поглядів. Це дасть можливість збільшити якість отриманої інформації про значущість критеріїв.

УДК 519.681

Д.Б. Буй

ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЇ РЕКУРСІЇ

Викладені властивості операції рекурсії: її монотонність та неперервність, замкненість класів монотонних (неперервних) функцій відносно рекурсії. Рекурсія уточнює декларативні (неявні) засоби специфікації програм, що розглядаються в методі нерухомої точки програм [1-2]. Для випадку формальних мов рекурсія розглядалась у [3], під назвою метакомпозиції найменшої нерухомої точки рекурсія наводилась у [4]. Всі неозначувані позначення та поняття використовуються в розумінні [2]. Нижче $(D \to D^{/})$ - клас всіх тотальних функцій з множини D в множину $D^{/}$, $(D \xrightarrow[m]{} D^{/})$ - клас всіх тотальних монотонних функцій з частково впорядкованої множини (ч.в.м.) D в ч.в.м. $D^{/}$, $[D \to D^{/}]$ - клас всіх тотальних неперервних функцій з індуктивної множини D в індуктивну множину $D^{/}$. Рекурсія базується на наступній теоремі про нерухому точку.

Терема 1. *Всяка монотонна функція вигляду $f: D \to D$, де D індуктивна множина, має найменшу нерухому точку. Відображення **Fix:** $(D \xrightarrow[m]{} D) \to D$, що зіставляє монотонній функції її найменшу нерухому точку, монотонне.*

Для виведення рекурсії розглянемо наступне рівняння відносно невідомого x з параметром $y: x = f(y,x)$, де $f: D^{/} \times D \to D$, а D індуктивна множина. Якщо функція f монотонна за другим аргументом, при кожному значенні параметра y це рівняння має за теоремою 1 єдиний найменший розв'язок.

Нижче через $(D^{/} \times D \overset{2}{\underset{m}{\rightarrow}} D)$ позначимо підклас всіх функцій з класу $(D^{/} \times D \rightarrow D)$, які монотонні за другим аргументом; позначення $[D^{/} \times D \overset{2}{\rightarrow} D]$ розуміється аналогічно для неперервних функцій.

Означення 1. *Під* ***рекурсією*** *розуміємо операцію вигляду* $R:(D^{/} \times D \overset{2}{\underset{m}{\rightarrow}} D) \rightarrow (D^{/} \rightarrow D)$, *де* D *індуктивна множина, таку, що довільне значення* $R(f)(\overline{y}),\ \overline{y} \in D^{/}$ *є найменшим розв'язком рівняння при цьому значенні параметра.*

Встановимо зображення рекурсії через добуток та абстракцію Λ; згідно з [5], замість $\Lambda(f)$ будемо писати $\hat{f}$.

Твердження 1. *Абстракція вигляду*

$$\Lambda:(D^{/} \times D^{//} \rightarrow D) \rightarrow (D^{/} \rightarrow (D^{//} \rightarrow D)) \quad ,$$

де D *ч.в.м., мотонна. В припущенні часткової впорядкованості множин* $D^{//}, D$ *виконується еквівалентність: функція* f *монотонна за другим аргументом* $\Leftrightarrow$ *функція* $\hat{f}$ *є функцією вигляду:* $\hat{f}:D^{/} \rightarrow (D^{//} \underset{m}{\rightarrow} D)$. *У припущенні часткової впорядкованості множин* $D, D^{/}$ *виконується еквівалентність: функція* f *неперервна за першим аргументом* $\Leftrightarrow$ *функція* $\hat{f}$ *монотонна. Зокрема, в припущенні часткової впорядкованості всіх множин* $D, D^{/}, D^{//}$ *виконується еквівалентність: функція* f *монотонна (за всіма аргументами)* $\Leftrightarrow$ *функція* $\hat{f}$ *є монотонною функцією вигляду:*

$$\hat{f}:D^{/} \rightarrow (D^{//} \underset{m}{\rightarrow} D).$$

Твердження 2. *Для довільної функції* $f \in (D^{/} \times D \overset{2}{\underset{m}{\rightarrow}} D)$, *де* D *індуктивна множина, справедлива рівність* $R(f) = \hat{f} \circ \mathbf{Fix}$, *де* $\mathbf{Fix}$ *розуміється як у теоремі 1.*

Теорема 2. *Рекурсія є монотонною операцією. Клас монотонних функцій замкнений відносно рекурсії.*

Неперевність рекурсії спирається на її зображення та неперервність абстракції.

Твердження 3. *Абстракція вигляду*

$$\Lambda:(D^{/} \times D^{//} \to D) \to (D^{/} \to (D^{//} \to D)),$$

де D індуктивна множина, неперервна. В припущенні індуктивності множин $D, D^{//}$ виконується еквівалентність: функція f неперервна за другим аргументом $\Leftrightarrow$ функція $\hat{f}$ є функцією вигляду:

$$\hat{f}: D^{/} \to [D^{//} \to D].$$

В припущенні індуктивності множин $D, D^{/}$ виконується еквівалентність: функція f неперервна за першим аргументом $\Leftrightarrow$ функція $\hat{f}$ неперервна. Зокрема, в припущенні індуктивності всіх множин $D, D^{/}, D^{//}$ виконується еквівалентність: функція f неперервна (за всіма аргументами) $\Leftrightarrow$ функція $\hat{f}$ є неперервною функцією вигляду:

$$\hat{f}: D^{/} \to [D^{//} \to D].$$

Теорема 3. Клас неперервних (за всіма аргументами) функцій замкнений відносно рекурсії. Операції рекурсії вигляду

$$R:[D^{/} \times D \overset{2}{\to} D] \to (D^{/} \to D) \text{ } та \text{ } R:[D^{/} \times D \to D] \to [D^{/} \to D]$$

неперервні.

Досліджені властивості рекурсії використовуються для обгрунтування методу Гаусса розв'язання рівнянь в індуктивних множинах [6].

1. Манна З. Теория неподвижной точки программ // Кибернет. сб. Нов. сер. - М.: Мир, 1978.-Вып. 15. С.38-100. 2. Буй Д.Б., Редько В.Н. Программологические аспекты метода неподвижной точки // Кибернетика и ситсем. анализ. - 1994. - №5. С.158-167. 3. Редько В.Н. Некоторые вопросы теории языков // Кибернетика. - 1965. - №4. С.12-21. 4. Никитченко Н.С. Семантико-синтаксические структуры программ: Дис....канд.физ.мат.наук: 01.01.09. -К., 1980. 134 с. 5. Барендрегт Х. Его синтаксис и семантика. - М.:Мир, 1985. - 606с. 6. Буй Д.Б. Системи рівнянь в індуктивних множинах: операція рекурсії та метод Гаусса виключення невідомих // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. - 1997. - Вип.4.-С.118-123.