійної крайової задачі затрачається N_f операцій на побудову матриць $\Gamma_f(t, x)$, $\Gamma_0(x_0, x_l)$, $\Gamma_l(x_0, x_l)$ і N_c операцій на всі інші обчислення. Після відповідних перетворень [5] знаходимо, що за p , при якому одержуємо оптимальну схему, необхідно взяти найближче до t^* ціле число, де t^* — розв'язок рівняння

$$\ln(1+t) = 1 + \left(\frac{N_f}{N_c} - 1\right) \frac{1}{1+t} \quad (t \geq 1).$$

Слід відзначити, що аналогічна теорема має місце і для методу лінеаризації [4]. Теорема, аналогічна розглянутій теоремі, справедлива для обчислювальної схеми (2), коли p є величиною, залежною від k , тобто коли на кожній зовнішній ітерації число внутрішніх ітерацій не є сталим.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бартіш М. Я. Про реалізацію методу лінеаризації на ЕЦОМ. ДАН УРСР, сер. А, № 12, 1967.
2. Бартіш М. Я. Разностный аналог метода линеаризации, УМЖ, 1968, т. 20, № 3.
3. Крейн М. Г. Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. ИМ АН УССР, Киев, 1966.
4. Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ, ч. 2, «Наукова думка», Киев, 1966.
5. Шаманский В. Е. Об одной модификации метода Ньютона. УМЖ, 1967, т. 19, № 1.

v-ПОВЕРХНІ ПРЯМОЛІНІЙНОЇ КОНГРУЕНЦІЇ

Поняття поверхні v було введено в роботі [1]. Нехай C — прямолінійна конгруенція, сферичне відображення якої покриває двовимірну область на сфері. Нехай конгруенція C відображається на конгруенцію C^* так, що напрям променів зберігається. Якщо при цьому віддалі між нескінченно близькими твірними деякої лінійчатої поверхні конгруенції C зберігаються, то цю поверхню і відповідну їй поверхню конгруенції C^* називатимемо поверхнями v .

Надалі будемо вважати, що випадки, коли конгруенції C і C^* відрізняються лише положенням в просторі, виключаються.

Оскільки відповідні промені конгруенції C і C^* паралельні, то можна вважати, що приєднані до цих променів ортонормальні репери мають відповідно паралельні вектори. В такому разі конгруенції C і C^* матимуть однакові форми ω_1^3, ω_2^3 [3].

Нехай другі квадратичні форми конгруенцій C і C^* відповідно

$$\begin{aligned} & -b'(\omega_1^3)^2 + (a-c)\omega_1^3\omega_2^3 + b(\omega_2^3)^2; \\ & -b^*(\omega_1^3)^2 + (a^*-c^*)\omega_1^3\omega_2^3 + b^*(\omega_2^3)^2. \end{aligned}$$

Тоді диференціальне рівняння поверхонь v запишеться таким чином:

$$-(b'-b^*)(\omega_1^3)^2 + (a-c-a^*+c^*)\omega_1^3\omega_2^3 + (b-b^*)(\omega_2^3)^2 = 0. \quad (1)$$

Теорема 1. Якщо конгруенції C і C^* — ізотропні, то вони не містять в собі поверхонь v .

Доведення. Сумістимо початок кожного променя конгруенцій C і C^* з центром цього променя. Тоді рівняння (1), оскільки конгруенції C, C^* — ізотропні, матиме вигляд

$$(b-b^*)[(\omega_1^3)^2 + (\omega_2^3)^2] = 0,$$

звідки $b=b^*$. Отже, конгруенція C^* від конгруенції C відрізняється лише положенням в просторі, що неможливо. Теорему доведено.

Теорема 2. Якщо конгруенції C і C^* — нормальні, то сферичне відображення поверхонь v утворює ортогональну сітку.

Доведення. Нехай ортонормальні репери до відповідних променів конгруенцій C і C^* приєднані таким чином, що рівняння $\omega_2^3=0$ визначає одну сім'ю поверхонь v . Тоді з (1) маємо

$$b'=b^*. \quad (2)$$

Оскільки конгруенції C і C^* — нормальні, то

$$b=b', \quad b^*=b'^*. \quad (3)$$

З (2) і (3) випливає, що

$$b = b^* \quad (4)$$

На основі (2), (4) рівняння (1) запишеться у такому вигляді:

$$(a - c - a^* + c^*) \omega_1^3 \omega_2^3 = 0,$$

що і доводить справедливість нашого твердження.

Теорема 3. Якщо сітка головних поверхонь конгруенції C складається з поверхонь v , то і сітка головних поверхонь конгруенції C^* складається з поверхонь v .

Доведення. Приєднаємо ортонормальні реperi до відповідних променів конгруенцій C і C^* так, щоб рівняння

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 = 0$$

визначали головні поверхні конгруенції C . Тоді

$$b = -b'. \quad (5)$$

Крім того, оскільки сітка головних поверхонь конгруенції C складається з поверхонь v , то

$$b = b^*, \quad b' = b'. \quad (6)$$

З (5) і (6) маємо

$$b^* = -b'.$$

Отже, сітка головних поверхонь конгруенції C^* також складається з поверхонь v . Теорему доведено.

Слід відзначити, що в існуванні вказаних в теоремах 1—3 випадків легко переконатись, якщо скористуватись теоремою про визначення конгруенції двома квадратичними формами.

Теорема 4. Нехай віддаль між відповідними променями конгруенцій C , C^* є величина стала. Тоді одна сім'я поверхонь v конгруенції C буде такою, що дотична до сферичного відображення кожної поверхні цієї сім'ї є перпендикулярною до площини відповідних променів конгруенцій C , C^* .

Доведення. Нехай рівняння опорних поверхонь конгруенцій C , C^* відповідно

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \bar{A}(u, v); \\ \bar{B} &= \bar{A}(u, v) + p \bar{e}_1(u, v), \end{aligned} \quad (7)$$

де $\bar{e}_1$ — вектор приєднаного до променя ортонормального репера $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, вектор $\bar{e}_3$ якого є напрямним вектором променя.

Оскільки $p = \cos \varphi$, то з (7) маємо

$$d\bar{B} = \omega^1 \bar{e}_1 + (\omega^2 + p \omega_1^2) \bar{e}_2 + (\omega^3 + p \omega_1^3) \bar{e}_3. \quad (8)$$

Як відомо [3],

$$\begin{aligned} \omega^1 &= a \omega_1^3 + b \omega_2^3, & \omega^2 &= b' \omega_1^3 + c \omega_2^3, \\ \omega_1^2 &= h \omega_1^3 + k \omega_2^3. \end{aligned}$$

Тому (8) набирає вигляду

$$d\bar{B} = (a \omega_1^3 + b \omega_2^3) \bar{e}_1 + [(b' + p h) \omega_1^3 + (c + p k) \omega_2^3] \bar{e}_2 + (\omega^3 + p \omega_1^3) \bar{e}_3.$$

Звідси маємо, що

$$\overset{*}{a} = a, \overset{*}{b} = b, b' = b' + ph, \overset{*}{c} = c + pk. \quad (9)$$

На основі (9) рівняння (1) запишемо таким чином:

$$h(\omega_1^3)^2 + k\omega_1^3\omega_2^3 = 0.$$

Отже, одна сім'я поверхонь ν визначатиметься рівнянням

$$\omega_1^3 = 0,$$

звідки і виходить справедливості нашого твердження.

Теорема 5. Нехай C — нормальна конгруенція і Φ — поверхня, яка ортогонально перетинає промені конгруенції C . Нехай на поверхні Φ задано поле вектора $\bar{a}$. Нехай логарифмічний градієнт довжини вектора $\bar{a}$ направлений по нормалі до трансверсалі поля вектора $\bar{a}$ і промінь конгруенції C проходить через кінець цього вектора. Тоді трансверсалі поля вектора $\bar{a}$ є лініями перетину поверхонь ν конгруенції C з поверхнею Φ .

Доведення. Рівняння (1) можна записати тепер таким чином:

$$(\bar{m}\partial_i\bar{m}\partial_j\bar{a})du_idu_j=0, \quad (10)$$

де u^1, u^2 — криволінійні координати на поверхні Φ ; $\bar{m}$ — одиничний напрямний вектор нормалі до цієї поверхні.

Віднесемо поверхню Φ до ліній кривизни. Тоді

$$\partial_i\bar{m} = -k_{0i}\partial_i\bar{r}, \quad (11)$$

де $\bar{r}$ — радіус-вектор точки поверхні Φ , а k_{0i} — головна кривизна поверхні Φ .

Рівняння (10) на основі (11) набирає вигляду

$$k_{0i}(\bar{m}\partial_i\bar{r}\partial_j\bar{a})du_idu_j=0,$$

або

$$k_{0i}e_{ik}\nabla_j a^k du^i du^j = 0, \quad (12)$$

де e_{ik} — дискримінантний тензор.

Нехай α_j — трансверсальний вектор поля вектора $\bar{a}$, A_j — логарифмічний градієнт довжини вектора $\bar{a}$; $\tilde{a}^k$ — доповняльний до вектора $\bar{a}$ вектор. Тоді [2]

$$\nabla_j a^k = \alpha_j \tilde{a}^k + A_j a^k. \quad (13)$$

Отже, на основі (13) рівняння (12) запишемо у вигляді

$$k_{0i}e_{ik}(\alpha_j \tilde{a}^k + A_j a^k) du^i du^j = 0$$

або

$$k_{0i}\alpha_j a_i du^i du^j - k_{0i}A_j \tilde{a}_i du^i du^j = 0.$$

Звідси і випливає справедливості теореми.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дениско С. В. О некоторых свойствах преобразования прямолинейной конгруэнции, сохраняющего направления лучей. Тезисы третьей межвузовской научной конференции по проблемам геометрии. Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1967.
2. Норден А. П. Теория поверхностей. Гостехиздат, М., 1956.
3. Фиников С. П. Теория конгруэнций. Гостехиздат, М.—Л., 1950.

Л. О. СТАРОКАДОМСЬКИЙ

ПРО НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ НА ПЛОЩИНІ З ЩІЛИНАМИ

Метод розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа на площині з щілинами розроблений Н. І. Мусхелішвілі і описаний в [1]. В нашій статті дається певна деталізація цього методу і його дальша розробка.

Будемо додержуватись позначень і припущень, прийнятих в [1]. Зокрема, прийmemo, що на комплексній площині $z=x+iy$ задається

кусково-гладка лінія $L=\sum_{k=1}^p L_k$, яка складається з p розімкнутих дуг

$L_k=a_k b_k$ з вибраними на них додатними напрямками від точки a_k до точки b_k . Точки $t=x(s)+iy(s)$ цієї лінії задані умовами

$$x=x_k(s); \quad y=y_k(s); \quad x_k, y_k \in C^{(n,1)} \quad (n \geq 2); \quad \left(\frac{dx_k}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_k}{ds}\right)^2 \neq 0, \quad (1)$$

де s — деякий параметр (наприклад, довжина дуги) і $s_k \leq s \leq S_k$ на L_k . Як $\alpha(z_0, t)$ позначимо кут між додатною дотичною до L в точці t та вектором $\vec{z_0 t}$, що відлічується від $\vec{z_0 t}$ проти годинникової стрілки. Приймемо також, що

$$r(z_0, t)=|t-z_0|; \quad \vartheta(z_0, t)=\arg(t-z_0); \quad R(t)=\prod_{k=1}^p (t-a_k)(t-b_k).$$

Домовимось не змінювати позначень функції при зміні аргументу (наприклад, пишемо $\alpha(z_0, t)=\alpha(x_0, y_0; x, y)=\alpha(x_0, y_0; s)$ і т. д.). Під задачею Діріхле відповідно до [1] розуміємо визначення функції U , гармонічної поза L і регулярної на нескінченності, за граничною умовою

$$U_L^+ = U_L^- = f, \quad (2)$$

а під видозміненою задачею Діріхле — визначення функції $u=\operatorname{Re} \Phi = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L M(t) \frac{dt}{t-z_0}$; ($M \in H$) за граничною умовою

$$u_{L_k}^+ = u_{L_k}^- = f + C_k \quad (k=1, 2, \dots, p). \quad (3)$$

Індекси плюс та мінус вказують на належність відповідно до лівого чи правого околу точки $t \in L$. Густина M має значення M_k на L_k . Справедлива рівність

$$\frac{dt}{t-z_0} = \frac{\cos \alpha}{r} ds + i \frac{\sin \alpha}{r} ds.$$

За методом Н. І. Мусхелішвілі спочатку знаходять функцію

$$V=u+\sum_{k=1}^p \alpha_k v_k, \quad V(\infty)=0, \quad \text{де } \alpha_k \text{ є деякі сталі, } v_k = \int_{L_k} \sigma_k \ln r ds \text{ і}$$

$\sigma_k(s)$ такі, що $e_k = \int_{L_k} \sigma_k(s) ds \neq 0$, $v_k \in H$, а в іншому довільні. Оскільки $V(\infty)=0$, то

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k e_k = 0. \quad (4)$$

Для визначення u з граничної умови (3) дістаємо сингулярне інтегральне рівняння першого роду

$$\frac{1}{\pi} \int_L M \frac{\cos \alpha}{r} ds = f_\alpha + C(t), \quad (5)$$

де $f_\alpha = f - \sum_{k=1}^p \alpha_k v_k$, $C(t) = C_k$ на L_k . Це рівняння відомим способом (див. [1]) зводиться до рівняння Фредгольма другого роду

$$M(t_0) - \int_L M(t_1) N(t_1, t_0) dt_1 = F_\alpha(t_0) - \frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi} \sum_{k=1}^p C_k \int_{L_k} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}(t-t_0)} \quad (6)$$

при умові виконання рівностей:

$$\int_L \left[f_\alpha + C(t) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M(s_1) \sin \alpha(t, s_1)}{r(t, s_1)} ds_1 \right] \frac{t^{j-1} dt}{\sqrt{R(t)}} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, p), \quad (7)$$

де

$$N(t, t_1) = \frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi^2 i} \int_L \frac{\sin \alpha(t, t_1) e^{-i\alpha(t, t_1)}}{\sqrt{R(t)}(t-t_0)(t_1-t)} dt;$$

$$F_\alpha(t_0) = - \frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi} \int_L \frac{f(t) - \sum_{k=1}^p \alpha_k v_k(t)}{\sqrt{R(t)}(t-t_0)} dt.$$

З умови (4) і рівностей $C_1 = C_2 = \dots = C_p (= -\alpha_0)$ можна виразити всі α_k і α_0 через f і M , оскільки при $f=0$ маємо $M = \alpha_k = \alpha_0 = 0$, як буде показано нижче. Ці α_k запишемо у вигляді

$$\alpha_k = \int_L \left[f - \frac{1}{\pi i} \int_L M \frac{\sin \alpha}{r} ds_1 \right] \frac{\omega_k(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \quad (k=1, 2, \dots, p), \quad (8)$$

де ω_k — цілком визначені поліноми степеня, не більшого від $p-1$. Підставляючи одержані α_k в рівняння (6) і враховуючи тотожність

$$\int_L \frac{t^{j-1} dt}{\sqrt{R(t)}(t-t_0)} \equiv 0, \quad j \leq p, \quad (9)$$

дістанемо рівняння

$$M(t_0) - \int_L M(t_1) N_\omega(t_1, t_0) dt_1 = F_\omega(t_0), \quad (10)$$

де

$$N_{\omega} = \frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi^2 i} \int_L \left\{ 1 - (t-t_0) \sum_{j=1}^p \omega_j(t) \int_L \frac{v_j(\tau) d\tau}{\sqrt{R(\tau)}(\tau-t_0)} \right\} \times \\ \times \frac{\sin \alpha(t, t_1) e^{-i\alpha(t, t_1)}}{\sqrt{R(t)}(t-t_0)(t_1-t)} dt; \\ F_{\omega} = -\frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi} \int_L \left\{ 1 - (t-t_0) \sum_{j=1}^p \omega_j(t) \int_L \frac{v_j(\tau) d\tau}{\sqrt{R(\tau)}(\tau-t_0)} \right\} \frac{f(t) dt}{\sqrt{R(t)}(t-t_0)},$$

з якого випливає $M \in H$ і

$$M(S_k) = M(S_k) = 0. \quad (11)$$

Покажемо, що для рівнянь (10) (а значить, і для рівнянь (6) і (5)) цілком зберігаються такі факти, доведені в § 108 [1] для випадку $p=1$:

а) однорідне рівняння (10) (при $f=0$) має лише нульовий розв'язок;

б) рівняння (10) еквівалентне своїй дійсній частині.

Якщо $f=0$ і α_k такі, що $C_1=C_2=\dots=C_p=-\alpha_0$, то рівняння (5) можна записати у вигляді

$$w_L = \left[\frac{1}{\pi} \int_L M(s) \frac{\partial \ln r}{\partial s} ds + \sum_{k=1}^p \alpha_k \int_{L_k} \sigma_k \ln r ds \right]_L = -\alpha_0, \quad (12)$$

де $w = \int_L v \ln r ds$; $v = -\frac{1}{\pi} \frac{dM_k}{ds} + \alpha_k \sigma_k$ на L_k і позначення w_L зрозуміле із запису. Очевидно, що $w(\infty)=0$, тому з (12) маємо $v \equiv 0$, тобто

$\frac{dM_k}{ds} = \pi \alpha_k \sigma_k$ на L_k . Інтегруючи останню рівність, враховуючи (11) і умову $e_k \neq 0$, дістаємо $\alpha_k=0$ ($k=1, 2, \dots, p$). Це значить, що рівняння

(12) переходить у рівняння $\frac{1}{\pi} \int_L M \frac{dr}{r} = \text{const} = -\alpha_0$, з якого, як відомо

(див. § 108 в [1]), випливає $M=0$, $\alpha_0=0$. Цим і доводиться твердження а). Твердження б) про еквівалентність рівняння (10) своїй дійсній частині доводиться так само, як і в § 108 [1].

Розв'язок задачі Діріхле дається формулою $U=V+\alpha_0$.

При спробах практичної реалізації описаного методу виникають великі обчислювальні труднощі, які можна зменшити при використанні розглядуваного нижче способу. Оскільки рівняння (6) при $C_1=\dots=C_p$ лише формою запису відрізняється від рівняння (10), то покладемо $C_k=-\alpha_0$ для всіх k і будемо шукати розв'язок задачі Діріхле у вигляді

$U=u + \sum_{k=1}^p \alpha_k v_k + \alpha_0$, при цьому густину M визначимо за формулою

$$M = \sum_{k=1}^{p+1} \alpha_k M^{(k)}; \quad \alpha_{p+1}=1. \quad (13)$$

Функції $M^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, p$) лінійно незалежні, оскільки при $f=0$ буде $M^{(p+1)}=0$ і $\alpha_k=0$, що випливає з твердження а). Неважко поба-

чити, що задача тепер зводиться до визначення $M^{(k)}$ із сукупності Фредгольмових рівнянь другого роду

$$M^{(k)} - \int_L M^{(k)} N dt_1 = F_k \quad (k=1, 2, \dots, p+1), \quad (14)$$

що відрізняються від рівняння (6) і одне від одного лише правими частинами F_k

$$F_k = \frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi} \int_L \frac{v_k(t) dt}{\sqrt{R(t)} (t-t_0)}; \quad v_{p+1} = -f \quad (k=1, 2, \dots, p+1), \quad (15)$$

і до визначення α_k з умов (7) при $C(t) = -\alpha_0$. Умови (7) і (4) дають алгебраїчну систему відносно α_k

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k e_k = 0, \quad \sum_{k=0}^p \alpha_k \gamma_{jk} = A_j \quad (j=1, 2, \dots, p), \quad (16)$$

коефіцієнти γ_{jk} якої лінійно виражаються через $M^{(k)}$, а A_j через $M^{(p+1)}$. Оскільки рівняння (10) еквівалентне своїй дійсній частині, то легко показати, що $M^{(k)}$ можна знайти з рівнянь:

$$M^{(k)} - \int_L M^{(k)} N ds_1 = F_k \quad (k=1, 2, \dots, p+1),$$

$$N(s_1, s_0) = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\prod_{i=1}^{2p} r_i(s_0)} \int_L \frac{\sin \alpha(s, s_1) \sin \psi(s_0, s)}{r(s, s_1) r(s_0, s)} \frac{ds}{\sqrt{\prod_{i=1}^{2p} r_i(s)}},$$

$$F_k(s_0) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\sum_{i=1}^{2p} r_i(s_0)} \int_L \frac{\cos \psi(s_0, s)}{r(s_0, s)} \frac{v_k(s) ds}{\sqrt{\prod_{i=1}^{2p} r_i(s)}}, \quad (17)$$

де $\psi(s_0, s) = \varphi(s_0) - \varphi(s) + \alpha(s_0, s)$.

Розв'язавши рівняння (17), можна знайти всі α_k із системи (16), але це практично зробити не легко. Проте є можливість знаходити α_k , знаючи $M^{(k)}$, безпосередньо з граничної умови (3) при $C_k = -\alpha_0$ і з умови (4). Це можна довести так. Оскільки рівняння (6) при довільних α_k і $C_k = -\alpha_0$ і при M , взятому у вигляді (13), не буде еквівалентне рівнянню (5), то одержана з (5) рівність

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^p \alpha_k \left[\int_L \frac{M^{(k)} \cos \alpha}{r} ds + v_k \right] + \alpha_0 = f - \int_L \frac{M^{(p+1)} \cos \alpha}{r} ds. \quad (18)$$

не може бути виконана. Якщо ж α_k є розв'язком системи (16), а $M^{(k)}$ є розв'язком рівнянь (17), то рівність (18) перетворюється у тотожність. Навпаки, якщо α_k такі, що при всіх $s_0 \in L$ виконується рівність (18), де $M^{(k)}$ є розв'язок рівнянь (17), то тоді умови (16) або (4) і (7) виконуються автоматично. Дійсно, в цьому випадку справедлива рівність (5) (при $C_k = -\alpha_0$) і, значить, умова (7) переходить у рівність

$$\int_L \left[\int_L \frac{M(t_1) dt_1}{t_1 - t} \right] \frac{t^{j-1} dt}{V R(t)} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, p),$$

яка виконується тотожно, якщо взяти до уваги тотожність (9).

Сталі α_h , α_0 можна визначити, наприклад, задаючи систему точок $s_{0j} \in L_j$ ($j=1, 2, \dots, p$) в рівнянні (18). При виборі інших точок s_{0j} одержимо нові значення α_h , α_0 . Близькість цих нових значень до старих в цілому характеризує точність розв'язку задачі.

На основі сказаного можна зробити важливий висновок. За допомогою формули (13) від рівняння (18) перейдемо до рівняння (5) при $C(t) = -\alpha_0$. Рівняння (5) при $C(t) = -\alpha_0$ буде розв'язуватись єдиним способом, якщо α_h , α_0 задовольнятимуть умови (7) і (4). Оскільки при виконанні (1) ці умови тотожно задовольняються, то невідомі M і α_h , α_0 можна наближено визначити, розв'язуючи чисельно рівняння (5) при $C(t) = -\alpha_0$ відносно M і α_h , α_0 . Таким чином, наближений розв'язок задачі Діріхле на площині з щілинами може бути зведений до чисельного розв'язку сингулярного інтегрального рівняння першого роду (5) при $C(t) = -\alpha_0$.

Практична перевірка правильності наведених міркувань була зроблена на розрахунку плоского конденсатора (дві щілини). Значення потенціалу в окремих точках поля обчислювалися на ЕОМ з точністю до чотирьох знаків при використанні спочатку рівнянь (17) і (16), потім — рівнянь (17) і (18) і нарешті — рівняння (5) при $C(t) = -\alpha_0$. Одержані результати порівнювалися із значеннями потенціалу, які були обчислені з точністю до шести знаків методом конформного відображення на кільце. Виявилось, що значення α_h , α_0 у всіх варіантах збігалися з точністю до чотирьох знаків. Трудомісткість чисельного розрахунку поля за рівнянням (5) природно була найменшою.

Наведемо ще деякі зауваження, важливі при чисельному розв'язанні рівняння (5).

1) Як було показано в роботі [2], диференціальні властивості густини M описуються формулою (при $\sigma(t) = 1$)

$$M_k(x) = \sqrt{1-x^2} M_{1k}(x) + \alpha_k [2 \arccos x - \pi(1-x)] d_k, \quad (19)$$

де $M_{1k} \in C^{(n-2, \lambda)}$ і $-1 \leq x \leq 1$, $s = \frac{1}{2} [S_k + s_k + (S_k - s_k)x]$, $d_k = \frac{1}{2} (S_k + s_k)$.

2) Можна показати, що густині M властива симетрія, якщо L і f мають симетричні властивості.

3) Розв'язок рівняння (5) буде стійким по відношенню до таких малих збурень $\delta_f(t)$, $\delta_{v_k}(t)$ функцій f і v_k , які можна записати у вигляді $\delta_f = \varphi(\delta)\psi(\delta, t)$; $\delta_{v_k} = \varphi_k(\delta)\psi_k(\delta, t)$, де δ — деякий параметр, причому $\varphi(\delta) \rightarrow 0$, $\varphi_k(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, а $\psi(\delta, t)$, $\psi_k(\delta, t) \in H$ по t рівномірно відносно δ . Це впливає з стійкості рівнянь Фредгольма другого роду (14) відносно малих збурень правих частин F_k і властивостей інтеграла типу Коші, якими є функції F_k .

ЛІТЕРАТУРА.

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962, 2-е изд.
2. Старокадомский Л. А. Решение задачи Дирихле для плоскости со щелями методом сингулярных интегральных уравнений. Первая республиканская матем. конференция молодых исследователей, вып. 1, Изд-во АН УССР, стр. 606—616.

Л. О. СТАРОКАДОМСЬКИЙ

**ПРО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ
ПЕРШОГО РОДУ З ЛОГАРИФМІЧНИМ ЯДРОМ
І ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ НА ПЛОЩИНІ З ЩІЛИНОЮ**

Дослідженню інтегральних рівнянь першого роду з логарифмічною особливістю в ядрі присвячено ряд робіт (див., наприклад, [1—6]).

Ця стаття присвячена дослідженню рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \mu(t) \ln |t-x| dt = f(x) - \alpha_0; \quad |x| \leq a \quad (1)$$

(де α_0 — деяка константа) і зв'язаної з ним задачі Діріхле на площині $z = x + iy$ з розрізом $[-a, a]$ по осі x :

$$\Delta U = 0; \quad U_L^\pm = f; \quad U(\infty) \sim 0 (\ln |z|), \quad (2)$$

де індекси плюс та мінус вказують на належність відповідно до лівого чи правого околу точки $t \in L$ при вибраному напрямі на L від $-a$ до a .

Для випадку, коли права частина (1) задається лише з точністю до сталої, ці задачі розглядалися Н. І. Мусхелішвілі [3].

Описане в нашій статті дослідження проводилося методом з роботи [4], відмінним від методу з роботи [3], як при задаванні (1) з точністю до сталої, так і при цілком визначеній правій частині (1), тобто при $\alpha_0 = 0$. Таке розв'язання, на нашу думку, є більш точним порівняно з розв'язанням, виконаним І. Я. Штаерманом (див. [5]), яке не може бути визнане задовільним з математичної точки зору¹.

Переходимо до розв'язання рівняння (1). Згідно із способом, описаним в [4], зробимо заміну

$$\mu(t) = -\bar{\mu}(t) + \alpha_1 \sigma(t). \quad (3)$$

Функція $\bar{\mu}$ така, що $\bar{M}(\pm a) = 0$, де $\bar{M}(t) = \int_{-a}^t \bar{\mu}(t) dt$, $\sigma(t)$ — довільно вибрана функція, але така, що $e = \int_{-a}^a \sigma(t) dt \neq 0$.

Очевидно, що $P \equiv \int_{-a}^a \mu(t) dt = \alpha_1 e \neq 0$, якщо $\alpha_1 \neq 0$, α_1 — якась поки що невизначена стала. Інтегруючи по частинах ліву частину (1), приходимо до сингулярного інтегрального рівняння, еквівалентного рівнянню (1)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\bar{M} dt}{t-x} = f(x) - \frac{\alpha_1}{\pi} \int_{-a}^a \sigma(t) \ln |t-x| dt - \alpha_0. \quad (4)$$

¹ Так, в [5, гл. I] будується гармонічна всередині одиничного кола функція по граничній умові і умові перетворювання в нуль цієї функції в центрі кола, що взагалі неможливо. На цьому базується розв'язання рівняння (1). Крім того, формули (115) і (116) [5, гл. I] втрачають смисл при $a=2$.

При умові

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \left[\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\pi} \int_{-a}^a \sigma(t_1) \ln |t_1 - t| dt_1 \right] \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} \quad (5)$$

рівняння (4) має розв'язок

$$\begin{aligned} \overline{M}(x) = & -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t - x)} + \\ & + \frac{\alpha_1 \sqrt{a^2 - x^2}}{\pi} \int_{-a}^a \sigma(t_1) dt_1 \int_{-a}^a \frac{\ln |t_1 - t| dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t - x)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Із рівності (5) при врахуванні $P = \alpha_1 e$, випливає

$$\pi \alpha_0 - P \ln \frac{2}{a} = \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}}, \quad (7)$$

оскільки коефіцієнт при α_1 в рівності (5) є інтеграл, який дорівнює сталій $-\frac{e}{\pi} \ln \frac{2}{a}$. Таким чином, лише при $a=2$ не можна брати $\alpha_0=0$ при довільному задаванні f , оскільки тоді рівняння (1) буде нерозв'язним

для f таких, що $\int_{-2}^2 \frac{f(t) dt}{\sqrt{4 - t^2}} \neq 0$. Це, очевидно, пов'язано з тим, що однорідне рівняння (1) при $a=2$ має нетривіальне розв'язання $\mu = \frac{\text{const}}{\sqrt{4 - t^2}}$.

Якщо ж $a \neq 2$, то, задаючи певним чином одну із сталих α_0 , P , ми визначимо другу із рівності (7). Якщо покласти $\alpha_0=0$, то розв'язання рівняння (1) при цілком визначеній правій частині f одержимо за формулою (3), де $\alpha_1 = \frac{P}{e} = -\frac{1}{e \ln \frac{2}{a}} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}}$.

Крім того, якщо задати значення P , то за формулою (3) одержимо розв'язок рівняння (1) при будь-яких значеннях a , причому в цьому випадку стала буде цілком визначена рівністю (7). В контактних задачах звичайно задаємо P (стискаюча сила) і шукаємо розв'язок, що задовольняє рівняння (1) лише з точністю до сталої.

Перетворимо тепер розв'язок (6). Покажемо спочатку, що

$$\begin{aligned} I(t_1, x) &= \int_{-a}^a \frac{\ln |t_1 - t| dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t - x)} = \pi \frac{\arccos \frac{x}{a} - \pi \eta(t_1 - x)}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \\ \eta(t_1 - x) &= \begin{cases} 0, & x > t_1, \\ 1, & x < t_1. \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Зробимо заміну $t_1 = av_1$, $t = av$, $x = aw$, тоді $I = \frac{1}{a} \int_{-1}^1 \frac{\ln |v_1 - v| dv}{\sqrt{1 - v^2} (v - w)}$.

Розглянемо задачу Шварца для функції $\ln(z - \xi_0) + i\alpha$, де $\xi_0 = e^{i\theta_0}$, α — довільна стала [1].

Ця функція є аналітичною всередині одиничного кола, якщо розріз від точки ξ_0 до ∞ буде проходити ззовні кола. Позначимо $\gamma(\Theta, \Theta_0) = \arg \ln(\xi_1 - \xi_0)$, $\xi_1 = e^{i\Theta_1}$ і, беручи до уваги, що $\gamma(\Theta_1, \Theta_0) = \frac{1}{2}(\Theta_0 + \Theta_1 + \pi)$ при $\Theta_0 > \Theta_1$ і $\gamma(\Theta_1, \Theta_0) = \frac{1}{2}(\Theta_0 + \Theta_1 + 3\pi)$ при $\Theta_0 < \Theta_1$, а також зробивши заміну $v = \cos \Theta$, $v_1 = \cos \Theta_1$, $w = \cos \Theta_0$, дістаємо

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a \sin \Theta_0} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln 2 \left| \sin \frac{\Theta - \Theta_1}{2} \right| \operatorname{ctg} \frac{\Theta + \Theta_0}{2} d\Theta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln 2 \left| \sin \frac{\Theta - \Theta_1}{2} \right| \operatorname{ctg} \frac{\Theta - \Theta_0}{2} d\Theta \right] = \\ &= \frac{\pi}{a \sin \Theta_0} \begin{cases} \Theta_0 - \pi, & \Theta_0 > \Theta_1 & (x < t_1); \\ \Theta_0, & \Theta_0 < \Theta_1 & (x > t_1). \end{cases} \end{aligned}$$

Замінюючи $\Theta_0 = \arccos \frac{x}{a}$, одержуємо формулу (8). Після підстановки її в рівність (6) дістанемо вираз

$$\bar{M}(x) = \frac{\alpha_1}{\pi} \left[e \arccos \frac{x}{a} - e(x) \right] - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t - x)}, \quad (9)$$

де $e(x) = \pi \int_x^a \sigma(t) dt$.

Вибираючи різні функції $\sigma(t)$, знаходимо різні форми розв'язку $\bar{M}$. Приймаючи, наприклад, що $\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}}$, маємо $e = \pi$ і

$$\bar{M}(x) = - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t - x)}, \quad (10)$$

звідки дістанемо такий розв'язок рівняння (1):

$$\mu(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t - x)} \right] + \frac{\pi}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (11)$$

При використанні формули інтегрування по частинах і формули

$$\sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^t \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t - x)} = - \ln \left| \frac{a - xt + \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{a^2 - t^2}}{a(t - x)} \right|$$

можемо також дістати

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left[P + \int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{t - x} dt \right]. \quad (12)$$

Ця формула співпадає (при заміні f на $-\frac{1}{\pi}f$) з розв'язком, даним І. Я. Штаєрманом для рівняння $\int_{-a}^a \mu \ln \frac{1}{|t-x|} dt = f$, якщо вважати, що $a \neq 2$, і покласти $\alpha_0 = 0$. Як було відзначено раніше, величина $P = \alpha_1 \pi$ при цьому вона не може бути заданою, а повинна визначатися рівністю (7).

Перейдемо тепер до розгляду задачі Діріхле (2). Запишемо функцію U у вигляді логарифмічного потенціалу $v = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \mu(t) \ln |t-z| dt$, який веде себе на безмежності, як $\frac{1}{\pi} P \ln |z|$.

На основі попереднього можемо висловити такі твердження. Дати розв'язок задачі Діріхле (2) лише у вигляді логарифмічного потенціалу можна завжди, крім випадку $a=2$. Стала P при цьому не може бути заданою заздалегідь, а визначається з рівності (7) при $\alpha_0=0$. Це означає, що будь-яка гармонічна на площині з розрізом L функція з логарифмічним зростанням на безмежності може бути зображена логарифмічним потенціалом, якщо $a \neq 2$ і $U_L^+ = U_L^-$.

Якщо задана поведінка U на безмежності, тобто задане значення P або задана умова обмеженості функції U на безмежності ($P=0$), то розв'язок U завжди може бути зображений у вигляді суми $U = v + \alpha_0$. Інакше кажучи, при заданій поведінці на безмежності будь-яка гармонічна на площині з розрізом L функція може бути зображена у вигляді суми логарифмічного потенціалу і деякої цілком визначеної сталої α_0 , що описується рівністю (7).

ЛІТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1964, 2-е изд.
2. Дмитриев В. И., Захаров В. Е. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма первого рода. В сб.: «Вычислительные методы и программирование», в. 10. Изд-во Московского ун-та, М., 1968.
3. Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, 1937, М., 2-е изд.
4. Старокадомський Л. О. Потенціал простого шару та інтегральні рівняння першого роду з логарифмічною особливістю. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-матем., вип. 3. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1967.
5. Штаєрман И. Я. Контактные задачи теории упругости. М.—Л., 1949.
6. Чумаков Ф. В. Интегральные уравнения с логарифмическим ядром. «Дифференциальные уравнения», 1968, т. 4, № 2.

УДК 517.9:536.2

Б. М. КОРДУБА

ОДНА МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ ПРЯМИХ

Метод прямих [1—2], [4—5] успішно використовується для розв'язку першої крайової задачі (задачі Діріхле) для рівнянь Лапласа і Пуассона у випадку прямокутних областей або областей, границя яких складається з двох паралельних прямих. Якщо розглядувана область не є такою, то доводиться мати справу зі знесенням граничних умов, що різко знижує точність розв'язування задачі.

Ця стаття присвячена розгляду однієї модифікації методу прямих, яка для деякої області, відмінної від прямокутника або криволінійної

трапеції з двома паралельними основами, дає можливість розв'язати задачу Діріхле для рівняння Пуассона без знесення граничних умов.

Розглянемо область D , границя Γ якої складається з двох прямолінійних відрізків AB і CD і довільних гладких ліній AC і BD (рис. 1). Для спрощення будемо вважати, що AB і CD перетинаються в початку координат. Нехай φ_0 і α — кути, утворювані прямими AB і CD з додатним напрямом осі Ox відповідно.

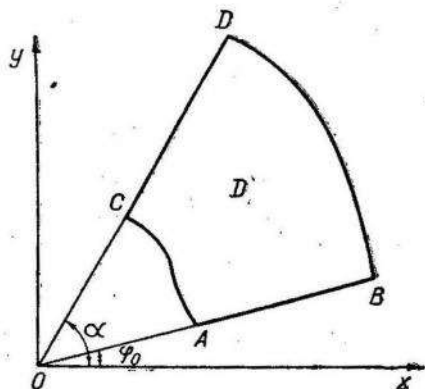


Рис. 1.

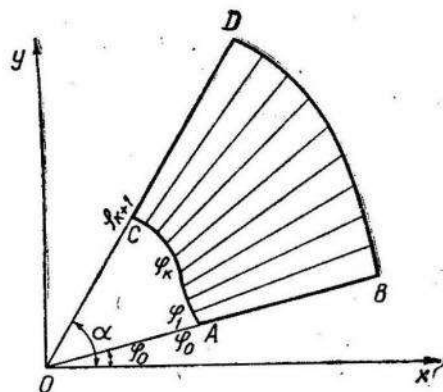


Рис. 2.

Необхідно знайти функцію $U(x, y)$, що задовольняє в області D рівнянню Пуассона

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (1)$$

а на границі Γ — заданій граничній умові

$$U|_{\Gamma} = U_{\Gamma}(x, y). \quad (2)$$

Для розв'язку задачі перейдемо до змінних σ і φ , які назвемо логарифмополярними координатами, що зв'язані з декартовими координатами формулами

$$x = e^{\sigma} \cos \varphi, \quad y = e^{\sigma} \sin \varphi. \quad (3)$$

Звідси

$$\sigma = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}. \quad (4)$$

Рівняння (1) в нових координатах буде таким:

$$\frac{\partial^2 U(\sigma, \varphi)}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 U(\sigma, \varphi)}{\partial \varphi^2} = q(\sigma, \varphi), \quad (5)$$

де

$$q(\sigma, \varphi) = e^{2\sigma} f(e^{\sigma} \cos \varphi, e^{\sigma} \sin \varphi).$$

Граничну умову (2) перепишемо у вигляді

$$U|_{\Gamma} = U_{\Gamma}(\sigma, \varphi). \quad (6)$$

Для розв'язку задачі (5) — (6) замінимо рівняння (5) наближеною системою звичайних диференціальних рівнянь для функцій

$$U_k(\sigma) = U(\sigma, \varphi_k). \quad (7)$$

При цьому розіб'ємо кут $\alpha - \varphi_0$ на n рівних частин (рис. 2) і виберемо $h = \Delta\varphi = \frac{\alpha - \varphi_0}{n+1}$. Тоді $\varphi_k = \varphi_0 + k\Delta\varphi$ ($k=1, 2, \dots, n$) і $\alpha = \varphi_0 + (n+1)\Delta\varphi$. Таким чином, рівняння (5) на кожній прямій φ_k набирає вигляду

$$\left. \frac{\partial^2 U(\sigma, \varphi)}{\partial \sigma^2} \right|_{\varphi=\varphi_k} + \left. \frac{\partial^2 U(\sigma, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_k} = q(\sigma, \varphi)|_{\varphi=\varphi_k} \quad (8)$$

($k=1, 2, \dots, n$).

Заміняючи $\frac{\partial^2 U(\sigma, \varphi)}{\partial \varphi^2}$ через центральні різниці

$$\left. \frac{\partial^2 U(\sigma, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_k} \approx \frac{1}{(\Delta\varphi)^2} [U_{k+1}(\sigma) - 2U_k(\sigma) + U_{k-1}(\sigma)] \quad (9)$$

рівняння (5) замінимо системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2 U_k(\sigma)}{d\sigma^2} + \frac{1}{(\Delta\varphi)^2} [U_{k+1}(\sigma) - 2U_k(\sigma) + U_{k-1}(\sigma)] = q_k(\sigma) \quad (10)$$

($k=1, 2, \dots, n$),

де

$$q_k(\sigma) = q(\sigma, \varphi_k).$$

При приєднанні до (10) граничних функцій, одержаних із (6),

$$U_0(\sigma) = U_\gamma(\sigma, \varphi_0), \quad U_{n+1}(\sigma) = U_\gamma(\sigma, \varphi_{n+1}) \quad (11)$$

матимемо систему звичайних диференціальних рівнянь, що апроксимує задачу (5) — (6) з точністю $O(h^2)$. Розкладаючи в інтервалі $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_{n+1}$ функції $U(\sigma, \varphi)$ та U''_φ в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi_k$ і зберігаючи члени до шостого порядку включно, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} & \frac{5}{6} \frac{d^2 U_k(\sigma)}{d\sigma^2} + \frac{1}{12} \left[\frac{d^2 U_{k+1}(\sigma)}{d\sigma^2} + \frac{d^2 U_{k-1}(\sigma)}{d\sigma^2} \right] + \\ & + \frac{1}{(\Delta\varphi)^2} [U_{k+1}(\sigma) - 2U_k(\sigma) + U_{k-1}(\sigma)] = \frac{5}{6} q_k(\sigma) + \\ & + \frac{1}{12} [q_{k+1}(\sigma) + q_{k-1}(\sigma)], \quad (k=1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (10')$$

яка з приєднаними граничними функціями (7) апроксимує задачу (5) — (6) з точністю до $O(h^4)$. Систему (10) — (11) можна подати у векторній формі

$$\frac{d^2}{d\sigma^2} \vec{U}(\sigma) - \frac{1}{(\Delta\varphi)^2} G_n \vec{U}(\sigma) = \vec{q}(\sigma) + \vec{w}(\sigma). \quad (12)$$

Аналогічно (10) — (11) запишемо у вигляді

$$A_n \frac{d}{d\sigma^2} \vec{U}(\sigma) - \frac{1}{(\Delta\varphi)^2} G_n \vec{U}(\sigma) = A_n \vec{q}(\sigma) + \vec{w}(\sigma). \quad (12')$$

Тут

$$\vec{U}(\sigma) = \begin{pmatrix} U_1(\sigma) \\ U_2(\sigma) \\ \vdots \\ U_n(\sigma) \end{pmatrix}; \quad \vec{q}(\sigma) = \begin{pmatrix} q_1(\sigma) \\ q_2(\sigma) \\ \vdots \\ q_n(\sigma) \end{pmatrix}; \quad \vec{w}(\sigma) = -\frac{1}{(\Delta\varphi)^2} \begin{pmatrix} U_0(\sigma) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_{n+1}(\sigma) \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (n-2) \\ \end{matrix};$$

$$G_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}; \quad A_n = \begin{vmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{5}{6} \end{vmatrix}.$$

При застосуванні до рівнянь (12) і (12') P -трансформації [3], тобто при помноженні їх на P_n зліва, приведемо обидві системи в «розпадні», тобто до виду, коли кожне рівняння буде містити лише одну невідому функцію і інтегруватиметься незалежно від інших рівнянь одержаних систем.

$$\frac{d^2}{d\sigma^2} \vec{V}(\sigma) - \frac{1}{(\Delta\varphi)^2} \Lambda_n \vec{V}(\sigma) = \vec{Q}(\sigma) + \vec{\Omega}(\sigma); \quad (13)$$

$$\left[E_n - \frac{1}{12} \Lambda_n \right] \frac{d^2}{d\sigma^2} \vec{V}(\sigma) - \frac{1}{(\Delta\varphi)^2} \Lambda_n \vec{V}(\sigma) = \left[E_n - \frac{1}{12} \Lambda_n \right] \vec{Q}(\sigma) + \vec{\Omega}(\sigma); \quad (13')$$

де

$$\vec{V}(\sigma) = P_n \vec{U}(\sigma); \quad \vec{Q}(\sigma) = P_n \vec{q}(\sigma); \quad \vec{\Omega}(\sigma) = P_n \vec{\omega}(\sigma), \quad (14)$$

P_n — фундаментальна матриця матриці G_n з елементами

$$P_{ij} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{ij\pi}{n+1};$$

Λ_n — діагональна матриця, елементи якої — власні значення матриці G_n

$$\lambda_s = 4 \sin^2 \frac{s\pi}{2(n+1)} \quad (s=1, 2, \dots, n). \quad (15)$$

Рівняння (13) в розгорнутій формі має вигляд

$$\frac{d^2 V_s(\sigma)}{d\sigma^2} - \frac{\lambda_s}{(\Delta\varphi)^2} V_s(\sigma) = Q_s(\sigma) + \Omega_s(\sigma), \quad (16)$$

де

$$Q_s(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{k=1}^n \sin \frac{sk\pi}{n+1} q_k(\sigma), \quad (17)$$

$$\Omega_s(\sigma) = -\frac{1}{(\Delta\varphi)^2} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left[U_0(\sigma) \sin \frac{s\pi}{n+1} + U_{n+1}(\sigma) \sin \frac{sn\pi}{n+1} \right] \quad (18)$$

($s=1, 2, \dots, n$).

Позначимо

$$\frac{\lambda_s}{(\Delta\varphi)^2} = \mu_s^2. \quad (19)$$

У зв'язку з тим, що

$$\mu_s = \frac{2}{\Delta\varphi} \sin \frac{s\pi}{2(n+1)} > 0, \quad (20)$$

розв'язок відповідного однорідного рівняння (16) має вигляд

$$V_s^{(0)}(\sigma) = C_1^{(s)} e^{\mu_s \sigma} + C_2 e^{-\mu_s \sigma}. \quad (21)$$

Розв'язок неоднорідного рівняння (16) залежить від правих частин $Q_s(\sigma)$ і $\Omega_s(\sigma)$ і в кожному конкретному випадку може бути знайдений, наприклад, методом варіації довільної сталої.

Рівняння (13') в розгорнутій формі запишемо як

$$\frac{d^2 V_s(\sigma)}{d\sigma^2} - \frac{12\lambda_s}{(\Delta\varphi)^2 (12 - \lambda_s)} V_s(\sigma) = Q_s(\sigma) + \frac{12}{12 - \lambda_s} \Omega_s(\sigma). \quad (16')$$

Розв'язок відповідного однорідного рівняння дамо у вигляді (21), де

$$\mu_s = \frac{2\sqrt{3}}{\Delta\varphi} \frac{\sin \frac{s\pi}{2(n+1)}}{\sqrt{3 - \sin^2 \frac{s\pi}{2(n+1)}}} > 0. \quad (20)$$

Для знаходження функції $\vec{U}(\sigma)$ необхідно ще раз застосувати P -трансформацію. Тоді

$$\vec{U}(\sigma) = P_n \vec{V}(\sigma) \quad (22)$$

або в розгорнутій формі

$$U_k(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{s=1}^n \sin \frac{ks\pi}{n+1} V_s(\sigma). \quad (23)$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Б. М. Будаков, Ф. П. Васильев. Сходимость и оценка погрешности метода прямых для решения некоторых задач фильтрации. В сб. «Численные методы в газовой динамике», 1963, 211—237.
2. В. И. Ледедев. Уравнения и сходимость дифференциально-разностного метода. Вестник Московского ун-та, вып. 7, № 10, М., 1955.
3. Г. Н. Положий. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Изд-во Киевского ун-та, Киев, 1962.
4. М. Г. Слободянский. Способ интегрирования уравнения с частными производными и его применение к задачам теории упругости. «Прикладная математика и механика», 1939, 3, вып. 1.
5. В. Н. Фаддеева. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 28, 1949.

УДК 517—512

О. С. КОВАНЬКО

ПРО НАБЛИЖЕННЯ S_p МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ПОЛІНОМАМИ БОХНЕРА—ФЕЙЄРА

Дана стаття присвячена розв'язанню питання про можливість наближення S_p майже періодичних функцій поліномами Бохнера—Фейєра у відповідній метриці.

Нагадаємо деякі символи і відомі положення теорії S_p — майже періодичних функцій.

Розглянемо метрику: нехай $\varphi(x) \in L_p$ і $\psi(x) \in L_p$, $(-\infty < x < +\infty)$.
Тоді

$$D_{s_p}(\varphi, \psi) = \sup \left\{ \int_x^{x+1} |\varphi(t) - \psi(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (1)$$

Далі введемо «опосередковану функцію Стеклова» для функції (1)

$$f_d(x) = \frac{1}{d} \int_x^{x+d} f(t) dt. \quad (2)$$

Означення. Функція $f(x)$, $(-\infty < x < +\infty)$ називається майже періодичною за Степановим (S_p — майже періодичною), якщо, яке б мале не було $\varepsilon > 0$, існує відносно густа множина чисел: $\tau = \tau(\varepsilon)$ (майже періоди), для яких мають місце нерівності

$$D_{s_p}\{f(x+\tau), f(x)\} < \varepsilon. \quad (3)$$

Лема 1. Якщо $f(x)$ є майже періодична функція ($S_{pM, n}$), то опосередкована функція є майже періодичною функцією Бора, тобто, яке б мале не було $\varepsilon > 0$, існує відносно густа множина майже періодів $\tau = \tau(\varepsilon)$ таких, що

$$\sup_{(x)} |f_d(x+\tau) - f_d(x)| < \varepsilon, \quad (4)$$

$$\lim_{d \rightarrow 0} D_{s_p}(f(x), f_d(x)) = 0. \quad (5)$$

Лема 2. Якщо $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ спектр майже періодичної функції $f(x)$, а $A_1, A_2, A_3, \dots$ відповідні коефіцієнти Фур'є, то $f_d(x)$ має той же спектр: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, а коефіцієнти Фур'є будуть такі:

$$B_k = A_k \cdot \frac{e^{i\lambda_k d} - 1}{i\lambda_k d}.$$

Очевидно, що

$$\lim_{d \rightarrow 0} B_k = A_k. \quad (6)$$

Оскільки $f_d(x)$ — майже періодична функція Бора, то можна побудувати рівномірну збіжну послідовність поліномів Бохнера—Фейєра $\sigma_n^d(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$), границя якої буде $f_d(x)$.

Загальний вигляд поліномів такий:

$$\sigma_r^d(x) = \sum_{k=1}^{N(n)} r_k^{(n)} \cdot B_k e^{i\lambda_k x}.$$

При цьому $\lim_{n \rightarrow \infty} N(n) = \infty$ і $0 < r_k^{(n)} < 1$; $r_k^{(n)}$ залежить лише від спектра $f_d(x)$.

Побудуємо тепер (чисто формально) поліном Бохнера—Фейєра для функції $f(x)$. Очевидно, що він запишеться у вигляді

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{N(n)} r_k^{(n)} A_k e^{i\lambda_k x},$$

оскільки множник $r_k^{(n)}$ однаковий у $f(x)$ і $f_d(x)$.

Із співвідношення (6) очевидно випливає, що

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sigma_r^d(x) = \sigma_n(x). \quad (7)$$

Вернемося до послідовності $\{\sigma_n^d(x)\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$). Ця послідовність збігається рівномірно до $f_d(x)$. Тому при $\varepsilon > 0$ ми тим більше одержимо нерівність

$$D_{s_p}(f_d, \sigma_n^d) \leq \sup_{(x)} |f_d - \sigma_n^d| < \frac{\varepsilon}{3},$$

коли $n > n_0$, де $n_0 > 0$ достатньо велике.

Отже, маємо

$$D_{s_p}(f_d, \sigma_n^d) < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (8)$$

Із рівності (5) випливає, що існує таке $d_0 > 0$, що

$$D_{s_p}(f_d, \sigma_n^d) < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (9)$$

коли $d < d_0$.

Тепер із співвідношень (8) і (9) випливає, що

$$D_{s_p}(f, \sigma_n^d) \leq D_{s_p}(f, f_d) + D_{s_p}(f_d, \sigma_n^d) < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

коли $n > n_0$, $d < d_0$.

Отже

$$D_{s_p}(f, \sigma_n^d) < \frac{2\varepsilon}{3}. \quad (10)$$

Зафіксуємо тепер число n , тоді на основі (7) дістанемо

$$D_{s_p}(\sigma_n^d, \sigma_n) < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (11)$$

коли $d < d_0$.

Тепер із співвідношень (10) і (11) знаходимо

$$D_{s_p}(f, \sigma_n) \leq D_{s_p}(f, \sigma_n^d) + D_{s_p}(\sigma_n^d, \sigma_n) < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Отже

$$D_{s_p}(f, \sigma_n) < \varepsilon. \quad (12)$$

Надамо тепер ε безмежну послідовність значень: $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 \dots$ і виберемо відповідну послідовність значень $n(n_1, n_2, n_3, \dots)$ так, що будуть виконуватися нерівності

$$D_{s_p}(f, \sigma_{n_j}) < \varepsilon_j. \quad (13)$$

Отже, послідовність поліномів Бохнера—Фейєра

$$\sigma_{n_j}(x) = \sum_I^{N(n_j)} r_k^{(n_j)} \cdot A_k e^{i\lambda_k x} \quad (j=1, 2, 3, \dots)$$

збігається в метриці S_p до $f(x)$.

Г. Г. ЦЕГЕЛИК

ДО ЛОКАЛІЗАЦІЇ НУЛІВ РЯДІВ ЛОРАНА
ЗА ДОПОМОГОЮ ПАРАМЕТРІВ

Розглянемо новий метод локалізації нулів рядів Лорана за допомогою параметрів.

Запишемо ряд Лорана (зокрема, степеневий ряд або многочлен), який збігається в кільці $r < |z| < R$,

$$f(z) = \sum_{v=-m}^n A_v z^{\lambda_v} \quad (m \leq \infty, n \leq \infty), \quad (1)$$

де $A_i \neq 0$ ($-m \leq i \leq n$); λ_v — монотонно зростаюча послідовність цілих чисел.

Нехай $\delta_k = \lambda_k - \lambda_{k-1}$ ($-m+1 \leq k \leq n$) і $\{\alpha_v\}$ ($-m \leq v \leq n$) — довільна послідовність додатних чисел (параметрів), яка задовольняє умові

$$\sum_{\substack{v=-m \\ v+k}}^n \alpha_v = \alpha_k \quad (-m < k < n). \quad (2)$$

Покладемо

$$t_k = \sup_{1 \leq v \leq k+m} \left(\frac{\alpha_{k-v+1} \alpha_{k-v}}{\alpha_{k-v} \alpha_{k-v+1}} \right)^{\frac{1}{\delta_{k-v+1}}}, \quad (3)$$

$$T_k = \inf_{1 \leq \mu \leq n-k} \left(\frac{\alpha_{k+\mu} \alpha_{k+\mu-1}}{\alpha_{k+\mu-1} \alpha_{k+\mu}} \right)^{\frac{1}{\delta_{k+\mu}}}, \quad (4)$$

де $a_i = |A_i|$ ($-m \leq i \leq n$).

Теорема 1. Якщо існує такий набір параметрів $\{\alpha_v\}$, який задовольняє умові (2) і $T_k > t_k$, то ряд Лорана (1) не перетворюється в нуль в кільці

$$t_k \leq |z| \leq T_k.$$

Доведення. З (3) і (4) випливає, що

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_k^{\delta_{k-v+1}}} &\leq \frac{\alpha_{k-v} \alpha_{k-v+1}}{\alpha_{k-v+1} \alpha_{k-v}} \quad (v=1, 2, \dots, k+m); \\ T_k^{\delta_{k+\mu}} &\leq \frac{\alpha_{k+\mu} \alpha_{k+\mu-1}}{\alpha_{k+\mu-1} \alpha_{k+\mu}} \quad (\mu=1, 2, \dots, n-k). \end{aligned}$$

З останніх нерівностей одержуємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_k^{\lambda_k - \lambda_{k-v}}} &\leq \frac{\alpha_{k-v} a_k}{a_k \alpha_{k-v}} \quad (v=1, 2, \dots, k+m); \\ T_k^{\lambda_{k+\mu} - \lambda_k} &\leq \frac{\alpha_{k+\mu} a_k}{a_k \alpha_{k+\mu}} \quad (\mu=1, 2, \dots, n-k); \end{aligned}$$

$$\sum_{v=1}^{k+m} a_{k-v} t_k^{\lambda_{k-v} - \lambda_k} \leq \frac{a_k}{\alpha_k} \sum_{v=1}^{k+m} \alpha_{k-v};$$

$$\sum_{\mu=1}^{n-k} a_{k+\mu} T_k^{\lambda_{k+\mu} - \lambda_k} \leq \frac{a_k}{\alpha_k} \sum_{\mu=1}^{n-k} \alpha_{k+\mu}.$$

Враховуючи умову (2), дістанемо

$$\sum_{\nu=1}^{k+m} a_{k-\nu} t_k^{\lambda_{k-\nu}-\lambda_k} + \sum_{\mu=1}^{n-k} a_{k+\mu} T_k^{\lambda_{k+\mu}-\lambda_k} \leq a_k.$$

Легко бачити, що для будь-якого q ($t_k \leq q \leq T_k$) при $T_k > t_k$ має місце нерівність

$$\sum_{\nu=1}^{k+m} a_{k-\nu} \rho^{\lambda_{k-\nu}-\lambda_k} + \sum_{\mu=1}^{n-k} a_{k+\mu} \rho^{\lambda_{k+\mu}-\lambda_k} < a_k.$$

З останньої нерівності при використанні принципу аргументу випливає справедливність теореми 1.

Теорема 2. Якщо ряд Лорана (1) не перетворюється в нуль в кільцях $t_{k_1} \leq |z| \leq T_{k_1}$, $t_{k_2} \leq |z| \leq T_{k_2}$, $k_2 > k_1$, то він має точно $h = \lambda_{k_2} - \lambda_{k_1}$ нулів в кільці $T_{k_1} < |z| < t_{k_2}$.

Доведення теореми 2 випливає з принципу аргументу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Цегелик Г. Г. Параметрическая локализация по модулям нулей полиномов и рядов Лорана. «Известия вузов. Математика», 1967, № 12.

УДК 517.512

У. А. МИШКОВЕЦЬ

СУМУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ РЯДІВ ФУР'Є МЕТОДОМ ПУАССОНА—АБЕЛЯ

Відомий метод Бохнера [1] сумування рядів Фур'є рівномірних майже періодичних (м.п.) функцій зовнішньо нагадує класичний метод Фейєра сумування рядів Фур'є періодичних функцій. Показники многочлена Бохнера беруться з показників Фур'є рівномірної м.п. функції, а коефіцієнтами служать коефіцієнти Фур'є, помножені на деякі числа $\rho_k^{(m)}$ ($0 < \rho_k^{(m)} < 1$). На відміну від методу Фейєра метод Бохнера—Фейєра практично незручний. Попередньо вибираються базисні показники Фур'є. Представлення показників Фур'є через лінійну комбінацію базисних і визначення множників збіжності $\rho_k^{(m)}$ — досить громіздка робота.

Наведений Фавардом [1] метод сумування рядів Фур'є рівномірних м.п. функцій нагадує комбінацію методу Бохнера—Фейєра з методом Пуассона—Абеля. Показники Фур'є вибираються аналогічно, а множники збіжності виражаються через добуток множників виду $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^{r_k}$, де $m > 1$, r_k — цілі додатні числа.

Нижче буде доведено (теорема 4), що класичним методом Пуассона—Абеля сумуються ряди Фур'є рівномірних м.п. функцій. З нашого доведення також випливає, що сумування цим методом рядів Фур'є неперервних періодичних функцій є окремий випадок.

Сформулюємо три теореми, на яких ґрунтується доведення теореми 4. Ці теореми доведені в нашій роботі [2].

Теорема 1. Для майже періодичної функції Бора $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}$ справедлива нерівність $\sup_x |f(x)| < C_f \max |A_n|$, де $C_f > 3$ деяке число. Правило визначення числа C_f наводиться.

Теорема 2. Для компактної (в смислі рівномірної збіжності) множини майже періодичних функцій Бора $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) справедлива нерівність $3 < C_{f_n} < C$, де C — абсолютна стала.

Теорема 3. Умова $C_{r_n} < C$, де C — абсолютна стала, $r_n(x) = f(x) - S_n(x)$, $S_n(x)$ — відрізок ряду Фур'є, є необхідна і достатня для рівномірної збіжності ряду Фур'є майже періодичної функції Бора $f(x)$.

Теорема 4. Якщо $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}$ є майже періодична функція Бора, то

$$\limsup_{\rho \rightarrow 1} \sup_x |f(x) - f(\rho, x)| = 0, \quad (1)$$

де $f(\rho, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n A_n e^{i\lambda_n x}$; $0 < \rho < 1$.

Доведення. Ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n A_n e^{i\lambda_n x}$ збігаються рівномірно. Оскільки

$|A_n| < K$, то геометрична прогресія $K \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$ є мажорантою. Тому функції

$f(\rho, x)$ є майже періодичні функції Бора.

З теореми 1 випливає, що

$$\sup_x |f(x) - f(\rho, x)| < C_{f(\rho)} \max_n |A_n(1 - \rho^n)|. \quad (2)$$

Позначимо через $S_n(\rho, x) = \sum_{n=1}^n \rho^n A_n e^{i\lambda_n x}$ відрізки рядів Фур'є функцій $f(\rho, x)$.

Напишемо для функцій $r_n(\rho, x) = f(\rho, x) - S_n(\rho, x)$ нерівність, аналогічну нерівності (2),

$$\sup_x |r_n(\rho, x)| < C_{r_n(\rho)} \max_k |A_{n+k} \rho^{n+k}|. \quad (3)$$

За теоремою 3 умова $C_{r_n(\rho)} < C_1$, де C_1 — абсолютна стала, є необхідна і достатня для рівномірної збіжності рядів Фур'є майже періодичних функцій Бора $f(\rho, x)$. Оскільки їх ряди Фур'є $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n A_n e^{i\lambda_n x}$ є рівномірно збіжні, то

$$C_{r_n(\rho)} < C_1; \quad 0 < \rho < 1. \quad (4)$$

З нерівностей (3) і (4) одержуємо

$$\sup_x |r_n(\rho, x)| < C_1 \max_k |A_{n+k} \rho^{n+k}|. \quad (5)$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$, то з нерівності (5) випливає, що функції $r_n(\rho, x)$ рівномірно по x ($-\infty < x < \infty$) для фіксованого ρ ($0 < \rho < 1$) прямують до нуля при $n \rightarrow \infty$. Це означає, що множина майже періодичних функцій $r_n(\rho, x)$ компактна (в смислі рівномірної збіжності). З компактності функцій $r_n(\rho, x)$ випливає компактність функцій $f(\rho, x)$ ($0 < \rho < 1$). На основі теореми 2 стверджуємо, що

$$C_{f(\rho)} < C, \quad (6)$$

де C — абсолютна стала.

Оскільки $\lim_{\rho \rightarrow 1} \rho^n A_n = A_n$, то з теореми єдності і конструкції величин $C_{f(\rho)}$ випливає, що

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} C_{f(\rho)} = C_{f(1)} = C_f. \quad (7)$$

З нерівності (6) і граничної рівності (7) одержуємо, що для всіх q ($0 < q \leq 1$) справедлива нерівність

$$C_{f(q)} < C, \quad (8)$$

де C — абсолютна стала.

З нерівностей (2) і (8) дістаємо

$$\sup_x |f(x) - f(q, x)| < C \max_n |A_n(1 - q^n)|. \quad (9)$$

Звідси випливає гранична рівність (1). Теорема доведена.

Зауваження. В сумуванні рядів Фур'є методом Пуассона—Абеля доцільно розмістити коефіцієнти Фур'є в порядку спадання їх модулів. Зокрема, з нерівності

$$|f(x) - S_n(q, x)| \leq |f(x) - f(q, x)| + |f(q, x) - S_n(q, x)|$$

одержуємо

$$\sup_x |f(x) - S_n(q, x)| < \varepsilon$$

при $n > N_\varepsilon$ і $0 < 1 - q < \delta_\varepsilon$.

Результати теореми 4 переносяться на майже періодичні функції Левітана [3, 4]. Нерівність, аналогічна нерівності (9), запишеться так:

$$\sup_{|x| < L} |f(x) - f(q, x)| < C \max_n |A_n(1 - q^n)|,$$

де C — абсолютна стала, $L > 0$ — скінченне число. Звідси одержуємо, що

$$\lim_{q \rightarrow 1} \sup_{|x| < L} |f(x) - f(q, x)| = 0.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Favard J. Leçons sur les fonctions presque-périodiques, Paris, 1933, стор. 52—59.
2. Мишковець У. А. Про рівномірну збіжність рядів Фур'є майже періодичних функцій Бора. ДАН УРСР, № 12, 1968.
3. Левітан Б. М. Новое обобщение почти периодических функций Бора. Записки науч.-исслед. ин-та матем. и мех. и Харьк. матем. общества, т. 15, с. 4, вып. 2, 1938.
4. Марченко В. А. Методы суммирования обобщенных рядов Фурье. Записки науч.-исслед. ин-та матем. и мех. и Харьк. матем. общества, т. 20, с. 4, 1950.

УДК 513.491

Г. Л. БУЙМОЛА

ДО ПИТАННЯ ПРО ТОЧНІСТЬ ГРАФІЧНИХ ОПЕРАЦІЙ

Обмежену певним контуром частину евклідової площини з основними геометричними елементами в ній, де кожній точці A_i' множини E' евклідових точок ставиться у взаємно однозначну відповідність круг A_i сталого достатньо малого радіуса ω_0 з центром в цій точці, називаємо графічною площиною, а кожен такий круг зокрема — графічною точкою.

Крім графічних точок, в графічній площині розглядаються графічні лінії (пряма, коло) як геометричні місця графічних точок [1].

Ми припускаємо, що геометричні побудови в графічній площині проводяться за допомогою циркуля, односторонньої лінійки і точкографа.

Під точкографом розуміємо інструмент, за допомогою якого фіксуються (наносяться) графічні точки в графічній площині, — олівець, перо, вістря ніжки циркуля і т. п.

Точкографом ми можемо виконувати такі графічні операції:

1) Фіксування довільних графічних точок в графічній площині, символ $Op(c_0)$.

2) Встановлення точкографа в графічну точку графічної площини, задану за допомогою операції c_0 . Цю операцію ми будемо називати побудовою інцидентії двох точок — $Op(c_1)$.

3) Встановлення точкографа в довільну точку заданої графічної лінії або в точку, задану перетином двох графічних ліній (двох прямих, прямої та кола, двох кіл). Цю операцію будемо позначати також символом $Op(c_1)$ і називати інцидентіями графічної лінії і графічної точки або інцидентією точки двох графічних ліній.

Даними г. точками в г. площині ми називаємо г. точки, зафіксовані за допомогою точкографа¹.

Г. точки в г. площині можуть бути задані, крім безпосереднього фіксування (нанесення) точкографом $Op(c_0)$, ще перетином двох г. ліній. Але щоб вважати їх даними (побудованими, нанесеними) в г. площині, необхідно в останньому випадку їх зафіксувати точкографом.

Результатом будь-якої геометричної побудови в г. площині ми матимемо сукупність деяких г. точок $A(A')$, зафіксованих в г. площині точкографом з деякою помилкою.

Очевидно, помилки в положенні всіх або частини цих точок визначають точність даної г. побудови.

Помилки, що з'являються в побудові, завжди залежать від багатьох причин. Припускається, що всі ці причини незалежні одна від однієї і мають випадковий характер, тобто виникають незалежні випадкові помилки, що підлягають закону Гаусса, який, як відомо, описується формулою:

$$\Phi(\epsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \epsilon^2},$$

де $\Phi(\epsilon)$ — ймовірність помилки ϵ ; h — практична стала, тобто величина, що характеризує точність виміру або точність тієї чи іншої операції інструментом, тобто h — це міра точності інструмента. Цей закон спирається на припущення, що найімовірніше значення вимірюваної величини є середнє арифметичне результатів всіх вимірів і рівні помилки в ту чи іншу сторону рівноймовірні.

Якщо через m позначити середню арифметичну помилку, то, як встановлено,

$$h^2 = \frac{1}{2m^2} \quad \text{або} \quad m^2 = \frac{1}{2h^2}.$$

Спочатку розглянемо ті первинні помилки в побудові, які виникають внаслідок елементарних графічних операцій точкографом. Закон розподілу таких помилок вважаємо нормальним.

Нехай в г. площині точка $A(A')$ задана за допомогою точкографа ($Op(c_0)$). Нам треба побудувати інцидентію двох г. точок: заданої г. точки $A(A')$ і точки $A_1(A'_1)$, нанесеної точкографом ($Op(c_1)$).

Якщо при операції c_1 евклідові точки $A_1' \equiv A^1$, тобто тотожно співпадають, то г. точки A і A_1 абсолютно інцидентні. Якщо ж точка A_1'

¹ Тут і далі ми замість слів *графічна точка*, *графічна пряма* і т. ін. будемо писати скорочено: *г. точка*, *г. пряма* і т. п.

не зливається з точкою A' , то маємо деяку помилку побудовання цієї інциденції: $\varepsilon = A'A_1'$ (рис. 1, а). З однаковою ймовірністю можна зробити помилку ε у довільному напрямі. Інакше кажучи, коло, описане радіусом, рівним m , де m — середня арифметична помилка всіх вимірів, буде являти собою криву однакової ймовірності зробити помилку даної величини ε .

Площа, обмежена таким колом, буде являти собою «середню площу помилок», що виникають при побудові інциденції двох г. точок, тобто коло, що характеризує точність операції c_1 . Оскільки дві г. точки A і A_1 називають г. інцидентними за умовою, коли $A'A_1' \leq 2\omega_0$, то коло з центром в точці A' і радіусом, який дорівнює $3\omega_0$, назовемо «кривою помилок, що обмежує максимальну площу помилок». Ми її будемо називати максимальною первинною помилкою інциденції двох г. точок (рис. 1, б).

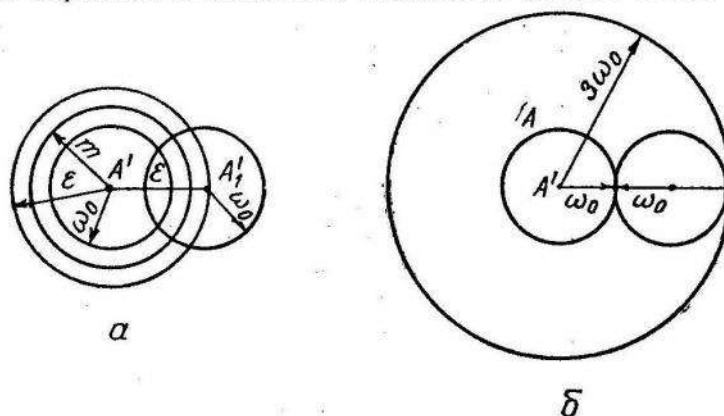


Рис. 1.

Якщо евклідову точку A' прийняти за початок прямокутних декартових координат, то г. точка може бути охарактеризована в евклідовій площині як частина площі, обмежена колом $x^2 + y^2 - \omega_0^2 = 0$. Крива помилок буде колом радіуса $3\omega_0$:

$$x^2 + y^2 - 9\omega_0^2 = 0.$$

Ймовірність зробити помилку певної заданої величини буде дорівнювати нулеві, оскільки помилка може приймати безмежну кількість значень. Тому здебільшого вказують імовірність того, що помилка x буде знаходитись в деяких межах a та b , тобто $a < x < b$. Цю ймовірність звичайно виражають інтегралом:

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2 x^2} dx.$$

Знайдемо тепер імовірність того, що помилка ε побудови інциденції двох г. точок не вийде за межі $\pm\omega_0$,

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\omega_0} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Зробимо підстановку $h\varepsilon = y$. Границі інтегрування будуть 0 і $h\omega_0$. Тоді

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\omega_0} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\omega_0} e^{-y^2} \frac{dy}{h} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\omega_0} e^{-y^2} dy.$$

При заміні $h\omega_0 = \alpha$ (1) дістанемо

$$\Theta(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-y^2} dy. \quad (2)$$

З формули (1) видно, що чим більше h , тим більше α при тому самому ω_0 , а значить, тим більше $\Theta(\alpha)$, тобто тим більша ймовірність того, що помилка не вийде за межі $\pm\omega_0$, чим точніше інструмент, яким проводиться операція c_1 .

Величина $\Theta(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-y^2} dy$ є безрозмірною. Отже, число $h\omega_0$ також безрозмірне, тоді міра точності h повинна бути оберненою розмірності ω_0 . Наприклад, якщо ω_0 вимірюється в mm , то h вимірюється в $\frac{1}{mm}$.

Якщо інтеграл $p = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\omega_0} e^{-h^2 z^2} dz$ дорівнює 0,5, то його границя називається серединною помилкою і позначається через E . Отже, серединна помилка — це помилка, за межі якої з ймовірністю 50% не вийде чисельна величина помилки.

Значення α , яке відповідає $\Theta(\alpha) = 0,5$ ($\omega_0 = E$), позначається через q . Отже, число q незалежне від h . Якщо $\omega_0 = E$ і $\alpha = q$, а $h\omega_0 = \alpha$, то $E = \frac{q}{h}$ і $h = \frac{q}{E}$.

Знайдемо тепер ймовірність того, що помилка не вийде за межі $\pm 0,1$, якщо $h = 5 \frac{1}{mm}$, $\omega_0 = 0,1$, $\alpha = \omega_0 h = 0,5 = 0,5$. За цим значенням α знаходимо в таблицях $\Theta(\alpha) \approx 0,520499 = 52\%$. Це і є ймовірність того, що помилка не вийде за межі $\pm 0,1$.

Визначимо далі, які межі треба брати для того, щоб можна було стверджувати з ймовірністю 99%, що помилка не вийде за шукані межі при $h = 5 \frac{1}{mm}$. В цьому випадку задано значення $\Theta(\alpha) = 0,99$. Знаходимо в таблицях α . Можна прийняти, що $\alpha = 1,85$. Отже, $\omega_0 = \frac{\alpha}{h} = \frac{1,85}{5} = 0,37$. Отже, ймовірність того, що помилка не вийде за межі $\pm 0,37$, дорівнює 99%. Таким чином, якщо у нас коло помилок має радіус $3\omega_0$ і $\omega_0 = 0,1$, то з ймовірністю 99% можна стверджувати, що помилка не вийде за його межі при $h = 5 \frac{1}{mm}$.

Розглянемо далі побудову інцидентії г. точки і г. прямої за допомогою точкографа.

Нехай задана г. пряма $a(a')$, і на цій прямій фіксується г. точка $A(A')$ (рис. 2, а). Помилкою тут буде величина $\epsilon = O'A'$, що являє собою віддаль евклідової точки A' від евклідової прямої a' . Ймовірність влучити вістрям точкографа на ту чи іншу сторону г. прямої однакова. При встановленні точкографа в довільну точку г. прямої за законом Гаусса величину P однакової ймовірності зробити помилку заданого розміру ϵ визначимо за формулою

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \epsilon^2}.$$

Умова $P = \text{const}$ вимагає, щоб $e^{-h^2 \epsilon^2} = \text{const}$, що рівнозначно умові $h^2 \epsilon^2 = \text{const}$ або $\epsilon = \text{const}$. Тобто однакові помилки робимо з однаковою ймовірністю і «крива рівномірних помилок» переходить в дві прямі, паралельні a' і проведені по обох сторонах від неї на віддалі, рівній ϵ . Таким чином, приходимо до висновку, що областю відхилень (помилка) у цьому випадку є смуга шириною 2ϵ , обмежена двома паралельними прямими. Якщо m величина середньої арифметичної помилки, то

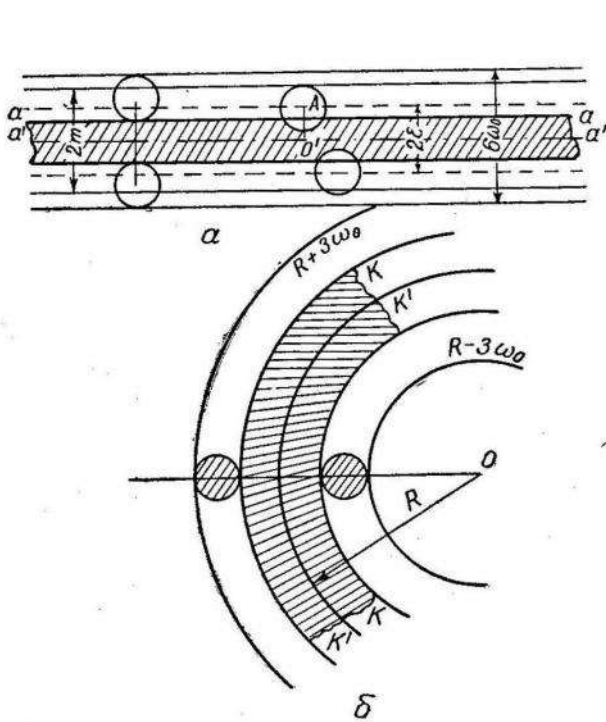


Рис. 2.

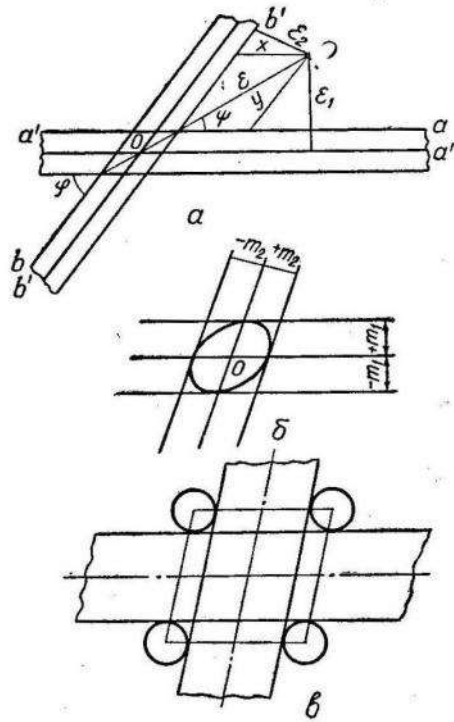


Рис. 3.

площа, обмежена прямими паралельними a' , які проходять на віддалі $\pm m$ від неї, буде являти собою «середню площу помилок» при побудові інцидентності г. точки і г. прямої.

Оскільки г. точка і г. пряма інцидентні, якщо $O'A' \leq 2\omega_0$, то максимальна смуга помилок буде мати ширину, яка дорівнює

$$6\omega_0 (\epsilon = \pm 3\omega_0).$$

Аналогічно попередньому ми можемо обчислити ймовірність того, що помилка ϵ не вийде за межі $\pm \omega_0$, якщо $A'O'$ перпендикулярна a' і точка O' прийнята за початок координат (див. рис. 2, a). Все зводиться до обчислення інтеграла типу

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\omega_0} e^{-h^2 \epsilon^2} d\epsilon.$$

У випадку, коли $h = 5 \frac{1}{mm}$ і $\omega_0 = 0,1$, дістанемо, як і раніше, $\Theta(\alpha) = 52\%$. Це і буде ймовірність того, що помилка не вийде за межі $\pm 0,1$. Із ймовірністю $\Theta(\alpha) = 99\%$ помилка не вийде за межі $\pm 3\omega_0$.

Побудова інцидентності г. точки і г. кола за допомогою точкографа аналогічна. При встановленні точкографа в довільну г. точку заданої

кривої будемо робити деяку помилку ε . Як і в попередньому випадку, ми приходимо до висновку, що «область помилок» являє собою частину площини, обмежену двома концентричними колами. Ширина такої смужки «середнього відхилення» дорівнює $2m$. Число m можна прийняти таким, як для прямої лінії.

З врахуванням умов інцидентності г. точки і г. кола приходимо до висновку, що крива помилок, яка обмежує максимальну первинну площу помилок, розпадається на два кола радіуса $R \pm 3\omega_0$. Площа «кільця», обмежена цими колами, є максимальною площею помилок. Ця площа з'являється при побудові інцидентії г. точки і г. кола. (див. рис. 2, б).

Операція c_1 — фіксування точкографом точки перетину двох г. прямих (тобто побудування інцидентії точки двох г. прямих) також вносить помилку в побудову.

Розглянемо дві г. прямі $a(a')$ і $b(b')$, що перетинаються під довільним кутом φ (рис. 3, а). Нехай точкографом ми зафіксували точку O_1 замість точки O . Помилка, яку ми робимо при цьому, характеризується віддаллю $OO_1 = \varepsilon$ і кутом нахилу ψ прямої OO_1 до прямої a або віддаллю ε_1 і ε_2 цієї точки O_1 від заданих г. прямих $a(a')$ і $b(b')$.

Імовірність зробити помилку даного розміру у відношенні першої прямої визначається виразом:

$$\varphi(\varepsilon_1) = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 \varepsilon_1^2}.$$

А у відношенні другої г. прямої дістанемо

$$\varphi(\varepsilon_2) = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 \varepsilon_2^2}.$$

При незалежності помилок за теоремою добутку ймовірностей знайдемо ймовірність одночасної появи помилок за формулою

$$\Phi(\varepsilon_1 \varepsilon_2) = \varphi(\varepsilon_1) \varphi(\varepsilon_2) = \frac{h_1 h_2}{\pi} e^{-(h_1^2 \varepsilon_1^2 + h_2^2 \varepsilon_2^2)}.$$

Однакова ймовірність появи як першої, так і другої помилки приводить до умови

$$\Phi(\varepsilon_1 \varepsilon_2) = \text{const} \quad \text{або} \quad h_1^2 \varepsilon_1^2 + h_2^2 \varepsilon_2^2 = \text{const}. \quad (3)$$

Отже, ймовірність $\Phi(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$ одночасної появи помилок ε_1 і ε_2 є константою для всіх точок, координати яких задовольняють рівняння (3).

Вводячи середні арифметичні помилки m_1, m_2 окремих спостережень та розглядаючи a і b як осі системи координат, знаходимо

$$\varepsilon_1 = y \sin \varphi; \quad \varepsilon_2 = x \sin \varphi;$$

При цьому

$$h_1^2 = \frac{1}{2m_1^2}; \quad h_2^2 = \frac{1}{2m_2^2}. \quad (4)$$

Після підстановки (4) в (3) дістанемо

$$\frac{y^2 \sin^2 \varphi}{2m_1^2} + \frac{x^2 \sin^2 \varphi}{2m_2^2} = \text{const}. \quad (5)$$

Якщо (5) поділимо на $\sin^2 \varphi$ і введемо сталу χ^2 , то будемо мати

$$\frac{x^2}{m_2^2} + \frac{y^2}{m_1^2} = \frac{2\chi^2}{\sin^2 \varphi}. \quad (6)$$

Рівняння це показує, що з однаковою ймовірністю фіксовані точки будуть розміщуватися на еліпсі, побудованому на даних прямих як на спряжених діаметрах. В залежності від значення параметра χ^2 будемо мати сімейство подібних і подібно розміщених еліпсів. Одержаний еліпс називається еліпсом помилок. Особливу роль відіграє так званий середній еліпс помилок при $\chi = \frac{1}{2}$.

$$\frac{\frac{x^2}{m_2^2}}{\sin^2 \varphi} + \frac{\frac{y^2}{m_1^2}}{\sin^2 \varphi} = 1.$$

Цей еліпс являє собою фігуру, вписану в паралелограм, утворений двома парами прямих, проведених на віддалі $\pm m_1$ і $\pm m_2$ від заданих прямих, що перетинаються, і відповідно паралельно до них (рис. 3, б).

Зокрема, при $m_1 = m_2 = m$ довжину півосей середнього еліпса помилок, спрямованих по бісектрисах кута φ , визначимо за формулами

$$a = \frac{\chi_m}{\sin \frac{\varphi}{2}} \quad \text{і} \quad b = \frac{\chi_m}{\cos \frac{\varphi}{2}}.$$

Звичайно значення більшої осі цього еліпса і вважають за міру точності при встановленні точкографа в г. точку перетину двох г. прямих.

Помилка буде тим більшою, чим меншим буде кут φ .

Для $m_1 = m_2 = m$ і $\varphi = 90^\circ$ еліпс помилок переходить в коло помилок, тобто при перетині двох даних г. прямих під прямим кутом будемо мати коло як криву помилок.

При врахуванні умови інцидентності г. точки і г. прямої можна стверджувати, що максимальною площею помилок при цьому є площа ромба зі стороною $\frac{2\omega_0}{\sin \varphi} + 4\omega_0$ (див. рис. 3, в).

Кривою рівноймовірних помилок у випадковій фіксації точкографом точки перетину двох г. ліній (прямої та кола або двох кіл) буде вже не еліпс, а овал.

Якщо елемент дуги кола в точці перетину замінити елементом дотичної прямої в цій точці, то тоді криву помилок можна наближено прийняти за еліпс.

В практиці така заміна допустима, оскільки при побудові за одними і тими ж емпіричними даними (m — величина середньої помилки) середній овал помилок та середній еліпс помилок в цьому випадку майже зливаються.

ЛІТЕРАТУРА

1. Буймола Г. Л. Деякі питання геометрії графічної площини. Вісник Львівського ун-ту, сер. механіко-матем., вип. 3. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1967.
2. Гончаров В. Л. Теория вероятностей, 1939.
3. Каргин Д. И. Точность графических расчетов. Докторская диссертация, 1937.
4. K. Nitz. Anwendungen der Theorie der Fehler in der Ebene Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Königsberg, 1905.

МЕХАНІКА

УДК 517.3

Д. В. ГРИЛІЦЬКИЙ, М. І. ГІЛЬ

ПРО ОДНУ ОСЕСИМЕТРИЧНУ ЗАДАЧУ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУ

1. Розглянемо стаціонарну осесиметричну задачу термопружності для плоскопаралельного пружного шару, який обмежений площинами $Z=0$ і $z=h$ в циліндричній системі координат r, φ, z , з такими граничними умовами для температури і напружень:

$$\begin{aligned} z=0: \quad T(r, 0) &= T_0 = \text{const}, \quad 0 \leq r \leq a; \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= 0, \quad a < r < \infty; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sigma_{zz}(r, 0) = \tau_{rz}(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (2)$$

$$z=h: \quad T(r, h) = 0, \quad 0 \leq r < \infty, \quad (3)$$

$$\sigma_{zz}(r, h) = \tau_{rz}(r, h) = 0, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (4)$$

Треба визначити температурне поле $T(r, z)$ в шарі і характер розподілу в ньому температурних напружень.

Визначимо спочатку температурне поле $T(r, z)$, яке в стаціонарному осесиметричному випадку при відсутності внутрішніх джерел тепла задовольняє диференціальному рівнянню

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (5)$$

Необхідно знайти розв'язок рівняння (5) в шарі при граничних умовах (1) і (3). При розв'язуванні задачі скористаємося інтегральним перетворенням Ханкеля [6, 7]. При використанні для температури $T(r, z)$ трансформанти Ханкеля нульового порядку

$$\bar{T}(\xi, z) = \int_0^\infty r T(r, z) j_0(\xi r) dr \quad (6)$$

рівняння (5) зведемо до розв'язку звичайного диференціального рівняння другого порядку відносно функції $\bar{T}(\xi, z)$

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dz^2} - \xi^2 \bar{T} = 0, \quad (7)$$

розв'язок якого набирає вигляду

$$\bar{T}(\xi, z) = A(\xi) e^{\xi z} + B(\xi) e^{-\xi z}, \quad (8)$$

де $A(\xi)$ і $B(\xi)$ визначаються з граничних умов.

Температурне поле в шарі знаходиться за формулою обернення

$$T(r, z) = \int_0^\infty \xi \bar{T}(\xi, z) j_0(\xi r) d\xi. \quad (9)$$

Задовольняючи граничну умову (3), дістанемо співвідношення

$$A(\xi) = -B(\xi) e^{-2\xi h}. \quad (10)$$

Величину $B(\xi)$ підберемо так, щоб в площині $z=0$ задовольнити граничним умовам (1), які приводять до розв'язку парних інтегральних рівнянь відносно шуканої функції $F(\eta)$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \eta^{-1} F(\eta) j_0(\eta \rho) d\eta &= f(\rho), & \rho \leq 1, \\ \int_0^\infty F(\eta) j_0(\eta \rho) d\eta &= 0, & \rho > 1 \end{aligned} \quad (11)$$

Тут введені позначення

$$\begin{aligned} \eta &= \xi a, \quad \rho = r/a; \\ F(\eta) &= \frac{\eta^2}{a^2} (1 + e^{-2\eta \delta}) B(\eta/a), \quad \delta = h/a; \\ f(\rho) &= T_0 + \int_0^\infty \eta^{-1} F(\eta) [1 - \text{th}(\eta \delta)] j_0(\eta \rho) d\eta. \end{aligned} \quad (12)$$

При застосуванні до парних інтегральних рівнянь (11) формули обернення [6] та проведення деяких перетворень дістанемо інтегральне рівняння типу Фредгольма другого роду

$$F(\eta) = \frac{2T_0}{\pi} \sin \eta + \frac{2\eta}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta \sin \eta \cos \alpha - \alpha \sin \alpha \cos \eta}{\alpha (\eta^2 - \alpha^2)} [1 - \text{th}(\alpha \delta)] F(\alpha) d\alpha. \quad (13)$$

Рівняння (13) будемо розв'язувати методом послідовних наближень, прийнявши за нульове наближення вільний член рівняння, який характеризує розв'язок задачі для півпростору. Отже, будемо мати

$$F(\eta) = F_0(\eta) + F_1(\eta) + F_2(\eta) + \dots, \quad (14)$$

де

$$F_0(\eta) = \frac{2T_0}{\pi} \sin \eta.$$

$$F_k(\eta) = \frac{2\eta}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta \sin \eta \cos \alpha - \alpha \sin \alpha \cos \eta}{\alpha (\eta^2 - \alpha^2)} [1 - \text{th}(\alpha \delta)] F_{k-1}(\alpha) d\alpha \quad (15)$$

($k=1, 2, \dots$).

Скориставшись принципом стиснутих відображень [5], можна показати, що для значень параметра $\delta > 0,4415$ процес послідовних наближень буде рівномірно збіжним до розв'язку інтегрального рівняння (13).

Згідно з роботами [1, 2], кожне з послідовних наближень, починаючи з першого, зручно розвинути в асимптотичний ряд за від'ємними степенями безрозмірного параметра δ . При пропусканні проміжних викладок запишемо остаточний результат, обмежившись членами з δ^7

$$F(\eta) = \frac{2T_0}{\pi} \left[\sin \eta + \frac{2}{\pi} S_1 \sin \eta \cdot \delta^{-1} + \frac{4}{\pi^2} S_1^2 \sin \eta \cdot \delta^{-2} + \sum_{k=3}^7 \varphi_k(\eta) \delta^{-k} + \dots \right]. \quad (16)$$

Тут введені позначення:

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= \frac{\sin \eta}{\eta^2} - \frac{\cos \eta}{\eta}, \\ \varphi_3(\eta) &= \frac{24S_1^3 - 2\pi^2 S_3}{3\pi^3} \sin \eta + \frac{S_3}{\pi} \varphi(\eta), \\ \varphi_4(\eta) &= \frac{16S_1^4 - 2\pi^2 S_1 S_3}{\pi^4} \sin \eta + \frac{2S_1 S_3}{\pi^2} \varphi(\eta), \\ \varphi_5(\eta) &= \frac{480S_1^5 - 80\pi^2 S_1^2 S_3 + 6\pi^4 S_5}{15\pi^5} \sin \eta - \frac{\pi^2 S_5 - 4S_1^2 S_3}{\pi^3} \varphi(\eta) - \\ &\quad - \frac{S_5 \sin \eta}{\pi \eta^2} + \frac{3S_5 \varphi(\eta)}{\pi \eta^2}, \\ \varphi_6(\eta) &= \left(\frac{11S_1^3 + 48S_1 S_5}{45\pi^2} - \frac{40S_1^3 S_3}{3\pi^4} + \frac{64S_1^6}{\pi^6} \right) \sin \eta - \\ &\quad - \frac{\pi^2 S_3^2 + 6\pi^2 S_1 S_5 - 24S_1^3 S_3}{3\pi^4} \varphi(\eta) + \frac{2S_1 S_5}{\pi^2 \eta^2} [3\varphi(\eta) - \sin \eta], \\ \varphi_7(\eta) &= \left(\frac{128S_1^7}{\pi^7} - \frac{32S_1^4 S_3}{\pi^5} + \frac{40S_1^2 S_5 + 18S_3^2 S_1}{15\pi^3} - \frac{2S_7}{7\pi} \right) \sin \eta + \\ &\quad + \left(\frac{16S_1^4 S_3}{\pi_5} - \frac{12S_1^2 S_5 + 4S_1 S_3^2}{3\pi^3} + \frac{S_7}{\pi} \right) \varphi(\eta) + \\ &\quad + \frac{(2\pi^2 S_7 - 4S_1^2 S_5) \sin \eta}{\pi^3 \eta^2} + \left(\frac{12S_1^2 S_5}{\pi^3} - \frac{15S_7}{2\pi} \right) \frac{\varphi(\eta)}{\eta^2} + \frac{45S_7 \varphi(\eta)}{2\pi \eta^4}; \\ S_m &= \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n+1} n^{-m}. \end{aligned} \quad (17)$$

Підставивши у формулу (16) замість η і δ їх значення, подані через ξ і h , на основі співвідношень (12) одержимо вираз для $F(\xi, h)$. Із співвідношень (8), (10), (12) і (9) знаходимо

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} \frac{F(\xi, h)}{\xi(1+e^{-2\xi h})} [e^{-\xi z} - e^{-(2h-z)\xi}] j_0(\xi r) d\xi. \quad (18)$$

При заміні в попередній формулі виразу $(1+e^{-2\xi h})^{-1}$ його наближеним значенням

$$(1+e^{-2\xi h})^{-1} \simeq 1 - 0,6e^{-1,6\xi h} + 0,1e^{-5,588\xi h} \quad (19)$$

та при введенні функції $F(\xi h)$ для температурного поля в шарі з точністю до членів з $(a/h)^4$ будемо мати таку формулу:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2T_0} T(r, z) = & \left[1 + \frac{2S_1}{\pi} \cdot \frac{a}{h} + \frac{4S_1^2}{\pi^2} \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^2 \right] N(r, z) + \\ & + \left\{ \left[\frac{24S_1^3 - 2\pi^2 S_3}{3\pi^3} - \frac{S_3(r^2 - 2a^2)}{4\pi a^2} \right] N(r, z) + \frac{S_3}{4\pi a^2} [2R(r, z) - 3aK(r, z) + \right. \\ & \left. + aP(r, z)] \right\} \left(\frac{a}{h}\right)^3 + \left\{ \left[\frac{16S_1^4 - 2\pi^2 S_1 S_3}{\pi^4} - \frac{S_1 S_3(r^2 - 2a^2)}{2\pi^2 a^2} \right] N(r, z) + \right. \\ & \left. + \frac{S_1 S_3}{2\pi^2 a^2} [2R(r, z) - 3aK(r, z) + aP(r, z)] \right\} \left(\frac{a}{h}\right)^4 + \dots \quad (20) \end{aligned}$$

У формулі (20) використані позначення:

$$\begin{aligned} N(r, z) = & A(z, r) - A(2h - z, r) - 0,6 A(1,6h + z, r) + 0,6 A(3,6h - z, r) + \\ & + 0,1 A(5,588h + z, r) - 0,1 A(7,588h - z, r), \\ K(r, z) = & \frac{z^2}{B(z, r)} - \frac{(2h - z)^2}{B(2h - z, r)} - 0,6 \frac{(1,6h + z)^2}{B(1,6h + z, r)} + 0,6 \frac{(3,6h - z)^2}{B(3,6h - z, r)} + \\ & + 0,1 \frac{(5,588h + z)^2}{B(5,588h + z, r)} - 0,1 \frac{(7,588h - z)^2}{B(7,588h - z, r)}, \quad (21) \\ R(r, z) = & z^2 A(z, r) - (2h - z)^2 A(2h - z, r) - 0,6 (1,6h + z)^2 A(1,6h + \\ & + z, r) + 0,6 (3,6h - z)^2 A(3,6h - z, r) + 0,1 (5,588h + z)^2 A(5,588h + \\ & + z, r) - 0,1 (7,588h - z)^2 A(7,588h - z, r). \end{aligned}$$

Вираз для $P(r, z)$ одержуємо з $N(r, z)$ шляхом заміни $A(z, r)$ на $B(z, r)$.

$$\begin{aligned} A(z, r) = & \arcsin \frac{2a}{\sqrt{z^2 + (a+r)^2} + \sqrt{z^2 + (a-r)^2}}, \quad (22) \\ \sqrt{2} B(z, r) = & \sqrt{r^2 - a^2 + z^2} + \sqrt{(r^2 - a^2 + z^2)^2 + 4a^2 z^2}. \end{aligned}$$

При обчисленні формули (20) ми використали значення інтегралів

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin a\xi}{\xi} e^{-b\xi} j_0(\xi r) d\xi = & A(b, r), \\ \int_0^\infty \frac{1}{a\xi^2} \left(\frac{\sin a\xi}{a\xi} - \cos a\xi \right) e^{-b\xi} j_0(\xi r) d\xi = & -\frac{b}{2a} + \\ & + \frac{b}{a} (1 - \mu) + \frac{1}{4} (1 - \mu)^2 \beta - \frac{1}{4a^2} (r^2 - 2b^2 - 2a^2) A(b, r), \quad (23) \end{aligned}$$

де через μ та β позначені вирази

$$a\beta = B(b, r), \quad b = \mu B(b, r). \quad (24)$$

Перший інтеграл взятий нами із таблиці [3], другий — обчислений на основі роботи [9].

Визначимо температурні напруження. В нашому випадку маємо квазіплоский напружений стан [4], тобто два компоненти тензора напружень в кожній точці пружного шару будуть рівні нулю

$$\sigma_{zz}(r, z) = 0; \tau_{rz}(r, z) = 0, \quad (25)$$

два інших обчислюються за формулами

$$\sigma_{rr}(r, z) = -2G \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(r, z)}{\partial r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}(r, z) = -2G \frac{\partial^2 \psi(r, z)}{\partial r^2}, \quad (26)$$

де функція напружень $\psi(r, z)$ в кожній точці шару задовольняє диференціальному рівнянню

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = (1 + \nu) \alpha_t T(r, z). \quad (27)$$

Тут ν — коефіцієнт Пуассона, α_t — коефіцієнт лінійного розширення від температури, G — модуль зсуву, $T(r, z)$ — температура.

Із (27) знаходимо

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{(1 + \nu) \alpha_t}{r} \int_0^r \rho T(z, \rho) d\rho. \quad (28)$$

Використовуючи співвідношення

$$\int_0^r \rho j_0(\xi \rho) d\rho = \frac{r}{\xi} j_1(\xi r) \quad (29)$$

та користуючись значенням інтегралів

$$\int_0^\infty \frac{\sin a\xi}{\xi^2} e^{-b\xi} j_1(\xi r) d\xi = \frac{r}{2} \left[\left(\frac{a}{r} \right)^2 (1 - \mu)^2 \beta + A(b, r) \right], \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{a\xi^3} \left(\frac{\sin a\xi}{a\xi} - \cos a\xi \right) e^{-b\xi} j_1(\xi r) d\xi = & -\frac{5br}{24a} - \frac{r}{16a^2} (r^2 - 4b^2 - 4a^2) A(b, r) + \\ & + \frac{b}{24ar} (4r^2 - a^2 - b^2) (1 - \mu) + \frac{1}{48r} (3r^2 - 2b^2 + 6a^2) (1 - \mu)^2 \beta, \end{aligned}$$

за формулами (18), (28) і (26) знаходимо напруження $\sigma_{rr}(r, z)$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2Gm} \sigma_{rr}(r, z) = & f_1(r, z) \left[1 + \frac{2S_1 a}{\pi h} + \frac{4S_1^2}{\pi^2} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \right] + \left\{ \frac{(24S_1^3 - \pi^2 S_3)(h - z)a}{3\pi^2 r^2} + \right. \\ & + \frac{24S_1^3 - 2\pi^2 S_3}{3\pi^3 r^2} [r^2 f_1(r, z) - (h - z)a] + \frac{S_3}{\pi} \left[\frac{4a^2 - r^2}{16a^2} N(r, z) + \right. \\ & + \frac{r^2 + 2a^2}{16ar^2} P(r, z) - \frac{13r^2 - 10a^2}{48ar^2} K(r, z) + \frac{R(r, z)}{4a^2} + \\ & \left. \left. + \frac{Q(r, z) - L(r, z)}{24ar^2} \right] \right\} \left(\frac{a}{h} \right)^3 + \left\{ \frac{(48S_1^4 - 4\pi^2 S_1 S_3)(h - z)a}{3\pi^4 r^2} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{16S_1^4 - 2\pi^2 S_1 S_3}{\pi^4 r^2} [r^2 f_1(r, z) - (h-z)a] + \frac{S_1 S_3}{\pi^2} \left[\frac{4a^2 - r^2}{8a^2} N(r, z) + \right. \\
& + \frac{r^2 + 2a^2}{8ar^2} P(r, z) - \frac{13r^2 - 10a^2}{24ar^2} K(r, z) + \frac{R(r, z)}{2a^2} + \\
& \left. + \frac{Q(r, z) - L(r, z)}{12ar^2} \right] \left(\frac{a}{h} \right)^4 + \dots \quad (31)
\end{aligned}$$

Напруження $\sigma_{\varphi\varphi}(r, z)$ визначається за формулою

$$-\frac{1}{2Gm} \sigma_{\varphi\varphi}(r, z) = \frac{\pi}{2T_0} T(r, z) + \frac{1}{2Gm} \sigma_{rr}(r, z), \quad (32)$$

яка на основі (20) і (31) набирає вигляду

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2Gm} \sigma_{\varphi\varphi}(r, z) = f_2(r, z) \left[1 + \frac{2S_1}{\pi} \cdot \frac{a}{h} + \frac{4S_1^2}{\pi^2} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \right] + \\
& + \left\{ \frac{(\pi^2 S_3 - 24S_1^3)(h-z)a}{3\pi^3 r^2} + \frac{24S_1^3 - 2\pi^2 S_3}{3\pi^3 r^2} [r^2 f_2(r, z) + (h-z)a] + \right. \\
& + \frac{S_3}{\pi} \left[\frac{4a^2 - 3r^2}{16a^2} N(r, z) + \frac{3r^2 - 2a^2}{16ar^2} P(r, z) - \frac{23r^2 - 10a^2}{48ar^2} K(r, z) + \right. \\
& + \left. \frac{R(r, z)}{4a^2} - \frac{Q(r, z) - L(r, z)}{24ar^2} \right] \left(\frac{a}{h} \right)^3 + \left\{ \frac{(4\pi^2 S_1 S_3 - 48S_1^4)(h-z)a}{3\pi^4 r^2} + \right. \\
& + \frac{16S_1^4 - 2\pi^2 S_1 S_3}{\pi^4 r^2} [r^2 f_2(r, z) + (h-z)a] + \frac{S_1 S_3}{\pi^2} \left[\frac{4a^2 - 3r^2}{16a^2} N(r, z) + \right. \\
& + \frac{3r^2 - 2a^2}{8ar^2} P(r, z) - \frac{23r^2 - 10a^2}{24ar^2} K(r, z) + \frac{R(r, z)}{2a^2} - \\
& \left. \left. - \frac{Q(r, z) - L(r, z)}{12ar^2} \right] \right\} \left(\frac{a}{h} \right)^4 + \dots \quad (33)
\end{aligned}$$

Тут введені такі позначення:

$$\begin{aligned}
f_1(r, z) &= \frac{1}{2} N(r, z) + \frac{(h-z)a}{r^2} + \frac{a}{2r^2} [K(r, z) + P(r, z)], \\
f_2(r, z) &= \frac{1}{2} N(r, z) - \frac{(h-z)a}{r^2} - \frac{a}{2r^2} [K(r, z) + P(r, z)], \\
Q(r, z) &= \frac{z^4}{B(r, z)} - \frac{(2h-z)^4}{B(2h-z, r)} - 0,6 \frac{(1,6h+z)^4}{B(1,6h+z, r)} + \\
& + 0,6 \frac{(3,6h-z)^4}{B(3,6h-z, r)} + 0,1 \frac{(5,588h+z)^4}{B(5,588h+z, r)} - 0,1 \frac{(7,588h-z)^4}{B(7,588h-z, r)}, \\
L(r, z) &= z^2 B(r, z) - (2h-z)^2 B(2h-z, r) - 0,6(1,6h+z)^2 B(1,6h+z, r) - \\
& - 0,6(3,6h-z)^2 B(3,6h-z, r) + 0,1(5,588h+z)^2 B(5,588h+z, r) - \\
& - 0,1(7,588h-z)^2 B(7,588h-z, r), \\
m &= 2T_0(1+\nu)\alpha_t/\pi.
\end{aligned} \quad (34)$$

При $r=0$ напруження $\sigma_{rr}(0, z)$ і $\sigma_{\varphi\varphi}(0, z)$ співпадають між собою

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(0, z) = \sigma_{\varphi\varphi}(0, z) = -Gm \left\{ \left[1 + \frac{2S_1}{\pi} \cdot \frac{a}{h} + \frac{4S_1^2}{\pi^2} \left(\frac{a}{h} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. + \frac{24S_1^3 - 2\pi^2 S_3}{3\pi^3} \left(\frac{a}{h} \right)^3 + \frac{16S_1^4 - 2\pi^2 S_1 S_3}{\pi^4} \left(\frac{a}{h} \right)^4 \right] N(0, z) + \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\frac{S_3}{\pi} \left(\frac{a}{h} \right)^3 + \frac{2S_1 S_3}{\pi^2} \left(\frac{a}{h} \right)^4 \right] \left[\frac{h-z}{a} + N(0, z) + \frac{R(0, z)}{a^2} \right] \right\}. \quad (35) \end{aligned}$$

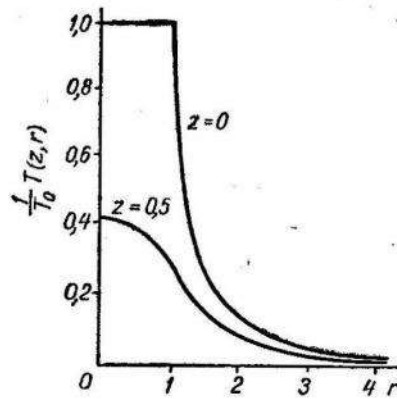


Рис. 1.

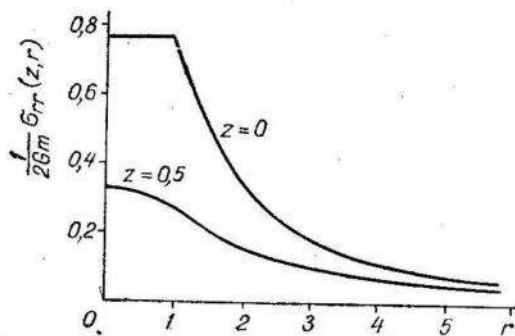


Рис. 2.

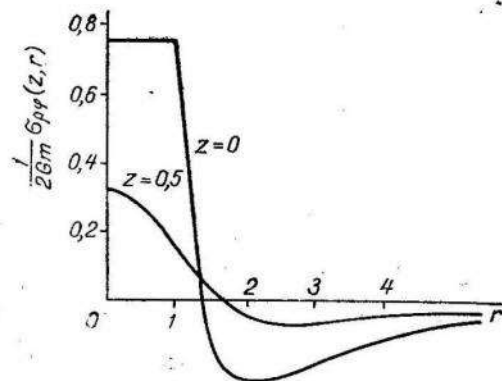


Рис. 3.

На рис. 1, 2, 3 показані графіки розподілу температури і напружень для $z=0$ і $z=0,5$ при $a=h=1$.

При спрямуванні в попередніх формулах h до безмежності одержимо результати В. Новацького [4, 8].

ЛІТЕРАТУРА

1. Воробич І. І., Юдович В. І. Удар круглой пластинки о слой воды конечной глубины. ПММ, 1957, т. 21, в. 4.
2. Воробич І. І., Устинов Ю. А. О давлении штампа на слой конечной толщины. ПММ, 1959, т. 23, в. 3.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
4. Новацкий В. Вопросы термоупругости. Изд-во АН СССР, М., 1962.
5. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М., 1952.
6. Снеддон И. Преобразования Фурье. ИЛ, 1955.

7. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. «Наука», 1967.

8. Nowacki W. A Three-Dimensional Thermoelastic Problem with Discontinuous Boundary Conditions, *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, т. IX, № 3, 1957.

9. Singh Avtar. Axisymmetrical Thermal Stress in Transversely Isotropic Bodies. *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, т. XII, № 3, 1960.

УДК 539.384

Т. Л. МАРТИНОВИЧ, В. П. ВУШКО

ПРО ОДИН СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗМІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОРІДНИХ І КУСОЧНО-ОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ

Нехай пружне ізотропне середовище заповнює скінченну (або нескінченну) плоску область D , обмежену контуром $L = L_1 + L_2 + \dots + L_{m+1}$, причому L_j ($j=1, 2, \dots, m+1$) — замкнуті гладкі (або кусочно-гладкі) лінії, які не перетинаються між собою, а контур L_{m+1} охоплює всі попередні.

У випадку нескінченної області D зовнішній контур L_{m+1} віддалений в нескінченність. За додатний напрям обходу контура L прийнято той, який залишає область D зліва.

I. Основна змішана крайова задача. Нехай на одній частині межі $L_I = L_1^I + L_2^I + \dots + L_{m+1}^I$ області D задані зовнішні напруження X_n, Y_n , а на останній частині межі $L_{II} = L_1^{II} + L_2^{II} + \dots + L_{m+1}^{II}$ задані переміщення $u = g_1(t)$, $v = g_2(t)$, причому $L = L_I + L_{II}$.

На підставі формул плоскої задачі [1] будемо мати *

$$d[\varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)}] = i(X_n + iY_n)ds \text{ на } L_I \quad (1.1)$$

$$d[\kappa\varphi_1(t) - t\overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)}] = 2\mu d(g_1 + ig_2) \text{ на } L_{II} \quad (1.2)$$

Помножимо рівності (1.1) і (1.2) на довільну функцію $F_1(z)$, голоморфну в області D , і проінтегруємо їх відповідно по L_I і L_{II} , а потім з першої рівності віднімемо другу, в результаті дістанемо інтегральне співвідношення для визначення функції $\Phi_1(z)$:

$$\begin{aligned} \int_{L_I} \Phi_1(t) \overline{F_1(t)} dt - \kappa \int_{L_{II}} \Phi_1(t) \overline{F_1(t)} dt - \int_L \overline{\Phi_1(t)} \overline{F_1'(t)} t d\bar{t} = \\ = i \int_{L_I} \overline{F_1(t)} (X_n + iY_n) ds - 2\mu \int_{L_{II}} \overline{F_1(t)} d(g_1 + ig_2). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Якщо функція $\Phi_1(z)$ з контурної рівності (1.3) знайдена, то функція $\Psi_1(z)$ визначається з інтегрального співвідношення

$$\begin{aligned} \int_L \overline{\Psi_1(t)} F_1(t) d\bar{t} = (\kappa + 1) \int_{L_{II}} \Phi_1(t) F_1(t) dt + \int_L \overline{\Phi_1(t)} F_1'(t) t dt + \\ + i \int_{L_I} F_1(t) (X_n + iY_n) ds - 2\mu \int_{L_{II}} F_1(t) d(g_1 + ig_2), \end{aligned} \quad (1.4)$$

одержаного шляхом таких самих міркувань, що і формула (1.3).

* Тут і далі припускається, що об'ємні сили відсутні.

Тут t — афікс точки межі області L ; μ — модуль зсуву; $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ — для плоского напруженого стану і $\kappa = 3-4\nu$ — для плоскої деформації; ν — коефіцієнт Пуассона; $F_1(z)$ — довільна функція, голоморфна в області D .

Зокрема, при $L_{II}=0$, $L_I=L$ одержуємо контурні умови першої основної задачі, а при $L_I=0$, $L_{II}=L$ — контурні умови другої основної задачі [2].

II. Кусочно-однорідне середовище. Основна змішана задача. Нехай область D складається з двох частин — D_1 і D_2 , які відповідають двом різним матеріалам. Лінію відокремлення пружних середовищ D_1 і D_2 позначимо через L_0 . Всі величини, що стосуються області D_1 , будемо позначати індексом 1, а ті самі величини, що стосуються області D_2 — індексом 2.

Нехай на одній частині межі L_1^I і L_2^I області $D=D_1+D_2$ задані зовнішні напруження X_n , Y_n , а на останній частині — межі L_1^{II} і L_2^{II} задані переміщення $u=g_1(t)$ і $v=g_2(t)$, причому $L_1=L_1^I+L_1^{II}$, $L_2=L_2^I+L_2^{II}$; $L_1+L_2=L$ — межа області $D=D_1+D_2$.

На лінії відокремлення середовищ L_0 повинні справджуватися умови

$$u_1+iv_1=u_2+iv_2 \quad \text{на } L_0, \quad (2.1)$$

$$X_{1n}+iY_{1n}=X_{2n}+iY_{2n} \quad \text{на } L_0. \quad (2.2)$$

Мислено відокремимо області D_1 і D_2 і розглянемо окремо для кожної з них основну змішану задачу, коли на контурі L_0 задані напруження. На підставі формули (1.3) одержимо

$$\begin{aligned} \int_{L_2^I+L_0} \Phi_2(t) \overline{F(t)} dt - \kappa_2 \int_{L_2^{II}} \Phi_2(t) \overline{F(t)} dt - \int_{L_2^I+L_2^{II}+L_0} \overline{\Phi_2(t)} \overline{F'(t)} t d\bar{t} = \\ = i \int_{L_2^I+L_0} \overline{F(t)} (X_n+iY_n) ds - 2\mu_2 \int_{L_2^{II}} \overline{F(t)} d(g_1+ig_2); \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \int_{L_1^I+L_0} \Phi_1(t) \overline{F(t)} dt - \kappa_1 \int_{L_1^{II}} \Phi_1(t) \overline{F(t)} dt - \int_{L_1^I+L_1^{II}+L_0} \overline{\Phi_1(t)} \overline{F'(t)} t d\bar{t} = \\ = i \int_{L_1^I+L_0} \overline{F(t)} (X_n+iY_n) ds - 2\mu_1 \int_{L_1^{II}} \overline{F(t)} d(g_1+ig_2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Додаючи рівності (2.3) і (2.4) з врахуванням умови спряження (2.2), приходимо до такої контурної умови відносно функцій Φ_1 і Φ_2 :

$$\begin{aligned} \int_{L_2^I+L_0} \Phi_2(t) \overline{F(t)} dt - \kappa_2 \int_{L_2^{II}} \Phi_2(t) \overline{F(t)} dt - \int_{L_2^I+L_2^{II}+L_0} \overline{\Phi_2(t)} \overline{F'(t)} t d\bar{t} + \\ + \int_{L_1^I+L_0} \Phi_1(t) \overline{F(t)} dt - \kappa_1 \int_{L_1^{II}} \Phi_1(t) \overline{F(t)} dt - \int_{L_1^I+L_1^{II}+L_0} \overline{\Phi_1(t)} \overline{F'(t)} t d\bar{t} = \\ = i \int_{L_2^I+L_1^I} \overline{F(t)} (X_n+iY_n) ds - 2\mu_2 \int_{L_2^{II}} \overline{F(t)} d(g_1+ig_2) - 2\mu_1 \int_{L_1^{II}} \overline{F(t)} d(g_1+ig_2), \end{aligned} \quad (2.5)$$

причому $F(z)$ — довільна функція, голоморфна в області $D=D_1+D_2$.

Тепер розглянемо основну змішану задачу окремо для області D_1 і для області D_2 , коли на контурі L_0 задані переміщення. Згідно з формулою (1.3) дістаємо

$$\begin{aligned} & \int_{L_2^I} \Phi_2(t) \overline{F(t)} dt - x_2 \int_{L_2^{II}+L_0} \Phi_2(t) \overline{F(t)} dt - \int_{L_2^I+L_2^{II}+L_0} \overline{\Phi_2(t)} \overline{F'(t)} t d\bar{t} = \\ & = i \int_{L_2^I} \overline{F(t)} (X_n + iY_n) ds - 2\mu_2 \int_{L_2^{II}+L_0} \overline{F(t)} d(g_1 + ig_2); \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & \int_{L_1} \Phi_1(t) \overline{F(t)} dt - x_1 \int_{L_1^{II}+L_0} \Phi_1(t) \overline{F(t)} dt - \int_{L_1^I+L_1^{II}+L_0} \overline{\Phi_1(t)} \overline{F'(t)} t d\bar{t} = \\ & = i \int_{L_1^I} \overline{F(t)} (X_n + iY_n) ds - 2\mu_1 \int_{L_1^{II}+L_0} \overline{F(t)} d(g_1 + ig_2). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Помножимо рівність (2.6) на μ_1 , рівність (2.7) — на μ_2 і потім додамо їх з врахуванням умови спряження (2.1). Після цього одержимо:

$$\begin{aligned} & \mu_1 \int_{L_2^I} \Phi_2(t) \overline{F(t)} dt - \mu_1 x_2 \int_{L_2^{II}+L_0} \Phi_2(t) \overline{F(t)} dt - \mu_1 \int_{L_2^I+L_2^{II}+L_0} \overline{\Phi_2(t)} \overline{F'(t)} t d\bar{t} + \\ & + \mu_2 \int_{L_1^I} \Phi_1(t) \overline{F(t)} dt - \mu_2 x_1 \int_{L_1^{II}+L_0} \Phi_1(t) \overline{F(t)} dt - \mu_2 \int_{L_1^I+L_1^{II}+L_0} \overline{\Phi_1(t)} \overline{F'(t)} t d\bar{t} = \\ & = i\mu_1 \int_{L_2^I} \overline{F(t)} (X_n + iY_n) ds + i\mu_2 \int_{L_1^{II}} \overline{F(t)} (X_n + iY_n) ds - \\ & - 2\mu_1 \mu_2 \int_{L_2^{II}+L_1^{II}} \overline{F(t)} d(g_1 + ig_2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Контурні умови (2.5) і (2.8) служать для визначення функцій $\Phi_1(z)$ і $\Phi_2(z)$.

Якщо функції $\Phi_j(z)$ з формул (2.5) і (2.8) знайдені, то функції $\Psi_1(z)$ і $\Psi_2(z)$ визначаються з таких інтегральних співвідношень

$$\begin{aligned} & \int_{L_1+L_0} \overline{\Psi_1(t)} F(t) d\bar{t} = \int_{L_1+L_0} \overline{\Phi_1(t)} F'(t) t d\bar{t} - \frac{\mu_1(1+x_1)}{\mu_2-\mu_1} \int_{L_1^{II}} \Phi_1(t) F(t) dt - \\ & - \frac{\mu_2(1+x_1)}{\mu_2-\mu_1} \int_{L_1} \Phi_1(t) F(t) dt - \frac{\mu_1(1+x_2)}{\mu_2-\mu_1} \int_{L_2} \Phi_2(t) F(t) dt + \\ & + i \int_{L_1^I} F(t) (X_n + iY_n) ds - 2\mu_1 \int_{L_1^{II}} F(t) d(g_1 + ig_2), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
\int_{L_1+L_2} \overline{\Psi_2(t)} F(t) d\bar{t} &= \int_{L_2+L_0} \overline{\Phi_2(t)} F'(t) t dt + \frac{\mu_2(1+\kappa_2)}{\mu_2-\mu_1} \int_{L_2^{II}} \Phi_2(t) F(t) dt + \\
&+ \frac{\mu_1(1+\kappa_2)}{\mu_2-\mu_1} \int_{L_2^I} \Phi_2(t) F(t) dt + \frac{\mu_2(1+\kappa_1)}{\mu_2-\mu_1} \int_{L_1} \Phi_1(t) F(t) dt + \\
&+ i \int_{L_2^I} F(t) (X_n + iY_n) ds - 2\mu_2 \int_{L_2^{II}} F(t) d(g_1 + ig_2), \quad (2.10)
\end{aligned}$$

які одержані шляхом тих самих міркувань, що і формули (2.5) і (2.8).

Додатним напрямком обходу дуг L_1 , L_2 і L_0 вважається той, при якому області D_1 і D_2 залишаються зліва.

Зокрема, при $L_1^{II}=0$, $L_2^{II}=0$, $L_1^I=L_1$ і $L_2^I=L_2$ одержуємо контурні умови першої основної задачі, а при $L_1^I=0$, $L_2^I=0$, $L_1^{II}=L_1$ і $L_2^{II}=L_2$ — контурні умови другої основної задачі для кусочно-однорідного пружного середовища.

Поширення формул (2.5), (2.8) — (2.10) на той випадок, коли область D складається з декількох однорідних частин D_j з різними пружними сталими і заданим стрибком переміщень на лінії відокремлення середовищ L_0 , не викликає утруднень.

Зазначимо, що для обчислення нормальної складової контактного напруження σ_n ($\sigma_n^{(1)}=\sigma_n^{(2)}$) на лінії відокремлення середовищ L_0 , а також нормальних напружень $\sigma_\tau^{(1)}$ і $\sigma_\tau^{(2)}$ на площадках, перпендикулярних до лінії L_0 , достатньо знати лише функції $\Phi_1(z)$ і $\Phi_2(z)$ для цих середовищ (n і τ — одиничні вектори нормалі і дотичної до лінії L_0). Для обчислення дотичних контактних напружень $\tau_{n\tau}$ на лінії L_0 треба знати ще функцію $\Psi(z)$ для будь-якого з цих середовищ [3].

Наведені вище крайові умови в формі контурних інтегралів, що містять довільну голоморфну функцію $F(z)$, особливо зручні при розв'язуванні задач в рядах для тих областей, на які конформно відображається зовнішність кола або кругового кільця раціональною функцією $z=\omega(\zeta)$.

III. Еліптичне софокусне кільце із змішаними крайовими умовами. Нехай для простоти частина t_1Mt_2 зовнішнього контура кільця L_2 ненавантажена, а на останній частині t_2Nt_3 ($t_3=t_1$) контура L_2 задані переміщення $u=0$, $v=0$. До внутрішнього контура кільця L_1 прикладений рівномірний тиск інтенсивності p_1 . Вісь Ox напрямлена вздовж більшої півосі еліпса. Функція

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\frac{m}{\zeta}\right) \quad (3.1)$$

конформно відображає кільце, що міститься між концентричними колами γ_1 і γ_2 радіусів ρ_1 і ρ_2 , на розглядувану область, причому

$$m=\frac{a_1-b_1}{a_1+b_1}, \quad R=\frac{a_1+b_1}{2}; \quad \rho_1=1, \quad \rho_2=\frac{a_2+b_2}{a_1+b_1} > 1;$$

a_j, b_j — півосі конфокальних еліпсів.

На площині ζ точкам t_1 , t_2 і t_3 відповідають точки

$$\sigma_1=\rho_2 e^{ia_1}, \quad \sigma_2=\rho_2 e^{ia_2}, \quad \sigma_3=\rho_2 e^{i(a_1+2\pi)}. \quad (3.2)$$

В нових позначеннях

$$\Phi(\zeta) = \Phi_1[\omega(\zeta)], \quad \Psi(\zeta) = \Psi_1[\omega(\zeta)], \quad F(\zeta) = F_1[\omega(\zeta)].$$

Формула (1.3) в перетвореній області для розглядуваного прикладу набирає вигляду

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \Phi(\sigma) \overline{F(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma + \int_{\gamma_1} \Phi(\sigma) \overline{F(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma - \kappa \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \Phi(\sigma) \overline{F(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma - \\ - \int_{\gamma_2 + \gamma_1} \overline{\Phi(\sigma)} F'(\sigma) \omega(\sigma) d\sigma = -P_1 \int_{\gamma_1} \overline{F(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Функції $\Phi(\zeta)$ і $F(\zeta)$ голоморфні в кільці $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, розвинені в ряд Лорана

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \zeta^{-k} \\ F(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \zeta^n + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \zeta^{-n}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Внесемо розклади (3.4) в крайову умову (3.3). Тепер по черзі будемо вважати, що всі коефіцієнти розкладу довільної функції $F(\zeta)$ дорівнюють нулю, крім одного з них — C_j або D_j ($j=0, 1, 2, \dots$), і після інтегрування дістанемо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів A_k і B_k функції $\Phi(\zeta)$.

Розв'язувалася укорочена система одержаних рівнянь 27 порядку при таких даних: $\nu=0,3$; $\kappa=2,08$; $\alpha_1=0$; $\alpha_2=\pi$; $m=0,5$, $\left(a_1=3b_1, a_2=4b_1, b_2=2\sqrt{2}b_1, p_2=\frac{2+\sqrt{2}}{2} \right)$.

θ , град	1	5	15	30	45	60	75	90
$\sigma_{\theta}^{(1)}/P_1$	8,21	9,39	9,71	5,06	1,92	-0,40	-1,01	-1,29
$\sigma_{\theta}^{(2)}/P_1$	5,13	4,45	-0,72	1,57	0,92	3,81	2,43	4,68

θ , град	-1	-5	-15	-30	-45	-60	-75	-90
$\sigma_{\theta}^{(1)}/P_1$	7,45	5,76	1,88	0,44	0,03	-0,48	-0,11	-0,16
$\sigma_{\theta}^{(2)}/P_1$	1,12	0,82	0,02	0,15	-0,19	-0,16	-0,26	-0,20
$\sigma_p^{(2)}/P_1$	3,74	2,74	0,06	0,49	-0,65	-0,52	-0,86	-0,66

Функція напружень $\Psi(\zeta)$ визначається з контурної умови (1.4). Значення напружень в окремих контурних точках еліптичного кільця наведені вище. Ці значення одержані при розрахунку, який проводився на ЕОМ «Минск-22».

ЛІТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.
2. Мартинович Т. Л. Обобщение теоремы Бетти—Максвелла в двумерной теории упругости. Прикладная механика, т. II, в. 3, 1966.
3. Шереметьев М. П. Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1960.

УДК 593.3

Т. Л. МАРТИНОВИЧ, І. О. НИЩЕНКО

ПРО ОДИН СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ЗГИНУ АНІЗОТРОПНИХ ПЛИТ

Розглянемо тонку однорідну анізотропну плиту, серединна площина якої займає область S , обмежену простими гладкими замкнутими контурами L_1 та L_2 ($L = L_1 + L_2$). В кожній точці плити існує площина пружної симетрії, паралельна серединній площині плити.

1. Нехай внутрішній контур L_1 підкріплений тонким пружним стержнем постійного поперечного перерізу з жорсткістю A — на згин та жорсткістю $C = A/k$ — на кручення. Будемо вважати, що стержень спаяний з плитою до деформації і що одна з головних осей інерції поперечного перерізу стержня лежить в серединній площині плити. На стержень діють згинаючі моменти $m_1(s)$ та згинаючі зусилля $p_1(s)$, а на контурі L_2 — згинаючі моменти $m_2(s)$ та згинаючі зусилля $p_2(s)$.

Якщо область S необмежена, то контур L_2 віддалений в нескінченність. Під час обходу область S залишається зліва.

Щоб одержати граничні умови задачі, мислено відокремимо стержень від плити, а його дію на останню замінимо або зусиллями M_n , $N_n + \partial H_{sn}/\partial s$, або значеннями прогинів w та їх нормальної похідної $\partial w/\partial n$ точок контура L_1 . Відповідно до такої заміни для плити можна розв'язувати або першу основну задачу, граничні умови для якої згідно з [3] в диференціальній формі мають вигляд:

$$dV = d \left[\left(q_1 + i \frac{p_1}{\mu_1} \right) \varphi(z_1) + \left(\bar{q}_1 + i \frac{\bar{p}_1}{\bar{\mu}_1} \right) \overline{\varphi(z_1)} + \right. \\ \left. + \left(q_2 + i \frac{p_2}{\mu_2} \right) \psi(z_2) + \left(\bar{q}_2 + i \frac{\bar{p}_2}{\bar{\mu}_2} \right) \overline{\psi(z_2)} \right] = \begin{cases} -I_0(t) dt & \text{на } L_1; \\ -I_2(t) dt & \text{на } L_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

або основну змішану задачу, граничні умови для якої такі:

$$dU = d \left[(1 + i\mu_1) \varphi(z_1) + (1 + i\bar{\mu}_1) \overline{\varphi(z_1)} + (1 + i\mu_2) \psi(z_2) + \right. \\ \left. + (1 + i\bar{\mu}_2) \overline{\psi(z_2)} \right] = -id \left[i \left(\frac{\partial w}{\partial n} + i \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] \quad \text{на } L_1, \quad (1.2)$$

$$dV = -I_2(t) dt \quad \text{на } L_2.$$

Тут позначено

$$I_0(t) = M_n + i \int_{t_0}^t \left(N_n + \frac{\partial H_{sn}}{\partial s} \right) ds + iC_0,$$

$$I_j(t) = m_j(t) + i \int_{t_0}^t p_j(s) ds + iC_j \quad (j=1, 2, \dots),$$

μ_j — корені характеристичного рівняння, $z_j = x + \mu_j y$,

$$p_j = \frac{h^3}{12} (a_{11} + a_{12} \mu_j^2 + 2\mu_j a_{16}),$$

$$q_j = \frac{h^3}{12} (a_{12} + a_{22} \mu_j^2 + 2\mu_j a_{26}),$$

$a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{16}, a_{26}$ — пружні характеристики матеріалу плити [1].

Домножимо рівності (1.1), (1.2) та їм комплексно спряжені на довільну функцію $F(z)$, голоморфну в області S , і проінтегруємо вздовж відповідних контурів. В результаті одержимо граничні умови у вигляді контурних інтегралів, що містять довільну функцію $F(z)$:

$$\begin{aligned} \int_L F(t) dV &= - \int_{L_1} F(t) I_0(t) dt - \int_{L_2} F(t) I_2(t) dt, \\ \int_L \overline{F(t)} dV &= - \int_{L_1} \overline{F(t)} I_0(t) dt - \int_{L_2} \overline{F(t)} I_2(t) dt, \\ \int_{L_1} F(t) dU + \int_{L_2} F(t) dV &= -i \int_{L_1} F(t) d \left[i \left(\frac{\partial w}{\partial n} + i \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] - \int_{L_1} F(t) I_1(t) dt, \\ \int_{L_1} \overline{F(t)} dU + \int_{L_2} \overline{F(t)} dV &= -i \int_{L_1} \overline{F(t)} d \left[i \left(\frac{\partial w}{\partial n} + i \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] - \int_{L_1} \overline{F(t)} I_1(t) dt. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Розглядаючи рівновагу та деформацію елемента стержня, що знаходиться під дією внутрішніх згинаючих та скручуючих моментів L_n, L_τ , зусиль $M_n, N_n + \partial H_{sn}/\partial s$ з боку плити, зовнішніх згинаючих моментів $m_1(s)$ та згинаючих зусиль $p_1(s)$, можна встановити, згідно з [2, 4], такі залежності:

$$\begin{aligned} d[i(L_n + iL_\tau)] &= iI_0(t) dt - iI_1(t) dt, \\ d \left[i \left(\frac{\partial w}{\partial n} + i \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] &= \frac{i}{2A} [(1+k)(L_n + iL_\tau) + (1-k)(L_n - iL_\tau)] dt. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Підставляючи (1.4) в (1.3), одержуємо інтегральні співвідношення, які служать для визначення функцій $\varphi(z_1), \psi(z_2)$, а також внутрішніх моментів в стержні L_n, L_τ :

$$\begin{aligned} \int_L F(t) dV &= -i \int_{L_1} i(L_n + iL_\tau) dF(t) - \int_{L_1} F(t) I_1(t) dt - \int_{L_2} F(t) I_2(t) dt, \\ \int_L \overline{F(t)} dV &= -i \int_{L_1} i(L_n + iL_\tau) d\overline{F(t)} - \int_{L_1} \overline{F(t)} I_1(t) dt - \int_{L_2} \overline{F(t)} I_2(t) dt, \\ \int_{L_1} F(t) dU + \int_{L_2} F(t) dV &= - \int_{L_2} F(t) I_2(t) dt + \\ &+ \frac{1}{2A} \int_{L_1} F(t) [(1+k)(L_n + iL_\tau) + (1-k)(L_n - iL_\tau)] dt, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\int_{L_1} \overline{F(t)} dU + \int_{L_1} \overline{F(t)} dV = - \int_{L_1} \overline{F(t)} I_2(t) dt + \\ + \frac{1}{2A} \int_{L_1} \overline{F(t)} [(1+k)(L_n + iL_\tau) + (1-k)(L_n - iL_\tau)] dt.$$

2. Розглянемо задачу про згин моментами M_x^∞ , M_y^∞ , M_{xy}^∞ анізотропної плити з еліптичним отвором, край якого підкріплений пружним стержнем.

Будемо за вихідну брати область S , яка розміщена між двома співфокусними еліпсами L_1 , L_2 , причому L_2 віддалений в нескінченність.

Конформно відображаємо область S на кільце, яке розміщене між концентричними колами γ_1 , γ_2 радіусів $\varrho_1=1$, $\varrho_2=\infty$, поклавши

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad |m| < 1, \quad (2.1)$$

де

$$R = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad m = \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1}$$

a_1 , b_1 — півосі еліпса L_1 .

Тоді, очевидно, функції

$$z_j = \omega_j(\zeta_j) = \frac{1}{2} \left\{ [(1+m) - i(1-m)\mu_j] \zeta_j + [(1+m) + i(1-m)\mu_j] \frac{1}{\zeta_j} \right\} \quad (2.2)$$

будуть конформно переводити відповідні області зміни z_1 , z_2 на зовнішність одиничного кола γ_1 , причому для контурних точок γ_1 змінні ζ_1 , ζ_2 набувають одне й те ж значення $\sigma = e^{i\alpha}$.

Функції $\Phi(\zeta_1) = \varphi[\omega_1(\zeta_1)]$, $\Psi(\zeta_2) = \psi[\omega_2(\zeta_2)]$, $F_1(\zeta) = F[\omega(\zeta)]$, голоморфні зовні одиничного кола γ_1 , включаючи нескінченно віддалену точку, можна розкласти в ряди Лорана, а величину $L_n + iL_\tau$ — в комплексний ряд Фур'є:

$$\Phi(\zeta_1) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta_1^{-n}, \quad \Psi(\zeta_2) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \zeta_2^{-n}, \\ F_1(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \zeta^{-n}, \quad L_n + iL_\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \sigma^n. \quad (2.3)$$

Сталі A_0 , B_0 визначаються з умов на нескінченності [3]. Підставивши (2.1), (2.3) в співвідношення (1.5) та виконавши інтегрування, одержимо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів A_n , B_n , α_n .

Ця система має такий вигляд:

$$\left(q_1 - i \frac{p_1}{\mu_1} \right) A_{j+1} + \left(q_2 - i \frac{p_2}{\mu_2} \right) B_{j+1} = -\bar{H}_3 + \bar{Q}_3 \delta_{j1}, \\ \left(q_1 + i \frac{p_1}{\mu_1} \right) A_{j+1} + \left(q_2 + i \frac{p_2}{\mu_2} \right) B_{j+1} = H_4 - Q_4 \delta_{j1}, \\ (1 - i\mu_1) A_{j+1} + (1 - i\mu_2) B_{j+1} = (\bar{Q}_1 + \bar{Q}_3) \delta_{j1} - \bar{H}_1, \\ (1 + i\mu_1) A_{j+1} + (1 + i\mu_2) B_{j+1} = -(Q_2 + Q_4) \delta_{j1} + H_2, \\ (j=1, 2, 3, \dots). \quad (2.4)$$

Тут введені позначення:

$$Q_1 = \left[(1-q_1) + i \left(\mu_1 - \frac{p_1}{\mu_1} \right) \right] A_0 + \left[(1-q_2) + i \left(\mu_2 - \frac{p_2}{\mu_2} \right) \right] B_0,$$

$$Q_2 = \left[(\bar{q}_1 - 1) + \left(\bar{\mu}_1 - \frac{\bar{p}_1}{\bar{\mu}_1} \right) \right] \bar{A}_0 + \left[(\bar{q}_2 - 1) + i \left(\bar{\mu}_2 - \frac{\bar{p}_2}{\bar{\mu}_2} \right) \right] \bar{B}_0,$$

$$Q_3 = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{2} R, \quad Q_4 = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty}{2} R,$$

$$H_1 = 0,5A^{-1} [(1+k)(\alpha_{j-1} - m\alpha_{j+1}) + (1-k)(\bar{\alpha}_{-j+1} - m\bar{\alpha}_{-j-1})] R,$$

$$H_2 = 0,5A^{-1} [(1+k)(\alpha_{-j-1} - m\alpha_{-j+1}) + (1-k)(\bar{\alpha}_{j+1} - m\bar{\alpha}_{j-1})] R,$$

$$H_3 = -\frac{j}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n (P_{|n-j+1|} - mP_{|n-j-1|}),$$

$$H_4 = \frac{j}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n (P_{|n+j+1|} - mP_{|n+j-1|}),$$

$$P_l = \int_{\Gamma_1^+} \frac{\sigma^l d\sigma}{V(m-\sigma^2)(1-m\sigma^2)} = \begin{cases} -4m^{\frac{l}{2}} \int_0^1 \frac{x^l dx}{V(1-x^2)(1-m^2x^2)} & \text{при } l \text{ парному;} \\ 0 & \text{при } l \text{ непарному.} \end{cases}$$

$$\delta_{jn} = \begin{cases} 1 & (j=n) \\ 0 & (j \neq n) \end{cases}$$

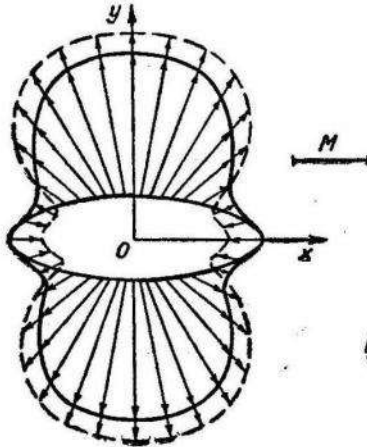


Рис. 1.

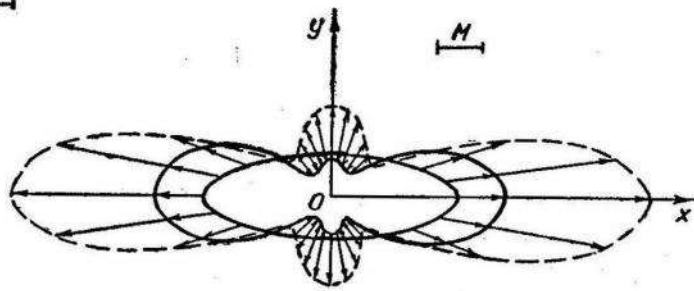


Рис. 2.

Виключивши з (2.4) A_{j+1} , B_{j+1} , дістанемо систему алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів α_n :

$$\begin{aligned} & \frac{[H_4(q_k \mu_k - ip_k) + \bar{H}_3(q_k \mu_k + ip_k)] \mu_1 \mu_2}{\mu_k (q_1 \mu_1 p_2 - q_2 \mu_2 p_1)} - \frac{\bar{H}_1(1+i\mu_k) + H_2(1-i\mu_k)}{(\mu_2 - \mu_1)} = \\ & = \left\{ \frac{[\bar{Q}_3(q_k \mu_k + ip_k) + Q_4(q_k \mu_k - ip_k)] \mu_1 \mu_2}{\mu_k (q_1 \mu_1 p_2 - q_2 \mu_2 p_1)} - \frac{Q_3(1+i\mu_k) + Q_4(1-i\mu_k)}{\mu_2 - \mu_1} - \right. \\ & \left. - \frac{\bar{Q}_1(1+i\mu_k) + Q_2(1-i\mu_k)}{\mu_2 - \mu_1} \right\} \delta_{j1}, \quad (k=1, 2), \quad (j=1, 2, 3, \dots). \quad (2.5) \end{aligned}$$

Для числового аналізу нами розв'язувалась укорочена система рівнянь (2.5) для анізотропної плити, виготовленої з авіаційної фанери, що має пружні характеристики [1]: $D_1 = 1,70 \cdot 10^5 \frac{h^3}{12}$, $D_2 = 0,14 \cdot 10^5 \frac{h^3}{12}$, $D_3 = 0,183 \cdot 10^5 \frac{h^3}{12}$, $D_4 = 0,07 \cdot 10^5 \frac{h^3}{12}$, $\nu_1 = 0,31$, $\nu_2 = 0,026$, $\mu_1 = 1,04 + 1,55i$, $\mu_2 = -1,04 + 1,55i$.

Крім того, було прийнято: $A = 2,00 \cdot 10^5 \frac{h^3}{12}$, $R = 10$, $k = 1$, $m = 0.5$.

Розподіл згинаючих моментів M_x вздовж лінії спаю підкріплюючого стержня з плитою показано на рисунках, причому рис. 1 відповідає випадку $M_x^\infty = M$, $M_y^\infty = H_{xy}^\infty = 0$, а рис. 2 — $M_x^\infty = H_{xy}^\infty = 0$, $M_y^\infty = M$. Пунктирною лінією показано розподіл тих же моментів в плиті без підкріплення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лехницький С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехтеориздат, М., 1957.
2. Лурье А. И. О малых деформациях криволинейных стержней. Труды Ленинградского политехнического ин-та, раздел физико-матем. наук, № 3, 1941.
3. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. Гостехтеориздат, 1951.
4. Шереметьев М. П. Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львовского ун-та, 1960.

УДК 539.311

Є. І. ЛУНЬ, А. О. СЯСЬКИЙ

ДО ВИЗНАЧЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ЖОРСТКОГО КІЛЬЦЯ НА ПОВЕРХНІ КРУГОВОГО ЦИЛІНДРА

Задача про концентрацію напружень в циліндричній оболонці з круговим отвором, край якого підкріплений жорстким кільцем, розглядалась в працях [7, 4] методом А. І. Лур'є [3] з використанням рівнянь класичної теорії оболонок.

В цій статті дається розв'язок цієї задачі при використанні рівнянь уточненої теорії оболонок типу Тимошенка [1, 2, 8], які певним чином враховують деформації поперечних зсувів і забезпечують можливість задовольнити п'ятьом граничним умовам на контурі отвору.

Розглянемо кругову циліндричну оболонку товщиною $2h$, радіусом R з круговим отвором, підкріпленим жорстким кільцем.

На середній поверхні оболонки вибираємо декартову (X, Y) і полярну півгеодезичну (ρ, λ) системи координат, початок яких збігається з центром отвору. Вісь OX направлена по твірній, вісь OY — по дотичній до напрямної, кут λ відраховується від твірної. Основний напружений стан задається зусиллями:

$$\begin{aligned} T_p^0 &= h(p+q) + h(p-q) \cos 2\lambda; \\ T_\lambda^0 &= h(p+q) - h(p-q) \cos 2\lambda; \\ S_{p\lambda}^0 &= -h(p-q) \sin 2\lambda. \end{aligned} \quad (1)$$

Для знаходження додаткового напруженого стану, викликаного наявністю отвору, використаємо ключові рівняння теорії типу Тимошенка пологих оболонок [1, 2]

$$\Delta \Delta \sigma + \frac{i \sqrt{3(1-\nu^2)}}{Rh} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0, \\ \Delta \psi - \frac{2}{(1-\nu) \varepsilon} \psi = 0, \quad (2)$$

де

$$\sigma = \frac{2Eh^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} w - i\varphi; \\ \varepsilon = \frac{h^2}{3k'(1-\nu^2)G_n} E, \quad (3)$$

φ — функція напружень, ψ — функція, через яку виражаються кути повороту нормалі до серединної поверхні, w — нормальний прогин оболонки, k' — коефіцієнт зсуву.

Порядок системи диференціальних рівнянь (2) дає змогу у випадку, що розглядається, задовольнити на контурі отвору при $q=q_0$ п'ятьом граничним умовам:

$$u_p^* = u_p + u_p^0 = 0, \quad u_\lambda^* = u_\lambda + u_\lambda^0 = 0, \quad w = w_0 \cos \left(\frac{\rho_0}{R} \sin \lambda \right), \quad (4) \\ \gamma_p = 0, \quad \gamma_\lambda = 0,$$

де u_p^0, u_λ^0 — складові відповідних величин від основного напруженого стану; $u_p, u_\lambda, w, \gamma_p, \gamma_\lambda$ — складові відповідних величин, викликані наявністю отвору; w_0 — переміщення центра кільця в напрямі нормалі до середньої поверхні оболонки.

Із лівих частин перших двох умов із (4) складаємо такі лінійні комбінації, які з врахуванням формул Коші та співвідношень пружності виражаються через тангенціальні зусилля і нормальний прогин оболонки. Отже, граничні умови задачі (4) замінюються такими:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u_\lambda^*}{\partial \lambda} + u_p^* \right) = \frac{1}{2Eh} (T_\lambda^* - \nu T_p^*) - \frac{w^*}{R} \cos^2 \lambda = 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left(u_\lambda^* - \frac{\partial u_p^*}{\partial \lambda} \right) = \frac{1}{2Eh} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[(1+\nu)(T_\lambda^* - T_p^*) + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (T_\lambda^* - \nu T_p^*) - \right. \quad (5) \\ \left. - 2(1+\nu) \frac{\partial}{\partial \lambda} S_{p\lambda}^* \right] + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{w^*}{R} \cos 2\lambda + \frac{1}{R} \frac{\partial w^*}{\partial \lambda} \sin 2\lambda - \frac{\rho}{R} \frac{\partial w^*}{\partial \rho} \cos^2 \lambda \right] = 0, \\ w^* = w_0 \cos \left(\frac{\rho_0}{R} \sin \lambda \right), \\ \gamma_p = \gamma_\lambda = 0.$$

Вирази для зусиль та моментів через функції $\sigma(q, \lambda)$ та $\psi(q, \lambda)$ подано в [2]. Для кутів повороту нормалі маємо формули:

$$\gamma_p = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \frac{\partial f}{\partial \rho}, \quad \gamma_\lambda = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \lambda}, \quad (6)$$

де

$$f = w + \varepsilon \Delta w - \frac{\varepsilon^2}{D} \Delta_k \varphi. \quad (7)$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (2), який задовольняє умовам симетрії і зникає при $\rho \rightarrow \infty$, можна взяти у вигляді [5, 6]

$$\begin{aligned}\sigma(\rho, \lambda) &= \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-1)^m \cos 2m\lambda \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(\alpha\rho) [J_{n-2m}(\alpha\rho) + J_{n+2m}(\alpha\rho)], \\ \psi(\rho, \lambda) &= \sum_{m=1}^{\infty} D_{2m} K_{2m} \left(\sqrt{\frac{2}{(1-\nu)\epsilon}} \rho \right) \sin 2m\lambda,\end{aligned}\quad (8)$$

де $C_n = A_n + i B_n$ — комплексні сталі; D_{2m} — дійсні сталі; J_n — функція Бесселя першого роду; $H_n^{(1)}$ — перша функція Ганкеля; K_{2m} — модифікована функція Бесселя другого роду;

$$\alpha = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{2\sqrt{2Rh}}(1+i), \quad \epsilon_m = \begin{cases} 1/2 & m=0; \\ 1 & m \neq 0. \end{cases}$$

Підставивши розв'язки в формі (8) в граничні умови (5), враховуючи при цьому (3) та (7), дістаємо

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} a_m(\rho) \cos 2m\lambda + \frac{1}{2Eh} (T_\lambda^0 - \nu T_\rho^0) &= 0, \\ \sum_{m=1}^{\infty} b_m(\rho) \sin 2m\lambda + \frac{1}{2Eh} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[(1+\nu)(T_\lambda^0 - T_\rho^0) + \right. \\ \left. + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (T_\lambda^0 - \nu T_\rho^0) - 2(1+\nu) \frac{\partial}{\partial \lambda} S_{\rho\lambda}^0 \right] &= 0, \\ \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\rho) \cos 2m\lambda &= w_0 \cos \left(\frac{\rho_0}{R} \sin \lambda \right), \\ \sum_{m=0}^{\infty} d_m(\rho) \cos 2m\lambda &= 0, \\ \sum_{m=1}^{\infty} e_m(\rho) \sin 2m\lambda &= 0,\end{aligned}\quad (9)$$

де $a_m(\rho), \dots, e_m(\rho)$ — ряди, які містять сталі A_n, B_n і D_{2m} . Загальні члени цих рядів не наводимо внаслідок їх громіздкості. Враховуючи вирази (1), умови (9) дамо у вигляді

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} a_m(\rho) \cos 2m\lambda &= -\frac{1}{2Eh} [(1-\nu)(p+q)h + (1+\nu)(p-q)h \cos 2\lambda], \\ \sum_{m=1}^{\infty} b_m(\rho) \sin 2m\lambda &= \frac{2}{Eh} (1+\nu)(p-q)h \sin 2\lambda, \\ \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\rho) \cos 2m\lambda &= w_0 \left[J_0\left(\frac{\rho_0}{R}\right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}\left(\frac{\rho_0}{R}\right) \cos 2m\lambda \right], \\ \sum_{m=0}^{\infty} d_m(\rho) \cos 2m\lambda &= 0, \\ \sum_{m=1}^{\infty} e_m(\rho) \sin 2m\lambda &= 0.\end{aligned}\quad (10)$$

В (10) права частина третьої умови розкладена в ряд Фур'є. Зрівнявши в рівностях (10) коефіцієнти при однакових $\cos 2m\lambda$ та $\sin 2m\lambda$, одержимо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення сталих, які входять в розв'язок задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лунь Є. І. Спрощення основних рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-матем., в. 3. Вид-во Львівського ун-ту. Львів, 1967.
2. Лунь Є. І. До визначення концентрації напружень біля кругового отвору в циліндричній оболонці. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-матем., в. 4. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1969.
3. Лур'є А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
4. Пирогов И. М. Концентрация напряжений в области жесткого кольца на поверхности кругового цилиндра. Сборник статей Всесоюзного заочного политехнического института, 16, 1957.
5. Приварников А. К., Чехов В. М. Концентрация напружень навколо кругового отвору в циліндричній оболонці. ДАН УРСР, 1965, № 12.
6. Савін Г. М., Гузь О. М. До питання про концентрацію напружень навколо отворів у циліндричній оболонці. ДАН УРСР, 1964, № 11.
7. Шевляков Ю. А. Концентрация напружень в циліндричній оболонці з круговим вирізом на боковій поверхні. ДАН УРСР, 1965, № 2.
8. Шереметев М. П., Лунь Е. И. Уточнение линейной моментной теории тонких оболочек. Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Ереван, 1962.

УДК 539.311

Д. В. ГРИЛИЦЬКИЙ, Б. І. ПОПОВИЧ

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ПРО ПРУЖНУ ВЗАЄМОДІЮ АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З КРУГЛИМ ІЗОТРОПНИМ ЯДРОМ

1. Задача про визначення пружної рівноваги необмеженої анізотропної пластинки з впаяним круглим ізотропним ядром при дії зосереджених силових або моментних факторів розв'язана Г. М. Савіним і Д. В. Грилицьким [4] при допущенні, що ядро спаяне з пластинкою по всьому обводу.

В даній роботі розглядається ця задача при умові, що колова лінія спаю послаблена декількома (наприклад, « m ») вільними від зовнішніх напружень розрізами, а напружений стан викликається силою і моментом, які прикладені в області пластинки. При цьому вважаємо, що береги розрізів не контактують в процесі деформації; товщина ядра рівна товщині пластинки, яка має в кожній точці площину пружної симетрії, паралельну до серединної площини. Сукупність розрізів позначимо через γ'' ($\gamma'' = \gamma_1'' + \gamma_2'' + \dots + \gamma_m''$), а сукупність дуг спаю ядра з пластинкою — через γ' ($\gamma' = \gamma_1' + \gamma_2' + \dots + \gamma_m'$).

Будемо користуватися декартовою системою координат з початком в центрі ядра, радіус якого прийемо рівним одиниці ($\gamma' + \gamma'' = \gamma$ — одиничне коло).

Точку прикладення зосередженої сили з компонентами X, Y позначимо через $z_0^{(1)} = x_0^{(1)} + iy_0^{(1)}$, зосередженого моменту M — через $z_0^{(2)} = x_0^{(2)} + iy_0^{(2)}$. Згідно з постановкою задачі $|z_0^{(1)}| \geq 1, |z_0^{(2)}| \geq 1$.

Треба визначити напружений стан у пластинці та ядрі, зокрема напруження на коловій лінії розділу матеріалів.

При розв'язуванні задачі відокремимо ядро від пластинки і розглянемо окремо пружну рівновагу ядра і пружну рівновагу пластинки з круглим отвором, замінивши дію їх одне на друге на лініях спаю

шуканими контактними напруженнями σ_r і $\tau_{r\varphi}$, які визначаються із умови рівності зміщень на дугах спаю.

Граничні умови першої основної задачі для ядра мають вигляд [2]

$$\begin{aligned}\Phi_{01}(t) + \overline{\Phi_{01}(t)} - \frac{1}{t} \overline{\Phi'_{01}(t)} - \frac{1}{t^2} \overline{\Psi_{01}(t)} &= \begin{cases} \sigma_r(t) + i\tau_{r\varphi}(t) & (t \in \gamma'), \\ 0 & (t \in \gamma''), \end{cases} \\ \Phi_{01}(t) + \overline{\Phi_{01}(t)} - t\Phi'_{01}(t) - t^2\Psi_{01}(t) &= \begin{cases} \sigma_r(t) - i\tau_{r\varphi}(t) & (t \in \gamma'), \\ 0 & (t \in \gamma''). \end{cases} \quad (1.1)\end{aligned}$$

В нашому випадку функції напружень $\Phi_{01}(t)$ і $\Psi_{01}(t)$ — голоморфні всередині одиничного кола.

З умов (1.1) визначаємо:

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(t) dt}{t-\zeta} - i\overline{A_0}\zeta; \quad (1.2)$$

$$\Psi_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{\overline{f(t)} dt}{t-\zeta} + \frac{1}{\pi i \zeta^2} \int_{\gamma'} \frac{f(t) dt}{t-\zeta} - \frac{1}{2\pi i \zeta} \int_{\gamma'} \frac{f(t) dt}{(t-\zeta)^2} - i \frac{A_0 + \overline{A_0}}{\zeta},$$

де позначено

$$\Phi_1(\zeta) = i\zeta\Phi_{01}(\zeta); \quad \Psi_1(\zeta) = i\zeta\Psi_{01}(\zeta); \quad f(t) = it[\sigma_r(t) + i\tau_{r\varphi}(t)]. \quad (1.3)$$

$$A_0 = -i\Phi_1'(0). \quad (1.4)$$

Граничні умови першої основної задачі для анізотропної пластинки запишуться [1, 5]

$$\begin{aligned}2 \operatorname{Re} [\varphi_2(z_1) + \psi_2(z_2)] &= - \int_0^s Y_n ds + C_1, \\ 2 \operatorname{Re} [s_1\varphi_2(z_1) + s_2\psi_2(z_2)] &= \int_0^s X_n ds + C_2.\end{aligned} \quad (1.5)$$

Функції напружень φ_2 і ψ_2 у розглядуваному випадку мають вигляд [4]

$$\begin{aligned}\varphi_2(z_1) &= A^{(1)} \ln(z_1 - z_{01}^{(1)}) + \frac{a_0^{(1)}}{z_1 - z_{01}^{(2)}} + \varphi_{02}(z_1), \\ \psi_2(z_2) &= A^{(2)} \ln(z_2 - z_{02}^{(1)}) + \frac{a_0^{(2)}}{z_2 - z_{02}^{(2)}} + \psi_{02}(z_2),\end{aligned} \quad (1.6)$$

де $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ — параметри, які залежать від величини сили; $a_0^{(1)}$, $a_0^{(2)}$ — параметри, які залежать від величини моменту; $\varphi_{02}(z_1)$ і $\psi_{02}(z_2)$ — голоморфні функції своїх змінних; $z_{0k}^{(j)} = x_0^{(j)} + s_k y_0^{(j)}$ ($k, j = 1, 2, \dots$).

Із граничних умов (1.5) знаходимо:

$$\begin{aligned}\Phi_2(\zeta_1) &= F_1(\zeta_1) + \frac{1}{4\pi i (s_2 - s_1)} \int_{\gamma'} \frac{(i - s_2) \overline{f(t)} - (i + s_2) f(t)}{t - \zeta_1} dt, \\ \Psi_2(\zeta_2) &= F_2(\zeta_2) - \frac{1}{4\pi i (s_2 - s_1)} \int_{\gamma'} \frac{(i - s_1) \overline{f(t)} - (i + s_1) f(t)}{t - \zeta_2} dt.\end{aligned} \quad (1.7)$$

В формулах (1.7) введені позначення:

$$\Phi_2(\zeta_1) = i\zeta_1 \frac{d}{d\zeta_1} [\omega_1(\zeta_1)]; \quad \Psi_2(\zeta_2) = i\zeta_2 \frac{d}{d\zeta_2} [\omega_2(\zeta_2)]. \quad (1.8)$$

$$z_k = \omega_k(\zeta_k) = \frac{1}{2} \left[(1 - i s_k) \zeta_k + (1 + i s_k) \frac{1}{\zeta_k} \right] \quad (k=1, 2). \quad (1.9)$$

$$F_1(\zeta_1) = \frac{i A^{(1)} \zeta_1}{\zeta_1 - \zeta_{01}^{(1)}} - \frac{i B^{(1)} \zeta_1}{(\zeta_1 - \zeta_{01}^{(2)})^2} - \frac{i}{s_2 - s_1} \left[\sum_{k=1}^2 (\bar{s}_k - s_2) \left(\frac{\overline{A^{(k)}}}{1 - \zeta_1 \overline{\zeta_{0k}^{(1)}}} - \frac{\overline{B^{(k)}}}{(1 - \zeta_1 \overline{\zeta_{0k}^{(2)}})^2} \right) \right], \quad (1.10)$$

$$F_2(\zeta_2) = \frac{i A^{(2)} \zeta_2}{\zeta_2 - \zeta_{02}^{(1)}} - \frac{i B^{(2)} \zeta_2}{(\zeta_2 - \zeta_{02}^{(2)})^2} + \frac{i}{s_2 - s_1} \left[\sum_{k=1}^2 (\bar{s}_k - s_1) \left(\frac{\overline{A^{(k)}}}{1 - \zeta_2 \overline{\zeta_{0k}^{(1)}}} - \frac{\overline{B^{(k)}}}{(1 - \zeta_2 \overline{\zeta_{0k}^{(2)}})^2} \right) \right],$$

де

$$B^{(k)} = \frac{2a_0^{(k)} [\zeta_{0k}^{(2)}]^2}{(1 - i s_k) [\zeta_{0k}^{(2)}]^2 - (1 + i s_k)}; \quad \zeta_{0k}^{(j)} = \frac{z_{0k}^{(j)} + \sqrt{[z_{0k}^{(j)}]^2 - (1 + s_k^2)}}{1 - i s_k} \quad (k, j=1, 2). \quad (1.11)$$

2. Задовольняючи умовам рівності на γ' похідних від зміщень по дуговій координаті φ , одержимо систему двох сингулярних інтегральних рівнянь відносно двох шуканих функцій $f(\sigma)$ і $\bar{f}(\sigma)$

$$\begin{aligned} \frac{b_0}{\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(t) dt}{t - \sigma} - \frac{\bar{b}_0}{\pi i} \int_{\gamma'} \frac{\bar{f}(t) dt}{t - \sigma} - [a f(\sigma) + \bar{a} \bar{f}(\sigma)] &= G_1(\sigma), \\ \frac{d_0}{\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(t) dt}{t - \sigma} + \frac{\bar{d}_0}{\pi i} \int_{\gamma'} \frac{\bar{f}(t) dt}{t - \sigma} - [c f(\sigma) - \bar{c} \bar{f}(\sigma)] &= G_2(\sigma) \end{aligned} \quad (2.1)$$

($\sigma \in \gamma'$).

В рівняннях (2.1) позначено:

$$\begin{aligned} G_1(\sigma) &= \frac{i(1+x)}{\mu} \left(\frac{A_0}{\sigma} - \bar{A}_0 \sigma \right) - 4 \sum_{k=1}^2 \left[\frac{A_1^{(k)} \sigma}{\sigma - \zeta_{0k}^{(1)}} + \frac{\overline{A_1^{(k)}}}{1 - \sigma \overline{\zeta_{0k}^{(1)}}} - \frac{B_1^{(k)} \sigma}{(\sigma - \zeta_{0k}^{(2)})^2} - \frac{\overline{B_1^{(k)}} \sigma}{(1 - \sigma \overline{\zeta_{0k}^{(2)}})^2} \right], \\ G_2(\sigma) &= - \frac{i(1+x)}{\mu} \left(\frac{A_0}{\sigma} + \bar{A}_0 \sigma \right) - \\ &- 4 \sum_{k=1}^2 \left[\frac{i A_2^{(k)} \sigma}{\sigma - \zeta_{0k}^{(1)}} + \frac{i \overline{A_2^{(k)}}}{1 - \sigma \overline{\zeta_{0k}^{(1)}}} - \frac{i B_2^{(k)} \sigma}{(\sigma - \zeta_{0k}^{(2)})^2} - \frac{i \overline{B_2^{(k)}} \sigma}{(1 - \sigma \overline{\zeta_{0k}^{(2)}})^2} \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

де

$$\begin{aligned} A_1^{(k)} &= i A^{(k)} \left[p_k + \frac{\bar{p}_1 (s_k - \bar{s}_2) - \bar{p}_2 (s_k - \bar{s}_1)}{\bar{s}_2 - \bar{s}_1} \right]; \\ A_2^{(k)} &= i A^{(k)} \left[q_k + \frac{\bar{q}_1 (s_k - \bar{s}_2) - \bar{q}_2 (s_k - \bar{s}_1)}{\bar{s}_2 - \bar{s}_1} \right]. \end{aligned} \quad (k=1, 2) \quad (2.3)$$

$B_1^{(k)}$ і $B_2^{(k)}$ визначаються, відповідно, першою і другою формулами (2.3), в яких $A^{(k)}$ замінено на $B^{(k)}$;

$$\begin{aligned} a &= \frac{x-1}{2\mu} - \frac{p_1(i+s_2) + p_2(i+s_1)}{s_2 - s_1} - \frac{\bar{p}_1(i+\bar{s}_2) - \bar{p}_2(i+\bar{s}_1)}{\bar{s}_2 - \bar{s}_1}, \\ b_0 &= - \frac{x+1}{2\mu} - \frac{p_1(i+s_2) + p_2(i+s_1)}{s_2 - s_1} + \frac{\bar{p}_1(i+\bar{s}_2) - \bar{p}_2(i+\bar{s}_1)}{\bar{s}_2 - \bar{s}_1}, \end{aligned}$$

$$c = \frac{x-1}{2\mu} + \frac{q_1(1-is_2)-q_2(1-is_1)}{s_2-s_1} + \frac{\bar{q}_1(1-i\bar{s}_2)-\bar{q}_2(1-i\bar{s}_1)}{\bar{s}_2-\bar{s}_1}, \quad (2.4)$$

$$d_0 = -\frac{x+1}{2\mu} + \frac{q_1(1-is_2)-q_2(1-is_1)}{s_2-s_1} - \frac{\bar{q}_1(1-i\bar{s}_2)-\bar{q}_2(1-i\bar{s}_1)}{\bar{s}_2-\bar{s}_1};$$

p_k, q_k ($k=1,2$) — відомі параметри [1, 5].

Система сингулярних інтегральних рівнянь (2.1) розв'язується в замкнутому вигляді. $2m$ невідомих сталих, які ввійшли в розв'язок системи, визначаються з умови однозначності зміщень на кожному із розрізів γ_j ($j=1, 2, \dots, m$)

$$\int_{\gamma_j} \frac{\frac{\partial}{\partial \varphi} [u_2(\sigma) - u_1(\sigma)]}{\sigma} d\sigma = 0, \quad \int_{\gamma_j} \frac{\frac{\partial}{\partial \varphi} [v_2(\sigma) - v_1(\sigma)]}{\sigma} d\sigma = 0, \quad (2.5)$$

де u_1, v_1 і u_2, v_2 — декартові компоненти вектора переміщень в ядрі і, відповідно, в пластинці.

На основі розв'язку системи рівнянь (2.1) визначаються функції напружень як в ядрі, так і в пластинці, а також контактні напруження.

Для визначення постійної A_0 служить рівність (1.4).

3. Розглянемо випадок одного розрізу на лінії спаю. Запишемо для цього випадку остаточні вирази для функцій напружень в ядрі і шайбі

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \sum_{k=1}^2 \lambda_k \cdot W_k(\zeta) - i \bar{A}_0 \zeta, \quad (3.1)$$

$$\Psi_1(\zeta) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \sum_{k=1}^2 \left\{ \left[(-1)^k + \frac{\lambda_k}{\zeta^2} \right] \cdot W_k(\zeta) - \frac{\lambda_k}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} W_k(\zeta) \right\} - i \frac{A_0 + \bar{A}_0}{\zeta}.$$

$$\Phi_2(\zeta_1) = F_1(\zeta_1) + \frac{1}{2(s_2 - s_1)(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=1}^2 [(-1)^k (i - s_2) - \lambda_k (i + s_2)] W_k(\zeta), \quad (3.2)$$

$$\Psi_2(\zeta_2) = F_2(\zeta_2) - \frac{1}{2(s_2 - s_1)(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=1}^2 [(-1)^k (i - s_1) - \lambda_k (i + s_1)] W_k(\zeta).$$

В формулах (3.1), (3.2) позначено:

$$W_k(\zeta) = v_k(\zeta) - X_{0k}(\zeta) [\Omega_k(\zeta) - D_0^{(k)}] \quad (k=1, 2). \quad (3.3)$$

$$v_k(\zeta) = \frac{1}{2R_k} [G_1(\zeta) + N_k G_2(\zeta)] \quad (k=1, 2); \quad \lambda_1 = d_2; \quad \lambda_2 = -d_1. \quad (3.4)$$

$\Omega_k(\zeta)$ дорівнює сумі головних частин полюсів функції $\frac{v_k(\zeta)}{X_{0k}(\zeta)}$ в точках $\zeta_{0k}^{(j)}$, $\frac{1}{\zeta_{0k}^{(j)}}$, 0, ∞ .

Під функцією

$$X_{0k}(\zeta) = (\zeta - e^{i\theta})^{-\frac{1}{2} + i\beta_k} (\zeta - e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2} - i\beta_k} \quad (k=1, 2) \quad (3.5)$$

розуміється та вітка, яка при великих $|\zeta|$ має розклад

$$X_{0k}(\zeta) = \frac{1}{\zeta} + \frac{a_{-2}^{(k)}}{\zeta^2} + \dots;$$

$$\beta_k = \frac{\ln g_k}{2\pi}, \quad g_k = \frac{R_k + Q_k}{R_k - Q_k}, \quad R_k = b_0 + N_k d_0, \quad Q_k = a + N_k c; \quad (k=1, 2) \quad (3.6)$$

Θ — центральний кут, що визначає положення дуги γ'' .

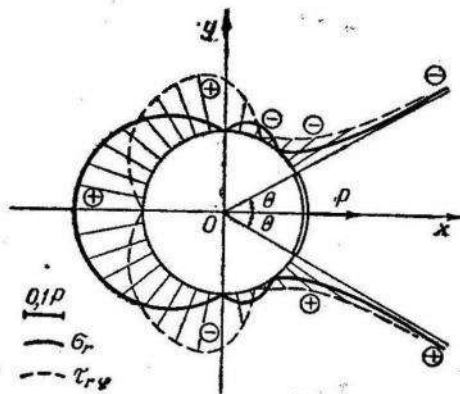


Рис. 1.

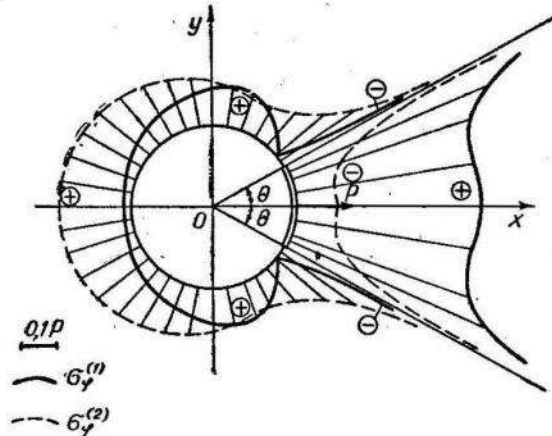


Рис. 2.

Параметри N_k і d_k ($k=1,2$) визначаються із співвідношення:

$$\frac{b_0 + Nd_0}{-(b_0 - Nd_0)} = \frac{a + Nc}{a - Nc} = \frac{1}{d}. \quad (3.3)$$

$D_0^{(k)}$ визначається по формулі

$$D_0^{(k)} = \lim_{|\zeta| \rightarrow 0} \left[\Omega_k(\zeta) - \frac{\gamma_k(\zeta)}{X_{0k}(\zeta)} \right] \quad (k=1, 2). \quad (3.8)$$

Контактні напруження визначаються з допомогою формул:

$$\sigma_r(t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \sum_{k=1}^2 \frac{\lambda_k (1 + g_k)}{g_k \cdot t} X_{0k}^+(t) [\Omega_k(t) - D_0^{(k)}] \right\}, \quad (t \in \gamma')$$

$$\tau_{r\varphi}(t) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{i}{\lambda_1 + \lambda_2} \sum_{k=1}^2 \frac{\lambda_k (1 + g_k)}{g_k \cdot t} X_{0k}^+(t) [\Omega_k(t) - D_0^{(k)}] \right\}. \quad (3.9)$$

4. На рис. 1 і 2 показані графіки розподілу контактних і відповідно кільцевих напружень на коловій лінії розділу алюмінієвої шайби (ядра) і пластинки з текстоліту СВМ із зв'язуючим БФ-4 [3] при наявності одного розрізу, який характеризується центральним кутом $2\Theta = 60^\circ$, при дії сили P , прикладеної в точці пластинки $z_0^{(1)} = x_0^{(1)} = 1$ і направленої вздовж осі Ox .

Кільцеві напруження в ядрі позначені через $\sigma_\varphi^{(1)}$, в пластинці — через $\sigma_\varphi^{(2)}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лехницький С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1957.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.

3. Рабинович А. Л., Верховский И. А. Об упругих постоянных ориентированных стеклопластиков. Инж. ж., 1964, т. IV, в. 1.

4. Савин Г. Н., Грилицкий Д. В. Об определении напряженного состояния в анизотропной пластинке с упругим ядром. «Прикладная механика», 1965, т. I, в. 1.

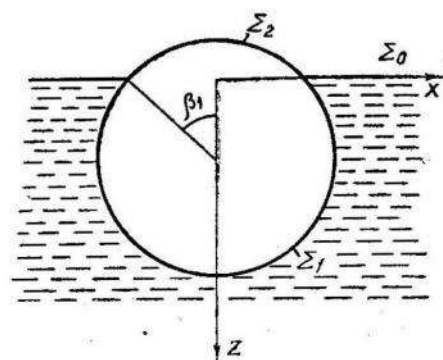
5. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. «Наукова думка», Киев, 1968.

УДК 533.6.013.42

О. В. БЛАЖИВСЬКА

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ЗАМКНЕНОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ НА ПОВЕРХНІ РІДИНИ

Розглянемо замкнену пружну сферичну оболонку, яка плаває на поверхні рідини так, що площина плавання розміщується на довільній, меншій від радіуса оболонки віддалі від екваторіальної площини оболонки (див. рисунок).



Вважаючи, що рідина ідеальна та нестислива, а оболонка — безмоментна та безінерційна, будемо досліджувати власні малі коливання оболонки. Хвильовим рухом на вільній поверхні рідини нехтуватимемо.

Введемо тороїдальні координати α, β, φ , які зв'язані з декартовими координатами x, y, z , співвідношеннями [5]

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \alpha \cos \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}; \quad y = \frac{a \operatorname{sh} \alpha \sin \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta};$$

$$z = \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta},$$

де a — радіус ватерлінії.

В цих координатах вільна поверхня рідини Σ_0 є координатною поверхнею $\beta=0$; поверхня випромінювання Σ_1 є координатною поверхнею $\beta=\beta_1$ ($0 < \beta_1 \leq \frac{\pi}{2}$); незанурена в рідину поверхня оболонки Σ_2 є координатною поверхнею $\beta=\beta_2=-\pi+\beta_1$.

В об'ємі, який займає рідина, координата α змінюється в інтервалі $[0, \infty]$, координата φ , яка є звичайним полярним кутом, — в інтервалі $[-\pi, \pi]$; координата β — в інтервалі $[0, \beta_1]$. Безмежно віддаленій точці відповідають координати $\alpha=0, \beta=0$.

Розглянемо гармонійні коливання, при яких динамічні нормальні переміщення оболонки w^* та потенціал швидкостей рідини Φ^* зображуються у вигляді

$$w^*(\alpha, \varphi, t) = w(\alpha, \varphi) e^{i\omega t}; \quad \Phi^*(\alpha, \beta, \varphi, t) = \Phi(\alpha, \beta, \varphi) e^{i\omega t}.$$

У лінійній постановці розглядувана задача зводиться до розв'язання рівнянь руху оболонки, які на основі [1] можна записати у вигляді

$$(\nabla^2 + 1 - \nu) \left(w_i - \frac{R^2}{Eh} z_i \right) = -(1 + \nu) w_i \quad (i=1,2), \quad (1)$$

та до знаходження розв'язків рівняння руху рідини [3]

$$\Delta \Phi = 0, \quad (2)$$

що задовольняють такі умови:

$$\Phi = 0 \text{ на } \Sigma_0; \quad (3)$$

$$\frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = -i\omega\omega_1 \quad \text{на } \Sigma_1, \quad (4)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0 \quad \beta \rightarrow 0} \operatorname{grad} \Phi = 0, \quad (5)$$

де R — радіус сфери; h — товщина оболонки; E — модуль пружності; ν — коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки; $Z_1 = i\rho\omega\Phi(\alpha, \beta_1, \varphi)$ та $Z_2 = 0$ — амплітуди сил, що діють по зовнішній нормалі до поверхні Σ_1 та Σ_2 відповідно; $Z_1|_{\alpha=\infty} = Z_2$; ρ — густина рідини; ω_1 та ω_2 — амплітуди нормальних динамічних зміщень оболонки Σ_1 та Σ_2 ;

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$\nabla_i^2 = \frac{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta_i)^2}{\operatorname{sh} \alpha \sin^2 \beta_i} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (i=1, 2). \quad (6)$$

При цьому амплітуди дотичних переміщень u_i , v_i та зусиль N_i , S_i на лініях $\alpha = \operatorname{const}$ поверхонь Σ_i ($i=1, 2$) визначаються такими формулами:

$$u_i = \frac{R^2}{a} (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta_i) \left[\frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \frac{\partial x_i}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\omega_i - \frac{R^2}{Eh} Z_i \right) \right];$$

$$v_i = \frac{R^2}{a} (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta_i) \left[-\frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{1}{R \operatorname{sh} \alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\omega_i - \frac{R^2}{Eh} Z_i \right) \right]; \quad (7)$$

$$N_i = -\frac{Eh}{1+\nu} \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta_i}{a \operatorname{sh} \alpha} \frac{\partial v_i}{\partial \varphi} + \frac{1 - \operatorname{ch} \alpha \cos \beta_i}{a \operatorname{sh} \alpha} u_i + \frac{1}{R} \left(\omega_i - \frac{R^2}{Eh} Z_i \right) \right];$$

$$S_i = \frac{Eh}{1+\nu} \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta_i}{a \operatorname{sh} \alpha} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} - \frac{1 - \operatorname{ch} \alpha \cos \beta_i}{a \operatorname{sh} \alpha} v_i + x_i \right].$$

Тут x_i — нормальне кручення оболонки, що знаходиться з рівняння $(\nabla_i^2 + 2)x_i = 0$.

Розв'язок рівняння (2), який задовольняє умову (5) і обмежений при $\alpha = \infty$, набирає вигляду [5]

$$\Phi = \sqrt{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \sum_{m=0}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^{\infty} [A_m(\tau) \operatorname{ch}(\beta\tau) + B_m(\tau) \operatorname{sh}(\beta\tau)] P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad (8)$$

де $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha)$ — приєднана сферична функція.

З умови (3), використовуючи узагальнене перетворення Меллера—Фока [5], одержимо $A_m = 0$.

Отже,

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m(\alpha, \beta) e^{im\varphi} = \sqrt{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \sum_{m=0}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^{\infty} B_m(\tau) \operatorname{sh}(\beta\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau. \quad (9)$$

Згідно з умовою (4), нормальне зміщення зануреної частини оболонки визначається у вигляді

$$w_1(\alpha, \varphi) = \frac{i}{\omega a} \sum_{m=0}^{\infty} e^{im\varphi} \left\{ \sqrt{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta_1)^3} \int_0^{\infty} B_m(\tau) \tau \operatorname{ch}(\beta_1 \tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau + \right. \\ \left. + \frac{\sin \beta_1}{2} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta_1} \int_0^{\infty} B_m(\tau) \operatorname{sh}(\beta_1 \tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau \right\}. \quad (10)$$

Після підстановки виразу (10) у рівняння коливань оболонки (1) для визначення кожної з функцій $B_m(\tau)$, яка описує форму коливань з $2m$ вузловими меридіанами, дістанемо однорідне інтегральне рівняння

$$\int_0^{\infty} B_m(\tau) [\lambda K_{1m}(\alpha, \tau) - K_{2m}(\alpha, \tau)] d\tau = 0, \quad (11)$$

ядро якого залежить від параметра

$$\lambda = \frac{R^3 \rho \omega^2}{Eh} - \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Тут

$$K_{1m} = \left\{ \left(\frac{1}{2} - \tau^2 \right) \operatorname{ch}^2 \alpha + \left(2\tau^2 - \frac{1}{2} \right) \cos \beta_1 \cdot \operatorname{ch} \alpha + \sin^2 \beta_1 \left(\tau^2 + \frac{5}{4} - \nu \right) - \tau^2 \right\} \times \\ \times \operatorname{sh}(\beta_1 \tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) + (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta_1) \operatorname{sh}(\beta_1 \tau) \operatorname{sh} \alpha \frac{d}{d\alpha} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha); \\ K_{2m} = \sin \beta_1 \left\{ \left[\left(\frac{7}{2} - \tau^2 \right) \operatorname{ch}^3 \alpha + (3\tau^2 - 6) \cos \beta_1 \cdot \operatorname{ch}^2 \alpha + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1-12\tau^2}{4} \cos^2 \beta_1 + \frac{5}{4} \right) \operatorname{ch} \alpha + \cos^3 \beta_1 \left(\tau^2 + \frac{9}{4} \right) - \frac{5}{4} \cos \beta_1 \right] \times \right. \\ \left. \times \tau \operatorname{ch}(\beta_1 \tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) + 3(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta_1)^2 \tau \operatorname{ch}(\beta_1 \tau) \operatorname{sh} \alpha \frac{d}{d\alpha} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) + \right. \\ \left. + \frac{1+\nu}{2} \sin^3 \beta_1 \operatorname{sh}(\beta_1 \tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) \right\}.$$

За допомогою узагальненого інтегрального перетворення Меллера—Фока можна записати рівняння (11) у вигляді

$$B_m(\tau) + \int_0^{\infty} B_m(\mu) [\lambda L_{1m}(\tau, \mu) + L_{2m}(\tau, \mu)] d\mu = 0. \quad (13)$$

Виразів L_{1m} та L_{2m} ми не наводимо тут внаслідок їх громіздкості. Інтегральні рівняння типу (13) досліджувались у роботі [2], в якій доведено, що система власних функцій таких рівнянь повна, і в якій дана оцінка власних чисел. Згідно з цією оцінкою власні числа рівняння (13) є дійсні і додатні.

При обчисленні власного числа λ доцільно користуватися рівняннями (11). Кожне з цих рівнянь розв'язуємо узагальненим (проективним)

методом Бубнова—Гальоркіна [4]. При виборі системи координатних функцій враховуємо, що [5]

$$B_m(\tau) = (-1)^m \frac{\tau \operatorname{th} \pi \tau}{\operatorname{sh} \beta \tau} \int_0^\infty \Phi_m(\alpha, \beta) (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-1/2} P_{-\frac{1}{2} + i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha.$$

Оскільки $P_{-\frac{1}{2} + i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha)$ є парною функцією від τ , то кожна з функцій $B_m(\tau)$ є непарною. Умови спряження на ватерлінії виконуватимуться при належному виборі сталих в розв'язках ω_2, χ_1, χ_2 , якщо записати функції $B_m(\tau)$ у вигляді

$$B_m(\tau) = \frac{\tau}{\operatorname{ch} \pi \tau} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} [\tau^{2(n-1)} - \varepsilon_{mn} (-1)^n] \quad \left(\varepsilon_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{при } m=0, 1; n=1 \\ 1 & \text{при } m=0, 1; n \neq 1 \end{cases} \right) \quad (14)$$

Коефіцієнти b_{mn} визначимо з умови ортогональності нев'язки до повної в підпросторі M_2 [4] системи функцій $t^3, t^4, t^5, \dots \left(t = \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} \right)$. Це дає систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda c_{nk}^m - d_{nk}^m) b_{mn} = 0, \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad (15)$$

коефіцієнти якої при кожному фіксованому значенні m визначаються формулами:

$$c_{nk}^m = \int_0^\infty \int_0^\infty K_{1m}(\alpha, \tau) \frac{\tau^{2n-1} - \varepsilon_{mn} \tau (-1)^n}{\operatorname{ch} \pi \tau} \frac{\operatorname{sh} \alpha}{(\operatorname{ch} \alpha)^{k+2}} d\alpha d\tau;$$

$$d_{nk}^m = \int_0^\infty \int_0^\infty K_{2m}(\alpha, \tau) \frac{\tau^{2n-1} - \varepsilon_{mn} \tau (-1)^n}{\operatorname{ch} \pi \tau} \frac{\operatorname{sh} \alpha}{(\operatorname{ch} \alpha)^{k+2}} d\alpha d\tau.$$

При обчисленні коефіцієнтів c_{nk}^m та d_{nk}^m враховуємо, що

$$V \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{\tau^{2n-1}}{\operatorname{ch} \pi \tau} \operatorname{sh}(\beta \tau) P_{-\frac{1}{2} + i\tau}^m(x) d\tau = V (x^2 - 1)^m \frac{\partial^{2n+m-1}}{\partial x^m \partial \beta^{2n-1}} (x + \cos \beta)^{-1/2};$$

$$V \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{\tau^{2n}}{\operatorname{ch} \pi \tau} \operatorname{ch}(\beta \tau) P_{-\frac{1}{2} + i\tau}^m(x) d\tau = V (x^2 - 1)^m \frac{\partial^{2n+m}}{\partial x^m \partial \beta^{2n}} (x + \cos \beta)^{-1/2};$$

$$V \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{\tau^{2n-1}}{\operatorname{ch} \pi \tau} (x^2 - 1) \operatorname{sh}(\beta \tau) \frac{d}{dx} P_{-\frac{1}{2} + i\tau}^m(x) d\tau =$$

$$= V (x^2 - 1)^m \frac{\partial^{2n+m}}{\partial x^{m+1} \partial \beta^{2n-1}} (x + \cos \beta)^{-1/2};$$

$$V \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{\tau^{2n}}{\operatorname{ch} \pi \tau} (x^2 - 1) \operatorname{ch}(\beta \tau) \frac{d}{dx} P_{-\frac{1}{2} + i\tau}^m(x) d\tau =$$

$$= V (x^2 - 1)^m \frac{\partial^{2n+m+1}}{\partial x^{m+1} \partial \beta^{2n}} (x + \cos \beta)^{-1/2};$$

Умова нетривіальності розв'язку системи (15) дає частотне рівняння

$$\det |\lambda c_{nk}^m - d_{nk}^m| = 0. \quad (16)$$

Корені цього рівняння знаходяться методом редукції. Якщо обмежитись визначником N -го порядку, то у відповідному N -му наближенні одержимо N значень чисел $\Omega = \sqrt{\lambda + \frac{1}{2}}$, які пропорціональні частотам власних коливань із заданим числом вузлових меридіанів.

Оскільки в N -му наближенні рівняння (16) є поліномом N -го порядку відносно параметра λ , то для знаходження коефіцієнтів цього полінома досить обчислити значення функції $f_m(\lambda) = \det |\lambda c_{nk}^m - d_{nk}^m|$ при $\lambda = 0, 1, 2, \dots, N$ і побудувати для неї інтерполяційний поліном Лагранжа, який точно співпадає з характеристичним поліномом (16).

ЛІТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Избранные труды, т. 1. М., 1962.
2. Келдыш М. В. О собственных функциях и собственных значениях некоторых классов несамосопряженных уравнений. ДАН, т. 77, 1951, стр. 11—14.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, Физматгиз, ч. 1. М., 1963.
4. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. «Наука», М., 1965, стр. 317.
5. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Физматгиз, М.—Л., 1963.

УДК 517.944

І. О. ПРУСОВ

ПРО ОДИН РОЗВ'ЯЗОК ДЕЯКИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ

1. Основні задачі для області, обмеженої колом. Нехай в області $D^+ (|z| < R)$ або $D^- (|z| > R)$ комплексного змінного $z = x + iy = re^{i\theta}$, що обмежене колом L радіуса R , визначена однозначна обмежена функція $u(x, y)$, гармонічна в D^+ або D^- , крім однієї точки $z = z_0$, де вона має особливість

$$u = 2m \ln |z - z_0| + O(1) \text{ при } z \rightarrow z_0. \quad (1)$$

Тут $m = -q(4\pi)^{-1}$, q — відома дійсна стала.

Якщо функція $u(x, y)$ визначена в області D^- , будемо вважати, що при $|z| \rightarrow \infty$

$$u = a_0^\infty + \operatorname{Re}(a_1^\infty z) + O(|z|^{-1}), \quad (2)$$

де $a_1^\infty = a_x^\infty - ia_y^\infty$; a_0^∞ , a_x^∞ і a_y^∞ — відомі дійсні сталі, з яких

$$a_x^\infty = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{і} \quad a_y^\infty = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty.$$

Основна задача полягає у визначенні функції $u(x, y)$ в області D^+ або D^- за її крайовими умовами на контурі L . Для цієї мети скористуємось співвідношенням

$$F_0(z) + \varepsilon F_0(R^2/\bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (3)$$

де $\varepsilon = \pm 1$; $F_0(z)$ — довільна аналітична функція в областях D^+ і D^- ; $u(x, y)$ і $v(x, y)$ — дійсні функції, з яких $u(x, y)$ — шукана функція, а $v(x, y)$ — допоміжна функція. Знак ε вибирається в залежності від зручності.

Диференціюючи формулу (3) по θ і r , матимемо

$$F(z) + \varepsilon \left(\frac{R}{r}\right)^2 F\left(\frac{R^2}{z}\right) = \frac{1}{iz} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \quad (4)$$

$$F(z) - \varepsilon \left(\frac{R}{r}\right)^2 F\left(\frac{R^2}{z}\right) = \frac{r}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right). \quad (5)$$

Тут $F(z) = F_0'(z)$ — однозначна аналітична функція в області D^+ або D^- , крім точок $z = z_0$ і $z = \alpha = R^2/\bar{z}_0$, де вона має особливості:

$$\begin{aligned} F(z) &= m(z - z_0)^{-1} + O(1) \text{ при } z \rightarrow z_0; \\ F(z) &= m(z - z_0)^{-1} + O(1) \text{ при } z \rightarrow \alpha; \end{aligned} \quad (6)$$

При цих умовах визначена за формулою (3) функція $u(x, y)$ має в точці $z = z_0$ згадану вище особливість, а функція $v(x, y)$ обмежена в точці $z = z_0$.

Якщо функція $u(x, y)$ визначена в області D^- , то у відповідності з умовою (2) будемо вважати, що

$$\begin{aligned} F_0(z) &= a_0^\infty + a_1^\infty z + O(z)^{-1} \text{ при } |z| \rightarrow \infty, \\ F(z) &= a_1^\infty + O(z)^{-2} \text{ при } |z| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Якщо ж функція $u(x, y)$ визначена в області D^+ , ми будемо вважати, що праві частини формул (4) і (5) обмежені при $z \rightarrow 0$. Для цього функція $F(z)$ в області D^- повинна задовольняти деяким умовам. Так, коли приймемо, що при $|z| \rightarrow \infty$

$$F(z) = B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \dots$$

то для виконання умови, яка вимагається, необхідно і достатньо, щоб

$$B_0 = 0, B_1 = 0. \quad (8)$$

Крім того, ми будемо вважати, що функція $F(z)$ неперервно продовжується на всі точки t контура L з сторін D^+ і D^- , крім скінченної кількості точок $t = c$, в околі яких вона має особливість

$$|F(z)| < A |z - c|^{-\alpha} \quad (0 \leq \alpha < 1). \quad (9)$$

Користуючись формулами (3) — (5), можна знайти розв'язок задач Діріхле, Неймана і змішаної задачі про визначення функції $u(x, y)$. Більш коротко ці задачі будемо називати задачами I, II і III. В свою чергу всі ці задачі зводяться до визначення функцій $F_0(z)$ і $F(z)$ за крайовими значеннями правих частин формул (3) — (5).

З формули (3) випливає, що функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$, взагалі кажучи, гармонічно неспряжені. Проте значення однієї з них в області їх визначення взагалі залежить від крайового значення другої функції. В зв'язку з цим далі покладемо, що

$$v(x, y) = 0 \quad \text{і} \quad \frac{d}{dn} v(x, y) = 0 \quad (10)$$

на всіх ділянках контура L , де задаються відповідно функція $u(x, y)$ і її похідна по нормалі n . Ця умова є необхідною для того, щоб при

нульових крайових умовах функція u дорівнювала нулеві в області її визначення.

Приймаючи, що крайові значення на контурі L функції $u(x, y)$ і її похідних по r і θ задовольняють умову Гельдера (H), можна знайти розв'язок основних крайових задач по визначенню функцій $F_0(z)$ і $F(z)$. Метод розв'язку їх надто подібний до методу розв'язку основних крайових задач теорії пружності (див: [4], § 112—114, 122—124). Тому наведемо для прикладу розв'язки лише деяких задач.

Задача I для круга. Нехай на контурі L області D^+ задано $u=f(t)$ ($f(t)$ — дійсна функція). Тоді на підставі формули (3) при $\varepsilon=-1$ маємо

$$F_0^+(t) - F_0^-(t) = f(t) \quad \text{на } L. \quad (11)$$

Тут, як і далі, знаками плюс і мінус позначаються крайові значення функцій із сторін D^+ та D^- на L .

Розв'язком крайової задачі (11) при врахуванні умови (6) є функція [1, 4]

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - z} + m \ln \frac{z - z_0}{z - \alpha} + m \ln(-\alpha). \quad (12)$$

Функцію $u(x, y)$ знайдемо за формулами (3) і (12). Крім того, знайдемо, що $v(x, y) = 0$ в області D^+ .

Задача II для круга. Якщо на контурі L області D^+ відома похідна по нормалі від функції $u(x, y)$, дорівнює $f(t)$, за формулою (5) при $\varepsilon=1$ маємо крайову умову

$$F^+(t) - F^-(t) = R t^{-1} f(t) \quad \text{на } L. \quad (13)$$

Розв'язком цієї крайової задачі є функція

$$F(z) = \frac{R}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\tau(\tau - z)} + \frac{m}{z - z_0} + \frac{m}{z - \alpha} + B_0.$$

Задовольняючи умову (8), знайдемо що

$$B_0 = 0, \quad 4\pi m - R \int_0^{2\pi} f(t) d\theta = 0.$$

Останнє співвідношення є необхідною умовою розв'язку задачі Неймана для круга.

Задача III для області D^- . Нехай $L' = \Sigma L_k'$ є сукупність n дуг $L_k' = a_k b_k$ на контурі L , які не мають між собою спільних точок; $L'' = L - L'$ — інша частина контура L . І нехай на контурі L області D^- задані значення

$$u = f_1(t) \quad \text{на } L' \quad \text{і} \quad \frac{du}{dr} = f_2(t) \quad \text{на } L'', \quad (14)$$

де $f_j(t)$ — відомі дійсні функції на контурі L .

У цьому випадку доцільно розглянути такі дві задачі.

Задача А

$$\begin{aligned} F^-(t) + F^+(t) &= f_1'(t) \quad \text{на } L'; \\ F^-(t) - F^+(t) &= 0 \quad \text{на } L''. \end{aligned} \quad (15)$$

З а д а ч а B

$$\begin{aligned} F^-(t) - F^+(t) &= 0 \text{ на } L', \\ F^-(t) + F^+(t) &= R t^{-1} f_2(t) \text{ на } L''. \end{aligned} \quad (16)$$

Крайові умови для цих задач одержані на підставі формул (4) і (5) при $\varepsilon=1$ і $\varepsilon=-1$, з прийняттям відповідно, що $f_2(t)=0$ і $f_1(t)=0$. Накладанням розв'язків задач *A* і *B* знайдемо розв'язок задачі, що відповідає умові (14).

Функція $F(z)$, яка задовольняє умови (15) і (9) і має особливості (6) в точках $z=z_0$ і $z=\alpha$, визначається за формулою [4]

$$F(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{L'} \frac{f_3(\tau) d\tau}{X^+(\tau)(\tau-z)} + X(z) \left[P_n(z) + \frac{k_1}{z-z_0} + \frac{k_2}{z-\alpha} \right], \quad (17)$$

де

$$X(z) = \prod_{k=1}^n [(z-a_k)(z-b_k)]^{-\frac{1}{2}}, \quad z^n X(z) = 1 \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty;$$

$$f_3(t) = \frac{d}{dt} f_1(t), \quad k_1 = \frac{m}{X(z_0)}, \quad k_2 = \frac{m}{X(\alpha)};$$

$P_n(z) = C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \dots + C_n$ — поліном степеня n з довільними комплексними коефіцієнтами; $X(z)$ — частковий розв'язок однорідної крайової задачі, яка відповідає задачі (15).

Коефіцієнти полінома визначаються з умови на безмежності (7) та з $n-1$ незалежних рівнянь

$$\int_{b_k}^{a_{k+1}} [F^-(t) + F^+(t)] dt = f_1(a_{k+1}) - f_1(b_k). \quad (18)$$

Розв'язок задачі *B* має аналогічний вигляд.

Відмінність розв'язку полягає тільки в тому, що $X(z)$ є частковий розв'язок однорідної задачі, яка відповідає задачі *B*.

2. Основні задачі для площини з розрізами вздовж дуги кола. Нехай вздовж кола $|z|=R$ є n розрізів $L_k = a_k b_k$. І нехай $L = \sum L_k$; D — вся площина комплексного змінного $z = x + iy = r e^{i\theta}$, за винятком точок t дуги L ; L^+ і L^- — береги розрізів на L із сторін $r < R$ і $r > R$ відповідно.

Розглянемо крайову задачу про визначення в області D однозначної гармонічної функції $u(x, y)$, обмеженої всюди в області $D + L^+ + L^-$, за винятком точок $z = z_0$ і $|z| \rightarrow \infty$, де вона має особливості (1), (2). Для цієї мети скористуємось співвідношеннями:

$$F_0(z) + \Omega_0(R^2/\bar{z}) = u(x, y) + i v(x, y); \quad (19)$$

$$F(z) + \left(\frac{R}{r}\right)^2 \Omega\left(\frac{R^2}{z}\right) = \frac{1}{iz} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\partial v}{\partial \theta} \right); \quad (20)$$

$$F(z) - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \Omega\left(\frac{R^2}{z}\right) = \frac{r}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (21)$$

останні два з яких одержані диференціюванням першого по θ і r .

Тут $F(z) = F_0'(z)$, $\Omega(z) = \Omega_0'(z)$; $F(z)$ і $\Omega(z)$ — функції, голоморфні в області D , крім точок $z = z_0$ і $z = \alpha = R^2/\bar{z}_0$, де вони мають особливості:

$$\begin{aligned} F(z) &= m(z - z_0)^{-1} + O(1) \text{ при } z \rightarrow z_0; \\ \Omega(z) &= m(z - \alpha)^{-1} + O(1) \text{ при } z \rightarrow \alpha; \end{aligned} \quad (22)$$

$u(x, y)$ — шукана функція, $v(x, y)$ — допоміжна функція, що задовольняє умову (10) на L^+ і L^- . Поведінка функції $F(z)$ на безмежності визначається формулою (7).

Приймаючи, що при $|z| \rightarrow \infty$ функція $\Omega(z)$ зображується рядом

$$\Omega(z) = B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \dots$$

ми будемо вважати, що коефіцієнти

$$B_0 = 0, B_1 = 0. \quad (23)$$

На підставі формул (20) і (21) маємо умову на L :

$$F^+(t) + \Omega^-(t) = f_1^+(t) \quad \text{на } L^+, \quad (24)$$

$$F^-(t) + \Omega^+(t) = f_1^-(t) \quad \text{на } L^-, \quad (25)$$

$$F^+(t) - \Omega^-(t) = f_2^+(t) \quad \text{на } L^+, \quad (26)$$

$$F^-(t) - \Omega^-(t) = f_2^-(t) \quad \text{на } L^-, \quad (27)$$

де

$$f_1(t) = \frac{d}{dt}(u + iv), \quad f_2(t) = R t^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right). \quad (28)$$

Беручи до уваги формули (24)–(27) і умову (10), можна знайти розв'язки задач I, II і змішаної задачі. Метод їх розв'язку майже не відрізняється від методу, запропонованого М. І. Мусхелішвілі [4, § 124] для плоскої задачі теорії пружності. Так, якщо, наприклад, на L задано

$$u = f^-(t) \text{ на } L^- \text{ і } u = f^+(t) \text{ на } L^+,$$

то на підставі формул (24) і (25) знайдемо

$$F(z) - \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q(\tau) d\tau}{\tau - z} + \frac{m}{z - z_0} - \frac{m}{z - \alpha} + D_0,$$

$$F(z) + \Omega(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{p(\tau) d\tau}{X^+(\tau)(\tau - z)} + X(z) \left[P_n(z) + \frac{k_1}{z - z_0} + \frac{k_2}{z - \alpha} \right],$$

де

$$\begin{aligned} q(t) &= f^+(t) - f^-(t), \quad p(t) = f^+(t) + f^-(t), \\ k_1 &= m[X(z_0)]^{-1}, \quad k_2 = m[X(\alpha)]^{-1}, \end{aligned}$$

D_0 — довільна стала; а через $X(z)$ і $P_n(z)$ позначено те саме, що і в формулі (17).

Стала D_0 і коефіцієнти полінома визначаються з умов (7), (23), а також з рівнянь

$$\int_{b_k}^{a_{k+1}} [F^+(t) + \Omega^-(t)] dt = f(a_{k+1}) - f(b_k), \quad (29)$$

загальне число яких дорівнює $n-1$.

Коефіцієнти поліномів при розв'язуванні інших крайових задач визначаються з умов (7) і (23) і, крім того, з співвідношень

$$\int_{L_k} [(F^+ + \Omega^-) - (F^- + \Omega^+)] dt = 0, \quad (30)$$

які обов'язково повинні виконуватись внаслідок однозначності функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ при обході розрізів L_k , а також з співвідношень (29), якщо відомі значення функції $u(x, y)$ в точках a_{k+1} і b_k . При розв'язуванні розглянутої вище задачі І співвідношення (30) виконуються то-тожню і тому не дають рівнянь для визначення коефіцієнтів полінома.

3. Основні крайові задачі для анізотропної півплощини і анізотропної площини з розрізами на відрізках прямої. Нехай функція $u(x, y)$, визначена в області $D^- (y < 0)$ або в області D (вся площина, за винятком n відрізків $L_k = a_k b_k$ на прямій $y=0$), задовольняє рівнянню еліптичного типу

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (31)$$

всюди в області її визначення, крім точки $z = x_0 + iy_0$, де вона має логарифмічну особливість. Тут λ_{ij} — відомі дійсні сталі, з яких $\lambda_{jj} \neq 0$.

Як впливає з роботи С. Г. Лехніцького [3] (див. також роботу [6]), $u(x, y) = \operatorname{Re} F_0(z_1)$, де $F_0(z_1)$ — аналітична функція комплексного змінного $z_1 = x + \lambda y$; λ — корінь характеристичного рівняння

$$\lambda_{22}\lambda^2 + 2\lambda_{12}\lambda + \lambda_{11} = 0 \quad (\operatorname{Im} \lambda = 0).$$

З метою одержання розв'язку основних крайових задач для області D^- доцільно користуватися формулами

$$F_0(z_1) + \varepsilon F_0(\bar{z}_1) = u + iv, \quad (32)$$

$$F(z_1) + \varepsilon F(\bar{z}_1) = \frac{\partial}{\partial x} (u + iv), \quad (33)$$

$$\lambda F(z_1) + \varepsilon \bar{\lambda} F(\bar{z}_1) = \frac{\partial}{\partial y} (u + iv), \quad (34)$$

де $\varepsilon = \pm 1$, $F_1(z_1) = F'_0(z_1)$, $\bar{z}_1 = x + \bar{\lambda}y$, $u = u(x, y)$ — шукана функція, $v = v(x, y)$ — допоміжна функція, значення якої на контурі області визначаються умовою (10). Як і раніше, вибір знака ε залежить від зручності.

Визначена в областях D^- і $D^+ (y > 0)$ голоморфна функція $F(z_1)$ має особливості в точках $z_0 = x_0 + \lambda y_0$ і $\bar{z}_0 = x_0 + \bar{\lambda}y_0$:

$$F(z_1) = \frac{m}{z_1 - z_0} + O(1)(z_1 \rightarrow z_0), \quad F(z_1) = \frac{\varepsilon m}{z_1 - \bar{z}_0} + O(1)(z_1 \rightarrow \bar{z}_0). \quad (35)$$

При $|z_1| \rightarrow \infty$ функції $F_0(z_1)$ і $F(z_1)$ мають вигляд

$$F_0(z_1) = a_1^\infty z_1 + a_0^\infty + O(z_1)^{-1}, \quad F(z_1) = a_1^\infty + O(z_1)^{-2}, \quad (36)$$

де a_0^∞ і a_1^∞ позначено те, що і в умові (2).

Основні формули для визначення функції $u(x, y)$ в області D відрізняються від формул (32) — (36) тільки тим, що в формулах (32) — (34) і в другій з формул (35) функції $F_0(\bar{z}_1)$, $F(\bar{z}_1)$ і $F(z_1)$ замінюються відповідно функціями $\Omega_0(\bar{z}_1)$, $\Omega(\bar{z}_1)$ і $\Omega(z_1)$.

Метод розв'язування крайових задач для областей D^- і D майже не відрізняється від методу розв'язування розглянутих вище задач. Деякі з цих задач іншими методами досліджені в роботах [1, 2, 5, 6].

ЛІТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
2. Келдыш М. В., Седов Л. И. Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций. ДАН СССР, т. XVI, № 1, 1937, 7—10.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки, М.—Л., 1957.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1946.
6. Уздалев А. И. Плоская задача термоупругости для анизотропного тела. «Инж. журнал», т. 2, в. 1., 1962.

УДК 539. + 624.073:531

Н. П. ФЛЕЙШМАН, Л. И. ОЩИПКО

ПРУЖНА РІВНОВАГА ДОВІЛЬНО НАВАНТАЖЕНОЇ ПЛАСТИНКИ З НЕСИМЕТРИЧНО ПІДКРІПЛЕНОЮ КРУГОВОЮ ГРАНИЦЕЮ

Розглядається задача про деформацію круглої пластинки з несиметрично підкріпленою границею та безмежної пластинки з несиметрично підкріпленням круговим отвором. Методом інтегралів типу Коші задачу зведено до системи двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку для знаходження комплексних потенціалів, що визначають прогин $w(x, y)$ та функцію напружень Ері $U(x, y)$. Розв'язок одержано у замкненому вигляді при довільному навантаженні.

1. Границьні умови. Кругова границя пластинки підкріплена пружним ребром. Вісь ребра паралельно зміщена відносно серединної площини пластинки на величину h_0 . Ребро розглядається тонким, що дозволяє нехтувати його жорсткістю на кручення і згин у своїй площині. Вважаємо, що взаємодія ребра і пластинки відбувається по границі Γ .

Границьні умови на Γ можна записати у вигляді [2].

$$\begin{aligned} & \overline{\kappa\varphi_*}(t) - t\varphi'_*(t) - \psi_*(t) - \frac{h_0 h}{2(1-\nu)D} [\overline{\varphi}(t) + \bar{t}\varphi'(t) + \psi(t)] - \\ & - \frac{Ai\bar{t}}{D(1-\nu)} \operatorname{Re} \left\{ i \frac{d}{ds} [\overline{\varphi_*(t)} + \bar{t}\varphi'_*(t) + \psi_*(t)] \right\} = \\ & = \frac{Ai\bar{t}}{2D(1-\nu)} \operatorname{Re} \left\{ i \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial w^0}{\partial x} - i \frac{\partial w^0}{\partial y} \right) \right\} - \frac{1}{2(1-\nu)D} \times \\ & \times \left\{ I_0 - I_1 - ih_0 \int_0^s (p_x^0 - ip_y^0) ds + iC_1 \bar{t} - C_2 \right\}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{E_1 F}{2\mu h} i \dot{t} \operatorname{Re} \left\{ i \frac{d}{ds} [x_1 \overline{\varphi(t)} - \overline{t} \varphi'(t) - \psi(t)] \right\} - \overline{\varphi(t)} - \overline{t} \varphi'(t) - \\ & - \psi(t) + \frac{2h_0}{h} E_1 F i \dot{t} \operatorname{Re} \left\{ i \frac{d}{ds} [\overline{\varphi_*(t)} + \overline{t} \varphi'_*(t) + \psi_*(t)] \right\} = \\ & = -i \dot{t} E_1 F \frac{h_0}{h} \operatorname{Re} \left[i \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial w^0}{\partial x} - i \frac{\partial w^0}{\partial y} \right) \right] - \frac{i}{h} \int_0^s (p_x^0 - i p_y^0) ds + C_3, \quad (2) \end{aligned}$$

де

$$I_k(s) = - \int_0^s \left[m_k(s_1) - i \int_0^{s_1} p_k(s_2) ds_2 \right] (dx - i dy) \quad (k=0,1),$$

p_1, m_1 — задані зовнішні перерізуючі сили та моменти на Γ ; p_0, m_0 — сили і моменти, що визначаються функцією w^0 ; $\kappa = (3+\nu)/(1-\nu)$; $\kappa_1 = (3-\nu)/(1+\nu)$; C_1 — дійсна стала; C_2, C_3 — комплексні числа; h — товщина пластинки; p_x^0, p_y^0 — проекції на координатні осі заданих зовнішніх зусиль, що діють на Γ в серединній площині пластинки.

Прогин $w(x, y)$ та функція напружень Ері $U(x, y)$ виражаються відповідно за формулами:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= 2 \operatorname{Re} [\overline{z} \varphi_*(z) + \chi_*(z)] + w^0(x, y); \\ U(x, y) &= \operatorname{Re} [\overline{z} \varphi(z) + \chi(z)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Через w^0 позначено частковий розв'язок рівняння

$$D \Delta \Delta w = q(x, y) \quad (4)$$

2. Розв'язок задачі для круглої пластинки з не-симетрично підкріпленням краєм. Введемо заміну $z = R\zeta$ і позначимо

$$\begin{aligned} \varphi_*(z) &= \varphi(\zeta); \quad \varphi(z) = 2\mu h \varphi_1(\zeta); \\ \psi_*(z) &= \psi(\zeta); \quad \psi(z) = 2\mu h \psi_1(\zeta). \end{aligned} \quad (5)$$

При цьому контур Γ переходить в коло γ одиничного радіуса, на якому граничні умови (1), (2) запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} & \kappa \overline{\varphi(\sigma)} - \frac{1}{\sigma} \overline{\varphi'(\sigma)} - \psi(\sigma) - 6\lambda \left[\overline{\varphi_1(\sigma)} + \frac{1}{\sigma} \overline{\varphi'_1(\sigma)} + \psi_1(\sigma) \right] - \\ & - \frac{\delta_1}{1-\nu} \frac{1}{\sigma} \operatorname{Re} \left\{ \sigma^2 \frac{d}{d\sigma} \left[\overline{\varphi(\sigma)} + \frac{1}{\sigma} \overline{\varphi'(\sigma)} + \psi(\sigma) \right] \right\} = f_1(\sigma); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\sigma} \operatorname{Re} \left\{ \sigma^2 \frac{d}{d\sigma} \left[\kappa_1 \overline{\varphi_1(\sigma)} - \frac{1}{\sigma} \overline{\varphi'_1(\sigma)} - \psi_1(\sigma) \right] \right\} - \overline{\varphi_1(\sigma)} - \frac{1}{\sigma} \overline{\varphi'_1(\sigma)} - \\ & - \psi_1(\sigma) + \frac{2\lambda\delta}{\sigma} \operatorname{Re} \left\{ \sigma^2 \frac{d}{d\sigma} \left[\overline{\varphi(\sigma)} + \frac{1}{\sigma} \overline{\varphi'(\sigma)} + \psi(\sigma) \right] \right\} = f_2(\sigma), \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} f_1(\sigma) &= \frac{\delta_1}{2(1-\nu)} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \sigma^2 \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial w^0}{\partial x} - i \frac{\partial w^0}{\partial y} \right) \right\} - \\ & - \frac{1}{2D(1-\nu)} \left[I_0 - I_1 - i h_0 \int_0^s (p_x^0 - i p_y^0) ds + i C_1 \frac{R}{\sigma} - C_2 \right]; \end{aligned}$$

$$f_2(\sigma) = -\frac{\delta}{\sigma} \lambda \operatorname{Re} \left[\sigma^2 \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial w^0}{\partial x} - i \frac{\partial w^0}{\partial y} \right) \right] - \frac{i}{h} \int_0^s (p_x^0 - i p_y^0) ds + C_3;$$

$\delta = E_1 F / 2 \mu h R$ — відносна жорсткість ребра на розтяг; $\delta_1 = A / DR$ — відносна жорсткість ребра на згин; $\lambda = h_0 / h$. A — жорсткість ребра на згин; E_1 — модуль Юнга матеріалу ребра; F — площа поперечного перерізу ребра. D — циліндрична жорсткість пластинки.

Введемо функції [4]:

$$U_1(\zeta) = \varphi_1'(\zeta) + \zeta \psi_1(\zeta); \quad U(\zeta) = \varphi'(\zeta) + \zeta \psi(\zeta). \quad (8)$$

Домноживши умови (6), (7) відповідно на $2\lambda\delta$ і $\delta_1/(1-\nu)$ та просумували їх, дістанемо

$$\lambda \sigma \overline{\varphi(\sigma)} - U(\sigma) - 6\lambda [\sigma \overline{\varphi_1(\sigma)} + U_1(\sigma)] - \frac{\delta_1}{1-\nu} \operatorname{Re} [\sigma U'(\sigma) - U(\sigma) - \overline{\varphi'(\sigma)}] = \sigma f_1(\sigma); \quad (9)$$

$$2\lambda\delta [\lambda \sigma \overline{\varphi(\sigma)} - U(\sigma)] - \left(12\lambda^2\delta + \frac{\delta_1}{1-\nu} \right) [\sigma \overline{\varphi_1(\sigma)} + U_1(\sigma)] + \frac{\delta_1\delta}{1-\nu} \operatorname{Re} [U_1(\sigma) - \sigma U_1'(\sigma) - \kappa_1 \overline{\varphi_1'(\sigma)}] = \sigma f_3(\sigma). \quad (10)$$

Тут

$$f_3(\sigma) = 2\lambda\delta f_1(\sigma) + \frac{\delta_1}{1-\nu} f_2(\sigma).$$

Помножимо рівняння (9), (10) і комплексно спряжені до них на $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ та проінтегруємо їх по γ при $|\zeta| < 1$, вважаючи, що [1, 2]

$$\varphi(0) = 0; \quad \operatorname{Im} \varphi'(0) = 0;$$

$$\varphi_1(0) = 0; \quad \operatorname{Im} \varphi_1'(0) = 0.$$

Остаточно матимемо:

$$-\frac{\delta_1}{2(1-\nu)} [\zeta U'(\zeta) - U(\zeta) - \overline{\varphi'(\zeta)}] - U(\zeta) - 6\lambda U_1(\zeta) = F_1(\zeta); \quad (11)$$

$$\frac{\delta_1\delta}{2(1-\nu)} [U_1(\zeta) - \zeta U_1'(\zeta) - \kappa_1 \overline{\varphi_1'(\zeta)}] - \left(12\lambda^2\delta + \frac{\delta_1}{1-\nu} \right) U_1(\zeta) - 2\lambda\delta U(\zeta) = F_2(\zeta); \quad (12)$$

$$\frac{\delta_1}{2(1-\nu)} [U(\zeta) - \zeta U'(\zeta) + \overline{\varphi'(\zeta)}] + \frac{\kappa}{\zeta} \overline{\varphi(\zeta)} - \frac{6\lambda}{\zeta} \overline{\varphi_1(\zeta)} = F_3(\zeta); \quad (13)$$

$$\frac{\delta_1\delta}{2(1-\nu)} [U_1(\zeta) - \zeta U_1'(\zeta) - \kappa_1 \overline{\varphi_1'(\zeta)}] + 2\lambda\delta \kappa \overline{\varphi(\zeta)} - \left(12\lambda^2\delta + \frac{\delta_1}{1-\nu} \right) \frac{\overline{\varphi_1(\zeta)}}{\zeta} = F_4(\zeta). \quad (14)$$

Тут

$$F_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sigma f_1(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + 6\lambda c_1 - \left(\kappa + \frac{\delta_1}{1-\nu} \right) a_1;$$

$$F_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sigma f_3(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \left(\frac{\delta_1\delta}{1-\nu} + 12\lambda^2\delta + \frac{\delta_1}{1-\nu} \right) c_1 - 2\lambda\delta \kappa a_1;$$

$$F_3(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\sigma} \overline{f_1(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + 6\lambda c_1 + \left(1 - \frac{\delta_1}{1-\nu}\right) a_1;$$

$$F_4(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\sigma} \overline{f_3(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \left(\frac{\delta_1 \delta}{1+\nu} + 12\lambda^2 \delta + \frac{\delta_1}{1-\nu}\right) c_1 + 2\lambda \delta a_1;$$

$$a_1 = \varphi'(0); \quad c_1 = \varphi'_1(0).$$

Покладаючи в рівняннях (11) і (12) $\zeta=0$, дістанемо два співвідношення для визначення a_1 та c_1 :

$$\left(\frac{2\delta_1}{1-\nu} + \kappa - 1\right) a_1 - 12\lambda c_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f_1(\sigma) d\sigma = g_1$$

$$2\lambda \delta (\kappa - 1) a_1 - 2 \left(\frac{\delta_1 \delta}{1+\nu} + 12\lambda^2 \delta + \frac{\delta_1}{1-\nu}\right) c_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f_3(\sigma) d\sigma = g_2.$$

Звідси

$$a_1 = \frac{1-\nu [\delta_1 \delta (1-\nu) + 12\lambda^2 \delta (1-\nu^2) + \delta_1 (1+\nu)] g_1 - 6\lambda g_2 (1-\nu^2)}{2\delta_1 [12\lambda^2 \delta (1-\nu^2) + (\delta_1 + 1 + \nu) [\delta (1-\nu) + (1+\nu)]]}; \quad (15)$$

$$c_1 = \frac{1-\nu^2}{2\delta_1} \frac{2\lambda \delta (1+\nu) g_1 - (\delta_1 + 1 + \nu) g_2}{12\lambda^2 \delta (1-\nu^2) + (\delta_1 + 1 + \nu) [\delta (1-\nu) + (1+\nu)]}. \quad (16)$$

Систему рівнянь (11)–(14) можна звести до такої:

$$U(\zeta) + \frac{\kappa}{\zeta} \varphi(\zeta) = R_2(\zeta); \quad U_1(\zeta) - \frac{1}{\zeta} \varphi_1(\zeta) = R_1(\zeta); \quad (17)$$

$$\varphi'(\zeta) + a_{11} \frac{1}{\zeta} \varphi(\zeta) + a_{12} \frac{1}{\zeta} \varphi_1(\zeta) = V_1(\zeta); \quad (18)$$

$$\varphi'_1(\zeta) + a_{21} \frac{1}{\zeta} \varphi(\zeta) + a_{22} \frac{1}{\zeta} \varphi_1(\zeta) = V_2(\zeta),$$

де

$$R_1(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \operatorname{Im} [\sigma f_2(\sigma)] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta};$$

$$R_2(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \operatorname{Im} \{\sigma [f_1(\sigma) - 6\lambda f_2(\sigma)]\} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{4}{1-\nu} a_1; \quad (19)$$

$$a_{11} = \frac{3+\nu}{2\delta_1} (1-\nu-\delta_1); \quad a_{12} = -\frac{3}{\delta_1} (1-\nu)^2 \lambda;$$

$$a_{21} = -\frac{\lambda}{\delta_1} (3+\nu) (1+\nu); \quad a_{22} = \frac{1-\nu^2}{2\delta_1 \delta} \left[12\lambda^2 \delta + \frac{\delta_1}{1-\nu} (1-\delta)\right]; \quad (20)$$

$$V_1(\zeta) = \frac{(1-\nu)^2}{2\delta_1} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{f_1(\sigma)}}{\sigma (\sigma - \zeta)} d\sigma + \frac{\delta_1}{2\pi(1-\nu)} \int_{\Gamma} \operatorname{Im} \{\sigma [f_1(\sigma) - 6\lambda f_2(\sigma)]\} \times \right.$$

$$\times \frac{\sigma - 2\zeta}{(\sigma - \zeta)^2} d\sigma \left. \right\} + \left[\frac{(1-\nu)^2}{2\delta_1} - \frac{3-\nu}{2} \right] a_1 - a_{12} c_1; \quad (21)$$

$$V_2(\zeta) = -\frac{1-\nu^2}{2\delta_1\delta} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{f_3(\sigma)}}{\sigma(\sigma-\zeta)} d\sigma + \frac{\delta_1\delta}{2(1-\nu)\pi} \int_{\gamma} \operatorname{Im} [\sigma f_2(\sigma)] \frac{\sigma-2\zeta}{(\sigma-\zeta)^2} d\sigma \right\} - \\ - (1+a_{22})c_1 - \frac{\lambda(1-\nu^2)}{\delta_1} a_1.$$

Система звичайних диференціальних рівнянь першого порядку (18) служить для знаходження функцій $\varphi(\zeta)$ та $\varphi_1(\zeta)$.

Розв'язок відповідної системи однорідних рівнянь шукаємо у вигляді

$$\varphi(\zeta) = \zeta^\mu; \quad \varphi_1(\zeta) = k\zeta^\mu. \quad (22)$$

Підставляючи розв'язок (22) у рівняння (18) при $V_1(\zeta) = V_2(\zeta) = 0$, дістаємо рівняння для визначення чисел μ та k , звідки

$$\mu_{1,2} = -\frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} \mp \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}]; \\ k_{1,2} = \frac{1}{2a_{12}} [a_{22} - a_{11} \mp \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}]. \quad (23)$$

Загальний інтеграл системи (18) матиме вигляд

$$\varphi(\zeta) = C_4\zeta^{\mu_1} + C_5\zeta^{\mu_2} + \Phi^0(\zeta); \\ \varphi_1(\zeta) = k_1C_4\zeta^{\mu_1} + k_2C_5\zeta^{\mu_2} + \Phi_1^0(\zeta). \quad (24)$$

Тут $\Phi^0(\zeta)$ та $\Phi_1^0(\zeta)$ часткові розв'язки системи (18), а саме:

$$\Phi^0(\zeta) = \frac{1}{k_2 - k_1} \left\{ \zeta^{\mu_1} \int_0^\zeta \zeta^{-\mu_1} (k_2 V_1 - V_2) d\zeta + \zeta^{\mu_2} \int_0^\zeta \zeta^{-\mu_2} (V_2 - k_1 V_1) d\zeta \right\}; \\ \Phi_1^0(\zeta) = \frac{1}{k_2 - k_1} \left\{ k_1 \zeta^{\mu_1} \int_0^\zeta \zeta^{-\mu_1} (k_2 V_1 - V_2) d\zeta + k_2 \zeta^{\mu_2} \int_0^\zeta \zeta^{-\mu_2} (V_2 - k_1 V_1) d\zeta \right\}. \quad (25)$$

Для однозначності розв'язку (22) необхідно покласти $C_4 = C_5 = 0$, тоді

$$\varphi(\zeta) = \Phi^0(\zeta); \quad \varphi_1(\zeta) = \Phi_1^0(\zeta).$$

Знаючи $\varphi(\zeta)$ та $\varphi_1(\zeta)$ із співвідношень (3), (8), та (17) визначаємо функції $U(\zeta)$, $U_1(\zeta)$, прогин $w(x, y)$ і функцію напружень Ері $U(x, y)$. Отже, задача повністю розв'язана.

3. П р и к л а д. Кругла пластинка з несиметричним ребром по краю $r=R$ оперта в центрі і навантажена тиском, що змінюється за законом $q = p_0 \left(\frac{r}{R} \right)^{n-2}$, $n \geq 2$.

У цьому випадку

$$w^0 = \frac{p_0 R^4}{n^2 D} \left\{ \frac{1}{(n+2)^2} \left(\frac{r}{R} \right)^{(n+2)} - \frac{n}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \ln \frac{r}{R} + \right. \\ \left. + \frac{(3+\nu)n^2 + 2(1+\nu)(n-2)}{8(n+2)(1+\nu)} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\}.$$

Згідно з (21),

$$V_1(\zeta) = -\frac{p_0 R^3 (1-\nu)}{8D(n+2)(1+\nu)} + \left[\frac{(1-\nu)^2}{2\delta_1} - \frac{3-\nu}{2} \right] a_1 - a_{12} c_1;$$

$$V_2(\zeta) = -\lambda \frac{1-\nu^2}{\delta_1} a_1 - (1+a_{22}) c_1.$$

Прогин та функцію Ері одержуємо у вигляді

$$w = \frac{p_0 R^4}{Dn^2} \left\{ \frac{1}{(n+2)^2} \left(\frac{r}{R} \right)^{n+2} - \frac{n}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \ln \frac{r}{R} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8(n+2)} \left[(n^2+2n-4) + 2n^2 \frac{\delta(1-\nu)+(1+\nu)}{12\lambda^2\delta(1-\nu^2)+(\delta_1+1+\nu)[\delta(1-\nu)+(1+\nu)]} \right] \right\};$$

$$U = -\frac{6\lambda\delta(1-\nu^2)}{h^2(n+2)} \frac{p_0 R^4}{12\lambda^2\delta(1-\nu^2)+(\delta_1+1+\nu)[\delta(1-\nu)+(1+\nu)]}.$$

При $n=2$ (рівномірний тиск) і $\lambda=0$ (симетричне ребро) $U(x, y)=0$, а $w(x, y)$ дає прогин плити з симетричним ребром [2].

4. Розв'язок задачі для безмежної пластинки з не-симетрично підкріпленням круговим отвором. При використанні заміни (5) з врахуванням вигляду функцій для безмежної області [1, 2] граничні умови (1), (2) для цього випадку матимуть вигляд формул (6) і (7), в яких δ та δ_1 треба замінити на $-\delta$ та $-\delta_1$. При помноженні цих граничних умов на $d\sigma/2\pi i(\sigma-\xi)$ та інтегруванні їх по γ при $|\xi|>1$ з врахуванням [1, 2]

$$\varphi(\infty)=0; \quad \psi(\infty)=0;$$

$$\varphi_1(\infty)=0; \quad \psi_1(\infty)=0;$$

дістанемо функціональні рівняння (11)–(14) з такими правими частинами:

$$F_1(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sigma f_1 \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{\delta_1}{2(1-\nu)} (2C+\beta_1) - (C+\beta_1) - 6\lambda(\Gamma+\alpha_1+\Gamma'\zeta^2);$$

$$F_2(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sigma f_3 \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{\delta_1\delta}{2(1-\nu)} (\Gamma+\alpha_1-\Gamma'\zeta^2-x_1\Gamma+\bar{\Gamma}'\zeta^{-2}) -$$

$$-2\lambda\delta(C+\beta_1) - \left(12\lambda^2\delta + \frac{\delta_1}{1-\nu} \right) (\Gamma+\alpha_1+\Gamma'\zeta^2); \quad (27)$$

$$F_3(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} \bar{f}_1 \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{\delta_1}{2(1-\nu)} (2C+\beta_1) + xC + 6\lambda(\bar{\Gamma}'\zeta^{-2}-\Gamma);$$

$$F_4(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} \bar{f}_3 \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} + \frac{\delta_1\delta}{2(1-\nu)} (\Gamma'\zeta^2-\Gamma-\alpha_1+x_1\Gamma-\bar{\Gamma}'\zeta^{-2}) +$$

$$+ 2\lambda\delta xC + \left(12\lambda^2\delta + \frac{\delta_1}{1-\nu} \right) (\bar{\Gamma}'\zeta^{-2}-\Gamma),$$

де Γ і Γ' — дійсна та комплексна сталі, що визначають однорідний плоский напружений стан пластинки на безмежності; C — визначає згинаючі моменти на безмежності.

Для визначення сталих α_1 і β_1 помножимо відповідні граничні умови на $d\sigma/2\pi i(\sigma-\zeta)$ і проінтегруємо їх по γ при $|\zeta| < 1$. З одержаної системи при $\zeta=0$ знаходимо:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= [\zeta \psi_1(\zeta)]_{\zeta=0} = \frac{1-\nu}{\delta_1} \frac{2\lambda\delta(1-\nu)L_1 - (1-\nu+\delta_1)L_2}{12\lambda^2\delta(1-\nu) + (\delta+1)(1-\nu+\delta_1)}; \\ \beta_1 &= [\zeta \psi(\zeta)]_{\zeta=0} = \frac{1-\nu}{\delta_1} \frac{6\lambda(1-\nu)L_2 + [12\lambda^2\delta(1-\nu) + \delta_1(\delta+1)]L_1}{12\lambda^2\delta(1-\nu) + (\delta+1)(1-\nu+\delta_1)}.\end{aligned}\quad (28)$$

Тут

$$\begin{aligned}L_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f_1(\sigma) d\sigma + \frac{2}{1-\nu} (\delta_1 - 1 - \nu) C + 12\lambda\Gamma; \\ L_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f_3(\sigma) d\sigma - 2 \left(\frac{\delta_1\delta}{1+\nu} - 12\lambda^2\delta - \frac{\delta_1}{1-\nu} \right) \Gamma - 4\lambda\delta \frac{1+\nu}{1-\nu} C.\end{aligned}\quad (29)$$

Доведено, що α_1 та β_1 — дійсні величини.

Систему рівнянь (11)–(14) можна звести до вигляду (17)–(18),

де

$$\begin{aligned}R_1(\zeta) &= \frac{1}{\pi} \int \operatorname{Im} [\sigma f_2(\sigma)] \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} + \alpha_1 + \Gamma\zeta^2 + \bar{\Gamma}\zeta^{-2}; \\ R_2(\zeta) &= \frac{1}{\pi} \int \operatorname{Im} \{ \sigma [f_1(\sigma)] - 6\lambda f_2(\sigma) \} \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} + (\kappa+1)C + \beta_1; \\ V_1(\zeta) &= \frac{(1-\nu)^2}{2\delta_1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f}_1(\sigma) d\sigma}{\sigma(\sigma-\zeta)} + (1+a_{11})C - a_{12}[\bar{\Gamma}\zeta^{-2} - \Gamma] - \\ &\quad - \frac{(1-\nu)}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \operatorname{Im} \{ \sigma [f_1(\sigma) - 6\lambda f_2(\sigma)] \} \frac{\sigma-2\zeta}{(\sigma-\zeta)^2} d\sigma; \\ V_2(\zeta) &= - \frac{1-\nu^2}{2\delta_1\delta} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f}_3(\sigma) d\sigma}{\sigma(\sigma-\zeta)} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \operatorname{Im} [\sigma f_3(\sigma)] \frac{(\sigma-2\zeta)}{(\sigma-\zeta)^2} d\sigma + \\ &\quad + a_{21}C + a_{22}\bar{\Gamma}\zeta^{-2} + (1+a_{22})\Gamma.\end{aligned}\quad (30)$$

Вирази для коефіцієнта a_{ij} дістанемо з формул (20), якщо в них замінимо δ та δ_1 на $-\delta$ та $-\delta_1$.

Аналогічно (25) розв'язок для безмежної пластинки запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}\Phi(\zeta) &= \frac{1}{k_1 - k_2} \left\{ \zeta^{\mu_1} \int_{\zeta}^{\infty} \zeta^{-\mu_1} (k_2 V_1 - V_2) d\zeta + \zeta^{\mu_2} \int_{\zeta}^{\infty} \zeta^{-\mu_2} (V_2 - k_1 V_1) d\zeta \right\}; \\ \Phi_1(\zeta) &= \frac{1}{k_1 - k_2} \left\{ k_1 \zeta^{\mu_1} \int_{\zeta}^{\infty} \zeta^{-\mu_1} (k_2 V_1 - V_2) d\zeta + k_2 \zeta^{\mu_2} \int_{\zeta}^{\infty} \zeta^{-\mu_2} (V_2 - k_1 V_1) d\zeta \right\},\end{aligned}\quad (31)$$

де $k_{1,2}$ і $\mu_{1,2}$ визначаються формулами (23).

5. Приклад. Безмежна пластинка з несиметрично підкріпленням круговим отвором знаходиться в умовах одностороннього згину на безмежності: $M_x^\infty = M$; $M_y^\infty = H_{xy}^\infty = 0$.

Комплексні потенціали, що визначають основний прогин w^0 мають вигляд

$$\begin{aligned}\varphi_0(z) &= -\frac{MR}{4D} \left[\frac{1}{2(1+\nu)} \cdot \frac{z}{R} + \frac{1}{3+\nu} \frac{R}{z} \right]; \\ \psi_0(z) &= -\frac{MR}{4D} \left[\frac{1}{1-\nu} \frac{z}{R} + \frac{1}{3+\nu} \frac{R^3}{z^3} + \frac{1}{1-\nu} \frac{R}{z} \right].\end{aligned}$$

Обчислюємо функції $V_1(\zeta)$ та $V_2(\zeta)$ для цього випадку

$$V_1(\zeta) = -\frac{MR}{2(3+\nu)} \frac{1}{\zeta^2}; \quad V_2(\zeta) = 0.$$

Розв'язок задачі знаходимо у вигляді:

$$\begin{aligned}\varphi(z) + \varphi_0(z) &= -\frac{MR}{4D} \left[\frac{1}{2(1+\nu)} \frac{z}{R} + b_1 \frac{R}{z} \right]; \\ \psi(z) + \psi_0(z) &= -\frac{MR}{4D} \left[\frac{1}{1-\nu} \frac{z}{R} + d_1 \frac{R}{z} + d_3 \frac{R^3}{z^3} \right]; \\ \varphi_1(z) &= \frac{12RM\lambda(1-\nu^2)\delta}{h^2 \Delta_2} \cdot \frac{R}{z}; \\ \psi_1(z) &= \frac{12RM\lambda(1-\nu)}{h^2} \left\{ \frac{2(1+\nu)\delta R^3}{\Delta_2 z^3} - \frac{\delta}{(1+\nu^2)\Delta_1} \frac{1}{z} \right\}.\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}b_1 &= \frac{1}{\Delta_2} \{ [(3+\nu)\delta + (1+\nu)] [(\delta_1 + 1 - \nu) + 12\lambda^2\delta(3+\nu)(1-\nu)] \}; \\ d_1 &= \frac{1}{(1+\nu)\Delta_1} \{ (1+\nu)(\delta + 1) - [12\lambda^2\delta(1-\nu) + \delta_1(\delta + 1)] \}; \\ d_3 &= \frac{1}{(1-\nu)\Delta_2} \{ [(3+\nu)\delta + (1+\nu)] [(3-\nu)\delta_1 + (1-\nu)^2] + 12\lambda^2\delta(1-\nu^2)(3-\nu) \}; \\ \Delta_1 &= 12\lambda^2\delta(1-\nu) + (\delta + 1)(1-\nu + \delta_1); \\ \Delta_2 &= [(3+\nu)\delta + (1+\nu)] [(5+\nu)\delta_1 + (3+\nu)(1-\nu)] + 12\lambda^2\delta(5+\nu)(1-\nu^2).\end{aligned}$$

При $\lambda=0$ одержуємо розв'язок для симетричного кільця ([2], стор. 208). При цьому $U(x, y) \equiv 0$.

У роботі [3] розглянута задача про підкріплення кругового отвору безмежної пластинки несиметричним ребром. Розв'язок знайдено в комплексних рядах Фур'є для випадків двостороннього згину або розтягу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
2. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. «Наукова думка», К., 1964.
3. Тарасенко О. П. Концентрация напряжений біля несиметрично підкріпленого отвору пластинки. Доповіді АН УРСР, А, № 12, 1967.
4. Флейшман Н. П. Изгиб произвольно нагруженной тонкой плиты с подкрепленной круговой границей. «Прикладная механика», 1966, т. II, в. 8.

МАТЕМАТИКА

Марія Д. Мартиненко, Михайло Д. Мартиненко. Про тривимірні гармонічні функції в областях з «щілинами»	3
М. Я. Бартіш. Про одну модифікацію різницевого аналогу методу лінеаризації	8
С. В. Дениско. ν -поверхні прямолінійної конгруенції	14
Л. О. Старокадомський. Про наближений розв'язок задачі Діріхле на площині з щілинами	17
Л. О. Старокадомський. Про розв'язування інтегрального рівняння першого роду з логарифмічним ядром і задачі Діріхле на площині з щілиною	22
Б. М. Кордуба. Одна модифікація методу прямих	25
О. С. Кованько. Про наближення S_p майже періодичних функцій поліномами Бохнера—Фейєра	29
Г. Г. Цегелик. До локалізації нулів рядів Лорана за допомогою параметрів	32
У. А. Мишковець. Сумування узагальнених рядів Фур'є методом Пуассона—Абеля	33
Г. Л. Буймола. До питання про точність графічних операцій	35

МЕХАНІКА

Д. В. Гриліцький, М. І. Гіль. Про одну осесиметричну задачу термopужності для шару	42
Т. Л. Мартинович, В. П. Вушко. Про один спосіб розв'язування змішаних задач для однорідних і кусочно-однорідних середовищ	49
Т. Л. Мартинович, І. О. Ніщенко. Про один спосіб розв'язування задачі згину анізотропних плит	54
Є. І. Лунь, А. О. Сяський. До визначення концентрації напружень біля жорсткого кільця на поверхні кругового циліндра	58
Д. В. Гриліцький, Б. І. Попович. Контактна задача про пружну взаємодію анізотропної пластинки з круглим ізотропним ядром	61
О. Б. Блажієвська. Вільні коливання замкнутої сферичної оболонки на поверхні рідини	66
І. О. Прусов. Про один розв'язок деяких крайових задач для гармонічних функцій	70
Н. П. Флейшман, Л. Й. Ощипко. Пружна рівновага довільно навантаженої пластинки з несиметрично підкріпленою круговою границею	76

*Вестник Львовского ордена Ленина
государственного университета им. Ивана Франко*

Серия механико-математическая, выпуск 5

(на украинском языке)

Объем 5,75 физ. печ. л., 7,2 уч.-изд. л. Тираж
600. Цена 72 коп. Зак. 2277. Издательство
Львовского университета. Львов, Университет-
ская 1.

Областная книжная типография Львовского об-
ластного управления по печати. Львов, Стефа-
ника, 11.

Редактор Л. О. Ш и р я к о в а
Технічний редактор Т. В. С а р а н ю к
Коректор С. Я. М и х а й л е н к о

БГ 08382. Здано до набору 11. VIII 1970 р.
Підписано до друку 3. XI 1971 р. Формат
70×108^{1/16}. Папер. арк. 2,875. Прив. друк. арк. 8,05.
Видавн. арк. 7,2. Тираж 600. Ціна 72 коп.
Зам. 2277.

Видавництво Львівського університету
Львів, Університетська, 1.

Обласна книжкова друкарня Львівського облас-
ного управління по пресі. Львів, Стефаника, 11.



УДК 517.944.947

О трехмерных гармонических функциях в областях со «щелями». Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д. Про тривимірні гармонічні функції в областях з «щілинами». Вісник Львівського держ. ун-ту, серія механіко-математична, вип. 5. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1971, стор. 3—6 (укр.)

Доказывается, что при некоторых допущениях относительно гармонической функции она может быть представлена в пространстве с разрезом вдоль незамкнутой поверхности Ляпунова, ограниченной гладкой кривой, в виде потенциала простого или двойного слоя. Полученный результат обобщает известный результат классической теории потенциала. Библ. 2.

УДК 518:517,91/94

Об одной модификации разностного аналога метода линеаризации. Бартіш М. Я. Про одну модифікацію різницевого аналогу методу лінеаризації. Вісник Львівського держ. ун-ту, серія механіко-математична, вип. 5. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1971, стор. 6—13 (укр.)

Для решения нелинейной краевой задачи $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, $g(x_0, x_1) = d$ предлагается класс вычислительных схем, которые являются модификациями метода линеаризации. Доказана сходимость и дан алгоритм выбора оптимальной вычислительной схемы из предложенного класса схем, решения конкретной краевой задачи. Библ. 5.

УДК 513.015.6

v-поверхности прямолинейной конгруэнции. Дениско С. В. v-поверхні прямолінійної конгруєнції. Вісник Львівського держ. ун-ту, серія механіко-математична, вип. 5. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1971, стор. 14—16 (укр.)

Показано, что поверхностью v прямолинейной конгруэнции называется ее линейчатая поверхность, расстояния между бесконечно близкими образующими которой сохраняются при отображении, сохраняющем направления лучей, одной конгруэнции на другую.

Изучаются специальные сети поверхностей v прямолинейной конгруэнции в трехмерном евклидовом пространстве. Библ. 3.

УДК 517.9

О приближенном решении задачи Дирихле на плоскости со щелями. Старокадомський Л. О. Про наближений розв'язок задачі Діріхле на площині з щілинами. Вісник Львівського держ. ун-ту, серія механіко-математична, вип. 5. Вид-во Львівського держ. ун-ту, Львів, 1971, стор. 17—21 (укр.)

Разрабатывается метод решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости со щелями, предложенный Мусхелишвили, в направлении применения его к задаче численного расчета.

Получено обоснование метода приближенного решения указанной задачи Дирихле путем сведения к сингулярному интегральному уравнению первого рода. Даны рекомендации к приближенному решению этого уравнения и задачи Дирихле. Описан численный пример. Библ. 2.

О решении интегрального уравнения первого рода с логарифмическим ядром и задачи Дирихле на плоскости со щелью. Старокадомський Л. О. Про розв'язування інтегрального рівняння першого роду з логарифмічним ядром і задачі Діріхле на площині з щілиною. Вісник Львівського держ. ун-ту, серія механіко-математична, вип. 5. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1971, стор. 22—25 (укр.)

Дается полное решение уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \mu(t) \ln |t-x| dt = f(x) - \alpha_0; \quad |x| \leq a$$

где α_0 — некоторая константа, неопределенная заранее либо предварительно зафиксированная (например, $\alpha_0=0$). Отмечается неудовлетворительность решения этого уравнения (при $\alpha_0=0$), приведенного в известной книге И. Я. Штаермана «Контактные задачи теории упругости» (М.—Л., 1949 г.). Делаются выводы относительно представимости гармонической вне разреза $[-a, a]$ функции регулярной или с заданным ростом на бесконечности с помощью логарифмического потенциала. Библ. 6.

Одна модификация метода прямых. Кордуба Б. М. Одна модифікація методу прямих. Вісник Львівського держ. ун-ту, серія механіко-математична, вип. 5. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1971, стор. 25—29 (укр.)

Рассматривается модификация метода прямых, дающая для некоторой области, граница которой состоит из двух прямых, произвольно расположенных в плоскости, и произвольных гладких линий, возможность решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона без сноса граничных условий. Илл. 2. Библ. 5.

О приближении S_p почти периодических функций полиномами Бохнера—Фейера. Кованько О. С. Про наближення S_p майже періодичних функцій поліномами Бохнера—Фейера. Вісник Львівського держ. ун-ту, серія механіко-математична, вип. 5. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1971, стор. 29—31 (укр.)

Дается систематический метод полиномов приближения Бохнера—Фейера для данной S_p почти периодической функции. Последовательность полиномов строится сначала усредненной функции по Стеклову от данной S_p почти периодической функции. Усредненная функция оказывается почти периодической функцией Бора, для нее строится последовательность полиномов Бохнера—Фейера, из которой удастся некоторой деформацией построить последовательность, которая оказывается сходящейся в смысле метрики S_p к данной S_p почти периодической функции.

УДК 518:512.39

К локализации нулей рядов Лорана с помощью параметров. Цегелик Г. Г., До локалізації нулів рядів Лорана за допомогою параметрів. Вісник Львівського держ. ун-ту, серія механіко-математична, вип. 5. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1971, стор. 32—33 (укр.)

Рассматривается локализация нулей функций, представленных рядами Лорана

$$f(z) = \sum_{v=-m}^n A_v z^{\lambda_v} \quad (m \leq \infty, n \leq \infty),$$

где все $A_i \neq 0$ ($-m \leq i \leq n$), $\{\lambda_n\}$ — произвольная монотонно возрастающая последовательность целых чисел. С помощью параметров устанавливаются новые достаточные условия существования областей в виде колец, которые не содержат нулей заданного ряда Лорана или содержат их определенное количество. Библи. 1.

УДК 517.512

Суммирование обобщенных рядов Фурье методом Пуассона—Абея. Мишковець У. А. Сумування узагальнених рядів Фур'є методом Пуассона—Абея. Вісник Львівського держ. ун-ту, серія механіко-математична, вип. 5. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1971, стор. 33—35 (укр.)

Обобщается известный метод Пуассона—Абея суммирования рядов Фурье периодических функций на почти периодические функции Бора и непрерывные почти периодические функции Левитана.

Метод доказательства, основанный на результатах автора, (РЖМат, 7 Б 84, 1969) автоматически, как частный случай, переносится на непрерывные периодические функции. Библи. 4.

УДК 513.491

К вопросу о точности графических операций. Б у й мола Г. Л. До питання про точність графічних операцій. Вісник Львівського держ. ун-ту, серія механіко-математична, вип. 5. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1971, стор. 35—41 (укр.)

С применением методов теории вероятностей рассматривается вопрос о точности операций точкографом (инструментом с помощью которого фиксируются графические точки в графической плоскости). Илл. 3. Библи. 4.

УДК 517.3

Об одной осесимметричной задаче термоупругости для слоя. Гриліцький Д. В., Гіль М. І. Про одну осесиметричну задачу термопружності для шару. Вісник Львівського держ. ун-ту, серія механіко-математична, вип. 5. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1971, стор. 42—49 (укр.)

Рассматривается осесимметричная задача термоупругости для неограниченного плоскопараллельного слоя конечной толщины в предположении смешанных граничных условий для температуры на верхней границе слоя и нулевой температуре на нижней и при нулевых внешних напряжениях. Определено температурное поле и температурные напряжения. Илл. 3. Библи. 9.

УДК 539.384

Об одном способе решения смешанных задач для однородных и кусочно-однородных сред. Мартинювич Т. Л., Вушко В. П. Про один спосіб розв'язування змішаних задач для однорідних і кусочно-однорідних середовищ. Вісник Львівського держ. ун-ту, серія механіко-математична, вип. 5. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1971, стор. 49—54 (укр.)

Предложен метод решения смешанных задач для однородных и кусочно-однородных упругих сред плоской теории упругости, основывающийся на представлении граничных условий в форме контурных интегралов, содержащих произвольную функцию, голоморфную в рассматриваемой области, когда одно с граничных условий содержит только функцию напряжения Φ , а второе служит для определения функции Ψ . В качестве приложения метода рассмотрена задача о напряженном состоянии эллиптического конфокального кольца со смешанными граничными условиями. Библ. 3.

УДК 593.3

Об одном способе решения задачи изгиба анизотропных плит. Мартинювич Т. Л., Ніщенко І. О. Про один спосіб розв'язування задачі згину анізотропних плит. Вісник Львівського держ. ун-ту, серія механіко-математична, вип. 5. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1971, стор. 54—58 (укр.)

Предложен метод решения задачи изгиба тонких анизотропных плит с криволинейным отверстием, подкрепленным тонким упругим стержнем. Получены граничные условия в форме контурных интегралов, содержащих произвольную функцию, голоморфную в рассматриваемой области. Как пример использования предлагаемого метода рассмотрена задача об изгибе моментами M_x^∞ , M_y^∞ анизотропной плиты с эллиптическим отверстием, край которого подкреплен упругим стержнем. Илл. 2. Библ. 4.

УДК 539.311

К определению концентрации напряжений около жесткого кольца на поверхности кругового цилиндра. Лунь Є. І., Сяський А. О. До визначення концентрації напружень біля жорсткого кільця на поверхні кругового циліндра. Вісник Львівського держ. ун-ту, серія механіко-математична, вип. 5. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1971, стор. 58—61 (укр.)

Решается задача о концентрации напряжений в цилиндрической оболочке с круговым вырезом, подкрепленным жестким кольцом, с использованием уравнений уточненной теории оболочек типа Тимошенко, которые некоторым образом учитывают деформации поперечных сдвигов и дают возможность удовлетворить пяти граничным условиям на контуре отверстия. Используется метод, предложенный Г. Н. Савиным, А. Н. Гузем, А. К. Приварниковым и В. М. Чеховым. Библ. 8.

УДК 539.311

Контактная задача об упругом взаимодействии анизотропной пластинки с круглым изотропным ядром. Гриліцький Д. В., Попович Б. І. Контактна задача про пружну взаємодію анізотропної пластинки з круглим ізотропним ядром. Вісник Львівського держ. ун-ту, серія механіко-математична, вип. 5. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1971, стор. 61—66 (укр.)

Рассматривается упругое равновесие анизотропной пластинки с впаиным круговым изотропным ядром при наличии нескольких разрезов на линии спая и при действии сосредоточенных силовых и моментных факторов, приложенных в области пластинки. Предполагается, что края разрезов свободны от внешних напряжений и в процессе деформации не контактируют.

Задача сведена к рассмотрению системы двух сингулярных интегральных уравнений, решаемой в замкнутом виде.

Рассмотрен числовой пример. Илл. 2. Библ. 5.

УДК 533.6.013.42

Свободные колебания замкнутой сферической оболочки на поверхности жидкости. Блажієвська О. В. Вільні коливання замкненої сферичної оболонки на поверхні рідини. Вісник Львівського держ. ун-ту, серія механіко-математична, вип. 5. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1971, стор. 66—70 (укр.)

Исследуются собственные колебания замкнутой безмоментной сферической оболочки, частично погруженной в идеальную несжимаемую жидкость. Для определения частот и форм собственных колебаний оболочки получена система несвязанных линейных однородных интегральных уравнений, ядра которых линейно зависят от параметра. Характеристические числа каждого из полученных уравнений определяют частоты собственных колебаний с тем или иным числом узловых меридианов. Интегральные уравнения решены методом Бубнова—Гальоркина. Илл. 1. Библ. 5.

УДК 517.944

Об одном решении некоторых краевых задач для гармонических функций. Прусов І. О. Про один розв'язок деяких крайових задач для гармонічних функцій. Вісник Львівського держ. ун-ту, серія механіко-математична, вип. 5. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1971, стор. 70—76 (укр.)

Дано простое решение краевых задач Дирихле, Неймана и смешанной задачи для области, ограниченной окружностью и для бесконечной плоскости, разрезанной вдоль дуги некоторого радиуса. Кроме того, приведены общие формулы, позволяющие аналогичным способом получить решение тех же задач для анизотропной полуплоскости и анизотропной плоскости с разрезами на отрезках прямой. Во всех рассматриваемых случаях считается, что искомая гармоническая функция в некоторой точке области ее определения имеет логарифмическую особенность. Библ. 6.

УДК 539.+624.073:531

Упругое равновесие произвольно нагруженной пластинки с несимметрично подкрепленной круговой границей. Флейшман Н. П., Ощипко Л. Й. Пружна рівновага довільно навантаженої пластинки з несиметрично підкріпленою круговою границею. Вісник Львівського держ. ун-ту, серія механіко-математична, вип. 5. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1971, стор. 76—83 (укр.)

Рассматривается изотропная пластинка, срединная плоскость которой занимает внутренность или внешность круга; край пластинки несимметрично подкреплён тонким упругим ребром: ось ребра смещена параллельно относительно срединной плоскости пластинки; ребро работает лишь на растяжение и изгиб из своей плоскости.

Методом интегралов типа Коши задача свелась к системе двух линейных дифференциальных уравнений для комплексных потенциалов, определяющих прогиб пластинки и функцию напряжений Эри. Решение получено в квадратурах при произвольной нагрузке. Библ. 4.

72 коп.