УДК 519.6

М.Я. Бартіш

ПРО МЕТОДИ ТИПУ НЬЮТОНА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І ЗАДАЧ НА ЕКСТРЕМУМ

В обчислювальній практиці, одним із широковживаних методів розв'язування нелінійних функціональних рівнянь

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

де $P(x)$ - оператор, який діє із банахового простору X в банахів простір Y, є метод Ньютона. Мабуть, вперше метод Ньютона для розв'язування функціональних рівнянь був досліджений Л.Канторовичем [1]. Далі число робіт по застосуванню методів типу Ньютона і їх модифікацій постійно зростало і сьогодні налічується десятки, а може й сотні тисяч робіт. У цій галузі певні дослідження проведені і нами. В [2] запропоновано загальну методику побудови методів типу Ньютона, типу Рунге, різницеві методи, а також встановлено зв'язок між методами одного й того ж порядку збіжності. При побудові та дослідженні нових методів значну увагу ми приділяли їх ефективності в сенсі числа обчислень. Той метод кращий, який для знаходження розв'язку задачі потребує менше обчислень (менше часу). Побудовано і досліджено метод з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$ [3]. Пізніше цей метод було розглянуто в працях Лаазонена [4], Вернера [5] та інших авторів. У [6] запропоновано загальну методику побудови певних класів рекурсивних методів і дано рекомендації по вибору кращого методу в сенсі кількості обчислень для розв'язування конкретної задачі (1). В [7] розглянуто нову модифікацію методу Ньютона, яка для відповідних класів задач краща від класичного методу Ньютона. Для запропонованих методів, крім теоретичного дослідження проведено значну роботу по практичній реалізації. Для цього було використано як тестові приклади, так і задачі з реального середовища. Практичні експерименти повністю підтвердили теоретичні результати.

Розглянуті методи з успіхом можна використовувати для розв'язування задач на екстремум. Однак, враховуючи специфіку таких задач, доцільно розглянути і певні нові модифікації для розв'язування задач типу

$$f(x) \to \min \qquad x \in R^m \tag{2}$$

Для знаходження розв'язку задачі (2) розглянемо алгоритм

$$x_{k+1} = x_k - \left[f''\left(\lambda x_k + (1-\lambda)u_k\right)\right]^{-1} f'\left(x_k\right), \tag{3}$$

$$\lambda \in (0,1), \quad k = 0,1,\ldots,$$

де u_k - оператор, який породжує ітераційну формулу порядку

$1 \le \tau \le 2$, тобто $\|u_k - x_*\| \le c\|x_k - x_*\|^\tau$, де x_* - розв'язок (2), $c < \infty$

Теорема. *Нехай f сильно опукла функція і виконуються умови*

1. $m\|h\|^2 \le \left(f''(x)h_1h\right) \le M\|h\|^2$ *для* $x \in D, \quad h \in R^n$

$$0 < m \le M$$

2. Для $x, y \in D$, $\|f'''(x)\| \le N_3$

$$\|f'''(x) - f'''(y)\| \le N_4\|x - y\|$$

3. Початкове наближення x_0 *вибрано так, що виконується умова*

$$h_0 = K_0\eta_0 < 1,$$

де $K = \dfrac{1}{m}\left\{N_3\left[\left|\lambda - \dfrac{1}{2}\right| + (1-\lambda)C\eta_0^{\tau-1}\right] + \dfrac{1}{2}N_4\left(\left(\lambda + (1-\lambda)C\eta_0^{\tau-1}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\eta_0\right\}\right.$

$$\|f'(x_0)\| \le m\eta_0.$$

Тоді послідовність $\{x_k\}$, визначена по (3), збігається до розв'язку задачі (2) і справджується оцінка

$$\|x_k - x_*\| \le \frac{1}{K}h_0^{2^k-1}\eta_0.$$

Таким чином, послідовність $\{x_k\}$, визначена по (3), має квадратичну збіжність. Якщо у формулі (3) взяти $\lambda = \dfrac{1}{2}$, тоді при виконанні відповідних умов послідовність $\{x_k\}$, визначена з (3) має збіжність не нижче 1+τ, при цьому

$$\|x_k - x_*\| \le \frac{1}{K_1}h_0^{(\tau+1)^k-1}\eta_0,$$

де $K_1 = \frac{1}{m}\left\{\frac{1}{2}N_3C + \frac{1}{2}N_4\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}C\eta_0^{\tau-1}\right)^2 + \frac{1}{3}\right)\eta_0^{2-\tau}\right\}$.

На практиці ефективним виявився алгоритм (3) у випадку $\lambda = \frac{1}{2}$ та

$$u_k = x_k - \alpha_k f'(x_k)\,, \tag{4}$$

де $\alpha_k = \arg\min f(x_k - \alpha f'(x_k))$.

У даному випадку послідовність $\{x_k\}$, отримана по (3), має хоч і квадратичний порядок збіжності, однак для даної послідовності і послідовності $\{y_k\}$, отриманої по класичному методу Ньютона (λ=1), дійсне співвідношення

$$\frac{\|x_k - x_*\|}{\|y_k - x_*\|} \le Cq^{2^k}\,,$$ де $C < \infty$, q<1, хоча і близьке до 1.

Як показала практика, запропонований алгоритм (3) має певні переваги перед методом Ньютона, однак він, як і метод Ньютона, не завжди ефективний при мінімізації функцій типу яру, тому нами запропонований алгоритм

$$u_k = x_k - \alpha_k f'(x_k)\,;$$

$$v_k = x_k - \beta_k\left[f''(\lambda x_k + (1-\lambda)u_k\right]^{-1} f'(x_k)\,;$$

$$x_{k+1} = \frac{v_k - u_k}{2} + sign(f(u_k) - f(v_k))\left[\frac{u_k - v_k}{2} + \gamma_k(v_k - u_k)\right], \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{5}$$

Для визначення параметрів $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ можна використовувати один із відомих алгоритмів визначення довжини кроку в градієнтному методі.

Для практичної реалізації було вибрано тестові приклади [8]: функція Розенброка, функція Пауелла, різницевий аналог задачі про брахістохрону.

При цьому виявилось, що із ростом розмірності зростає ефективність методу (5). Наприклад, при n>12 для функцій Розенброка "працював " лише метод (5). Аналогічну картину мали і для інших функцій.

1. Канторович Л.В. О методе Ньютона. // Тр. Мат. ин-та им. Стеклова. 1949, Т.28, С. 104-144. 2. Бартиш М.Я. О методах типа Ньютона. //Сиб. мат. журн., 1973, Т.14, № 4. 3. Бартіш М.Я. Про один ітераційний метод розв'язку функціональних рівнянь. // Доп. АН УРСР,

1968, Т.30 № 5, С.387-391. 4. L a a s o n e n M . P . Ein uberquadratisch convergen der iterativer Algorithmus.// Ann Acad.Sei Fenu. Ser A. 1969. P.450. 5. W e r n e r W . *Über* ein iteratives Verfahren der Ordming $1+\sqrt{2}$ zur Nullstellenbestimmung. //ZAMM. 1979. -59., №3. -S. 86-87. 6. Б а р т и ш М . Я ., Щ е р б и н а Ю . Н . Итерационные формулы, полученные с помощью рекурсий.// Мат. сб. К.: Наукова думка, 1976. С. 50-53. 7. Б а р т и ш М . Я ., Ш а х н о С . М . О методе Ньютона с ускоренной сходимостью. // Вестн. Киев. ун-та "Моделирование и оптимизация сложных систем." 1987, Вып.6, С. 62-66. 8. Х и м м е л ь б л а у Д . Прикладное нелинейное программирование. // М.: Мир, 1975.

УДК 519.6:517.958

І.Є. Бернакевич

НЕСТАЦІОНАРНІ ПРОЦЕСИ В СИСТЕМІ «ЦИЛІНДРИЧНА ОБОЛОНКА - ІДЕАЛЬНА РІДИНА»

Розглядається осесиметрична задача поширення хвиль в циліндричній оболонці, заповненій рідиною, які зумовлені імпульсним навантаженням на торець оболонки. Поведінка оболонки описується лінійними співвідношеннями типу Тимошенка [5,6], для моделювання рідини використовується акустичне наближення [4]. Для розв'язування зв'язаної задачі використовується проекційно-сіткова схема, яка передбачає використання кусково-квадратичних апроксимацій методу скінченних елементів по просторових змінних та однокрокової рекурентної схеми інтегрування в часі. З огляду на праці [1-3], в яких здійснено варіаційну постановку задачі взаємодії оболонки обертання з обмеженим об'ємом рідини, побудову проекційно-сіткової схеми та її математичне обгрунтування, дана стаття конкретизує отримані результати для випадку циліндричної оболонки. Крім цього, здійснюється порівняльний аналіз результатів, отриманих для незаповненої оболонки та оболонки, заповненої рідиною.

Варіаційна задача. Розглянемо циліндричну оболонку постійної товщини h, радіуса R, висоти L, верхній край якої шарнірно опертий, а нижній - жорстко закріплений у масивній плиті. Нехай оболонка повністю заповнена нев'язкою стисливою рідиною.
