$$u_{ss}+u_{tt}=u^3/(s^2+t^2+1),\quad (s,t)\in(0,1)\times(0,1)$$
$$u(s,0)=1,\qquad s\in[0,1],\ u(0,t)=1,\qquad t\in[0,1],$$
$$u(s,1)=2-e^s,\ s\in[0,1],\ u(1,t)=2-e^t,\ t\in[0,1],$$

Результати обчислень занесемо в наступну таблицю(точність = 10E-10, n=5, r=4)

Інтервальний метод	Типу Ньютона (1)	Рекурсивний [illegible] (2)	З вибором внутрішньої точки (3)
Кількість ітерацій	83	9	6
Час рахунку (с)	13.1	5.21	4.05

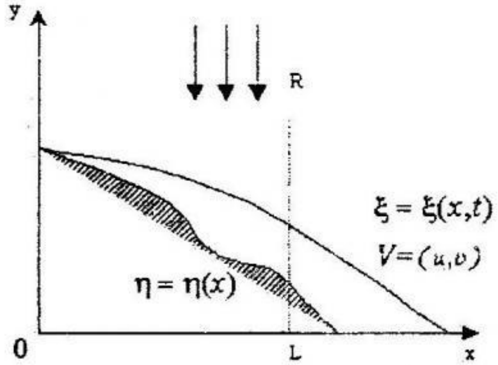
Аналізуючи результати обчислень, бачимо що спеціальний вибір внутрішньої точки суттєво прискорює збіжність методу, більше того, послідовність $m(x^{(k)})$ швидше збігається до розв'язку, ніж межі інтервалу. Ці методи можна ефективно використовувати для розв'язування систем нелінійних рівнянь, в яких матриця похідних системи має домінуючу діагональ.

1. C o r n e l i u s H. On the acceleration of an interval- arithmetic iteration method.// Siam journal on numerical analysis. 1983. Vol.20. № 5. P.1010-1022.

УДК 519.6:532.5

П.С. Венгерський, Н.Я. Смушак, Г. А.Шинкаренко

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СТОКУ ВОЛОГИ НА ПОВЕРХНІ ВОДОЗБОРУ



Математична модель руху вологи по поверхні водозбору залежить від багатьох факторів, а саме рельєфу поверхні, розташування підземних вод, кількості атмосферних опадів тощо, тому важливим є вивід основних рівнянь руху вологи. В даній роботі записано рівняння руху вологи для двовимірного випадку, здійснено перехід до одновимірної задачі та сформульовано варіаційну постановку даної задачі.

1.Основні рівняння руху вологи. Введемо систему декартових координат таким чином, щоб вісь y була спрямована вертикально вверх. Площина руху вологи розташована під кутом α до осі X. Тоді для опису руху вологи в площині x0y використаємо наступну систему рівнянь:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right); \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial v}{\partial y}\right); \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0; \qquad (1.3)$$

де u,v - складові швидкості; ρ - густина вологи; p - гідродинамічний тиск; k - коефіцієнт в'язкості; g - прискорення вільного падіння.

На верхній границі потоку $y=\xi(x,t)$ задано кінематичну умову

$$v+R=\frac{\partial \xi}{\partial t}+u_0\frac{\partial \xi}{\partial x}; \qquad (1.4)$$

де R - інтенсивність джерел притоку вологи; u_0 - горизонтальна складова швидкості точок вільної поверхні.

На нижній нерухомій границі $y=\eta(x)$ будемо вважати $u=0$ і задамо умову $v(\eta)=-I$, де I - інтенсивність інфільтрації води в грунт.

Оскільки рух вологи в напрямі осі y відіграє невелику роль, то всі величини, що входять в систему (1.1) - (1.3) можна усереднити по змінній y. Проінтегрувавши рівняння (1.2) від деякого фіксованого y до ξ, отримаємо

$$p(\xi)=\rho R\Lambda+p_\alpha+\rho g(\xi-y),$$

де Λ - швидкість притоку вологи, p_α - атмосферний тиск.

Усереднимо рівняння (1.1) по глибині потоку від ξ до η, враховуючи умову нестисливості (1.3) і кінематичну умову (1.4), отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\eta}^{\xi} u dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_{\eta}^{\xi} u^2 dy - u_0 R = -\frac{1}{\rho}\int_{\eta}^{\xi}\frac{\partial p}{\partial x}dy + \int_{\eta}^{\xi}\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy .$$

Введемо повні потоки та дотичне напруження

$$q_x = \int_{\eta}^{\xi} u dy ; \; q_y = \int_{\eta}^{\xi} v dy ; \; q_x = \widetilde{u}(\xi - \eta) ;$$

$$F_x = \int_{\eta}^{\xi}\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy = \frac{1}{\rho}\left(\tau_{вx} - \tau_{\partial x}\right),$$

де $\tau_{вx}$, $\tau_{\partial x}$ - дотичні напруження на дні і вільній поверхні потоку.

Після деяких перетворень отримаємо систему усереднених рівнянь руху. Позначивши $U = (\widetilde{u}, h)$, в матричній формі цю систему можемо записати у вигляді

$$A\frac{\partial U}{\partial t} + B\frac{\partial U}{\partial x} = F_R , \tag{1.5}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} \widetilde{u}h & gh \\ gh & \widetilde{u}g \end{pmatrix};$$

$$F_R = \begin{pmatrix} u_0 R - \widetilde{u}(R - I) - h\frac{\partial}{\partial x}(R\Lambda) - gh\frac{\partial \eta}{\partial x} - F_x \\ g(R - I) \end{pmatrix}.$$

Доповнимо ці рівняння початковими та крайовими умовами

$$\widetilde{u}\big|_{t=0} = u_* , \quad h\big|_{t=0} = h_* \;\; \text{на} \; [0, L] \tag{1.6}$$

$$\widetilde{u} = 0 , \;\; h = 0 \;\; \text{при} \;\; x = 0 . \tag{1.7}$$

2. **Ліанеризована початково-крайова задача.** Шукані функції $\widetilde{u}, h$ подамо у вигляді $\widetilde{u} = u_0 + \Delta u$, $h = h_0 + \Delta h$, де Δu та Δh - невідомі збурення характеристик потоку відносно відомих значень u_0 та h_0. Припускаючи, що квадратами збурень можна знехтувати внаслідок їх малості порівняно з самими збуреннями, отримаємо наступну ліанеризовану початково-крайову задачу для відшукання згаданих збурень:

$$\begin{cases} h_0 \dfrac{\partial \Delta u}{\partial t} + h_0 u_0 \dfrac{\partial \Delta u}{\partial x} + \left(h_0 \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + R - I \right) \Delta u + h_0 g \dfrac{\partial \Delta h}{\partial x} + \\ + \left(\dfrac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + g \dfrac{\partial h_0}{\partial x} + g \dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial x}(R\Lambda) \right) \Delta h = u_* R - F_x - \\ - \left(h_0 \dfrac{\partial u_0}{\partial t} + h_0 u_0 \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + h_0 g \dfrac{\partial h_0}{\partial x} + (R - I) u_0 + g \dfrac{\partial \eta}{\partial x} h_0 + h_0 \dfrac{\partial}{\partial x}(R\Lambda) \right); \\ h_0 \dfrac{\partial \Delta u}{\partial x} + \dfrac{\partial h_0}{\partial x} \Delta u + \dfrac{\partial \Delta h}{\partial t} + u_0 \dfrac{\partial \Delta h}{\partial x} + \dfrac{\partial u_0}{\partial x} \Delta h = R - I - \left(\dfrac{\partial h_0}{\partial t} + u_0 \dfrac{\partial h_0}{\partial x} + h_0 \dfrac{\partial u_0}{\partial x} \right); \\ \Delta u\big|_{t=0} = \Delta h\big|_{t=0} = 0; \\ \Delta u\big|_{x=0} = \Delta h\big|_{x=0} = 0. \end{cases}$$

3. Варіаційна задача. Введемо простори допустимих функцій.

$$V := \{ v \in H^1(D), v(0) = 0 \}, \qquad \Phi := \{ v \in H^1(D), v(0) = 0 \}.$$

$$\begin{cases} \textit{знайти пару } (u,h) \in L^2(0,T; V \times \Phi) \textit{ таку, що} \\ m_1(u', v) + a_1(u, v) + b_{11}(v, h) - b_{12}(v, h) = f_1(v), \quad \forall v \in V \\ m_2(h', \varphi) + a_2(h, \varphi) + b_{21}(u, \varphi) + b_{22}(u, \varphi) = f_2(\varphi), \quad \forall \varphi \in \Phi \\ m_1(u(0), v) = 0, \quad m_2(h(0), \varphi) = 0, \end{cases}$$

Тут введено наступні білінійні форми.

$$m_1(u,v) = \int_D h_0 uv dx ;$$

$$a_1(u,v) = \int_D \left(h_0 u_0 \frac{\partial u}{\partial x} v + \left(h_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + R - I \right) uv \right) dx ;$$

$$m_2(h,\varphi) = \int_D h\varphi dx ; \ a_2(h,\varphi) = -\int_D \left(u_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) h dx + u_0 \varphi h\big|_{x=L} ;$$

$$b_{11}(v,\varphi) = \int_D \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x}(h_0 + \eta) + \frac{\partial}{\partial x}(R\Lambda) \right) v\varphi dx + h_0 g v \varphi\big|_{x=L}$$

$$b_{12}(v,\varphi) = \int_D g \frac{\partial (h_0 v)}{\partial x} \varphi dx ; \qquad b_{21}(v,\varphi) = \int_D \frac{\partial h_0}{\partial x} v \varphi dx ;$$

$$b_{22}(v,\varphi) = \int_D h_0 \frac{\partial v}{\partial x} \varphi dx ;$$

$$f_1(v) = \iint_D \left(u_* R - F_x - \left(h_0 \frac{\partial u_0}{\partial t} + h_0 u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + h_0 g \frac{\partial h_0}{\partial x} + (R - I) u_0 + g \frac{\partial \eta}{\partial x} h_0 + h_0 \frac{\partial}{\partial x}(R\Lambda) \right) \right) v dx$$

;

$$f_2(v) = \iint_D \left(R - I - \left(\frac{\partial h_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h_0}{\partial x} + h_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right) v dx \; .$$

Дана задача розв'язується методом скінченних елементів з використанням кусково-лінійних апроксимацій.

УДК 517.6

П.С. Венгерський, В.М. Трушевський, П.С. Сеньо

ОЦІНКА ГЛИБИНИ РЕКУРСІЇ ОДНОГО КЛАСУ ДВОСТОРОННІХ МЕТОДІВ

Двосторонні методи у порівнянні з іншими ітераційними методами дають гарантовані оцінки наближення до точних розв'язків. Для оцінки параметрів цих методів можна використати зручний апарат інтервального аналізу. В даному дослідженні розглянуто двосторонні методи ньютонівського типу, в яких обернена матриця похідних наближається верхньою границею інтервального розширення відповідної матриці. Побудовано рекурсивну схему даного класу методів та обчислено оптимальну глибину рекурсії.

1. Методи. Розглянемо загальну ітераційну схему одного з видів двосторонніх методів[1] для розв'язування систем нелінійних рівнянь вигляду $f(x)=0$, де $f : D \subseteq V_n(R) \to V_n(R)$.

$$\begin{cases} y^{(k,0)} = y^{(k)}, y^{(k,r+1)} = y^{(k,r)} - P^{(k)} f(y^{(k,r)}), y^{(k+1)} = y^{(k,l+1)}, 0 \le r \le l, \\ x^{(k,0)} = x^{(k)}, x^{(k,r+1)} = x^{(k,r)} - P^{(k)} f(x^{(k,r)}), x^{(k+1)} = x^{(k,l+1)}, 0 \le r \le l, \\ P^{(k+1)} = P^{(k)} + P^{(k)} \sum_{\mu=1}^{m+1} (-1)^{\mu} [B(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}) P^{(k)} - I]^{\mu}, k \ge 0, l, m \in N. \end{cases} \quad (1.1$$

Будемо розглядати її при різних значеннях l та m ($l=0,\ m=0;\ l=0,\ m$-довільне; l,m - довільні). Матриця $P^{(k)}$ – це наближення оберненої