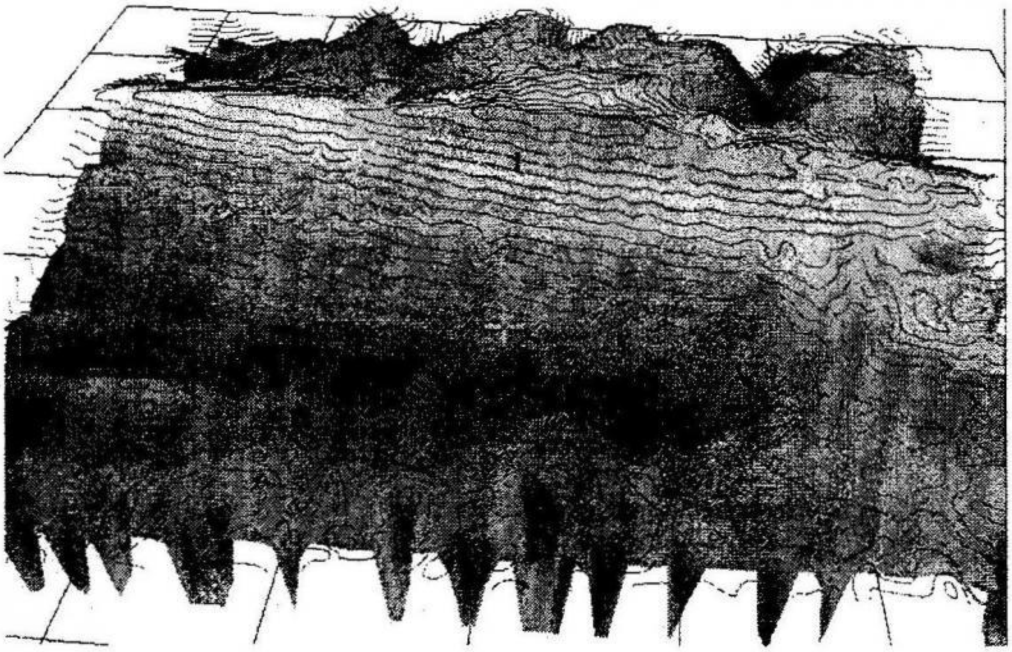


• Система для моделювання тривимірного рельєфу поверхні. Ця система дозволяє на базі shape-файла з ізолініями побудувати тривимірну модель рельєфу поверхні, на якій можна моделювати та досліджувати інші картографічні об'єкти та їх властивості. Зокрема, показати ізолінії та застосувати карту кольороподілу.

Розроблена система є деякою мірою відкритою модульною системою, що дозволяє розв'язувати або демонструвати результати задач, які пов'язані з картографічними даними.

УДК 517.648:519.68

П.С. Венгерський, Ю.Я. П'єц

ПРИСКОРЕННЯ ЗБІЖНОСТІ ІНТЕРВАЛЬНИХ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДОМІНУЮЧОЮ ДІАГОНАЛЛЮ

Відомо багато різних інтервальних методів для розв'язування систем нелінійних рівнянь, які знаходять всі дійсні корені в наперед заданих вхідних інтервалах. Але в більшості з них необхідно знаходити інтервальне розширення оберненої матриці похідних системи рівнянь. В даній роботі запропоновано тип інтервальних ітераційних методів, в яких, враховуючи структуру інтервальної матриці похідних, спрощується обчислення оберненої матриці.

1. Інтервальні методи. Починаючи з інтервального вектора $x^{(0)}$, розглянемо послідовність $x^{(k)}$, що обчислюється ітераційним методом:

$$\begin{cases} u^{(k+1)}=m(x^{(k)})-D\,(x^{(k)})^{-1}\{B\,(x^{(k)})(m(x^{(k)})-x^{(k)})+f\,(m(x^{(k)})) \\ x^{(k+1)}=x^{(k)}\cap u^{(k+1)},\ m(x^{(k)})\in x^{(k)},\ k\geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Обчислення інтервального розширення $f'(x^{(k)})$ займає багато часу, тому є сенс в методі (1) робити більше одного кроку обчислення локалізації для розв'язку без зміни $f'(x^{(k)})$. Кількість r кроків, які виконуються після обчислення $f'(x^{(k)})$, також може залежати від k: $r=r(k)$. Це приводить до наступного ітераційного процесу:

$$\begin{cases} x^{(0,0)}=x^{(0)}, \\ u^{(k+1,i)}=m(x^{(k)})-D_p(x^{(k)})^{-1}\{B_p(x^{(k)})(m(x^{(k)})-x^{(k,i-1)})+f_p(m(x^{(k)})) \\ x^{(k,i)}=x^{(k,i-1)}\cap u^{(k+1,i)},\ 1\leq i\leq r_k, \\ x^{(k+1)}=x^{(k,r_k)}, \\ x^{(k+1,0)}=x^{(k+1)},\ \mathrm{k}\geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

В методі (1) дійсний n-вектор $m(x^k)$ може бути вибраний будь-якою точкою з інтервалу x^k, найчастіше його вибирають серединою інтервалу. Опишемо метод для вибору $m(x^k)$ [1], який дозволяє прискорити збіжність методу знаходження розв'язку. Щоб сформулювати цей метод, введемо функцію K, яка визначається наступним чином: $\mathrm{K}(w,\ x)=\begin{cases} x_1,\ w<x_1, \\ w\ ,w\in x, \\ x_2\,,w>x_2. \end{cases}$

Для $\mathrm{x}=(\mathrm{x}_i)$ і $\mathrm{u}=(\mathrm{u}_i)$ визначимо $\mathrm{p(u,x)=(K(u_i,x_i))}$.

Використовуючи p, розглянемо метод який відрізняється від (1) лише правилом вибору $m(x^k)$.

Нехай задано фіксоване число $r\epsilon N_0$, і $m(x^k)^0$ є центром $\mathbf{x}^0$.Обчислимо інтервал $[a^{(k)},b^{(k)}]$, $0<a^{(k)}$, який містить всі власні значення матриць $m(H(x^k))$ і $m(V(x^k))$, де $f'(x)=H(x^k)+V(x^k)$. Далі обчислимо $L=2^r$ параметрів: $\alpha_i^{(k)}$, $1<=i<=L$.

Прийнявши $u^{k+1,0}=m(x^k)$, розв'язуємо L лінійних систем рівнянь:

$$M(\alpha_i^{(k)},x^k)(u^{k+1,i}-m(x^k))=N(\alpha_i^{(k)},x^k)(u^{k+1,i-1}-m(x^k))-f(m(x^k))$$
$$M(\alpha_i^{(k)},x^k):=(1/2\alpha_i^{(k)})\{m(H(x^k)+\alpha_i^{(k)}I)\}\{m(V(x^k)+\alpha_i^{(k)}I)\}$$
$$N(\alpha_i^{(k)},x^k):=(1/2\alpha_i^{(k)})\{m(H(x^k)-\alpha_i^{(k)}I)\}\{m(V(x^k)-\alpha_i^{(k)}I)\}$$

для $i=1,2,\ldots L$, $u^{k+1}=u^{k+1,L}$

$m(x^{k+1})=p(u^k,x^{k+1})$, $k=0,1,2,\ldots$

метод знаходження параметрів $\alpha_i^{(k)}$ складається з наступних процедур:

a) $a_0=a^{(k)}$, $b_0=b^{(k)}$, $a_{j+1}=\sqrt{a_j b_j}$, $b_{j+1}=(a_j+b_j)/2$, $i=0,(1)r-1$,

$s^{(0)}{}_1=\sqrt{a_r b_r}$,

b) обчислюємо для $j=0,1,2,\ldots r-1$:

$$s_i^{(j+1)}=s_i^{(j)}+\sqrt{s_i^{(j)2}-a_{r-1-j}b_{r-1-j}}\,,$$

$$s_{i+2^j}^{(j+1)}=s_i^{(j)}-\sqrt{s_i^{(j)2}-a_{r-1-j}b_{r-1-j}}\,.$$

c) $\alpha_i^{(k)}=s_i^{(k)}$; $i=1(1)l$; $l=2^r$.

Матриці $m(H(x^k))$ і $m(V(x^k))$ є дійсні матриці, що вибрані з $H(x^k)$ і $V(x^k)$ відповідно. Природно вибрати центри цих матриць.

Якщо замість похідної $f'(x)$ вибрати лінійну комбінацію

$1/4\, f'(m(x)) + 3/4\, f'(m(x)+ 2/3(x- m(x)))$,

то ми отримаємо так званий інтервальний метод типу Рунге з використанням покомпонентних перетинів.

2. Застосування. Розглянемо один клас задач, які можуть бути зведені до розв'язування системи нелінійних рівнянь даного виду. Нехай маємо задачу Діріхле:

$$\Delta u\equiv u_{ss}+u_{tt}=f(s,t,u),\qquad (s,t)\in\Omega$$

$u(s,t)=\phi(s,t)$ для $(s,t)\in\overline{\Omega}$.

Дискретизувавши її, отримаємо n^2 рівнянь:

$$f(x)=Ax+g(x)-b=0 \qquad (3),$$

де $x=(x_{i,j})\in V_{n^2}(R)$, A – блочна трьохдіагональна матриця, $g_j(x)=h^2 f(kh,\, lh,\, x_j)$, $j=lm+k$, $b=(b_{1,\ldots}\, b_m)^T$ - вектор, що містить граничні значення.

Розглянемо для конкретного прикладу наступну крайову задачу:

$$u_{ss}+u_{tt}=u^3/(s^2+t^2+1),\ \ (s,t)\in(0,1)\times(0,1)$$
$$u(s,0)=1,\qquad s\in[0,1],\ u(0,t)=1,\qquad t\in[0,1],$$
$$u(s,1)=2-e^s,\ s\in[0,1],\ u(1,t)=2-e^t,\ t\in[0,1],$$

Результати обчислень занесемо в наступну таблицю(точність = 10Е-10, n=5, r=4)

Інтервальний метод [illegible]	Типу Ньютона (1)	Рекурсивний [illegible] (2)	З вибором внутрішньої точки (3)
Кількість ітерацій	83	9	6
Час рахунку (с)	13.1	5.21	4.05

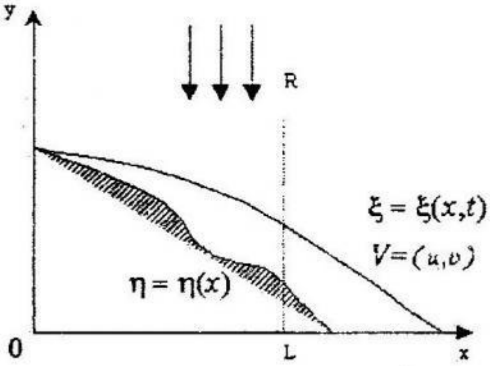
Аналізуючи результати обчислень, бачимо що спеціальний вибір внутрішньої точки суттєво прискорює збіжність методу, більше того, послідовність $m(x^{(k)})$ швидше збігається до розв'язку, ніж межі інтервалу. Ці методи можна ефективно використовувати для розв'язування систем нелінійних рівнянь, в яких матриця похідних системи має домінуючу діагональ.

1. C o r n e l i u s H. On the acceleration of an interval- arithmetic iteration method.// Siam journal on numerical analysis. 1983. Vol.20. № 5. P.1010-1022.

УДК 519.6:532.5

П.С. Венгерський, Н.Я. Смушак, Г. А.Шинкаренко

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СТОКУ ВОЛОГИ НА ПОВЕРХНІ ВОДОЗБОРУ



Математична модель руху вологи по поверхні водозбору залежить від багатьох факторів, а саме рельєфу поверхні, розташування підземних вод, кількості атмосферних опадів тощо, тому важливим є вивід основних рівнянь руху