$$f_1(v)=\iint_D\left(u_*R-F_x-\left(h_0\frac{\partial u_0}{\partial t}+h_0u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}+h_0g\frac{\partial h_0}{\partial x}+(R-I)u_0+g\frac{\partial \eta}{\partial x}h_0+h_0\frac{\partial}{\partial x}(R\Lambda)\right)\right)vdx$$

;

$$f_2(v)=\iint_D\left(R-I-\left(\frac{\partial h_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial h_0}{\partial x}+h_0\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right)vdx\ .$$

Дана задача розв'язується методом скінченних елементів з використанням кусково-лінійних апроксимацій.

УДК 517.6

П.С. Венгерський, В.М. Трушевський, П.С. Сеньо

ОЦІНКА ГЛИБИНИ РЕКУРСІЇ ОДНОГО КЛАСУ ДВОСТОРОННІХ МЕТОДІВ

Двосторонні методи у порівнянні з іншими ітераційними методами дають гарантовані оцінки наближення до точних розв'язків. Для оцінки параметрів цих методів можна використати зручний апарат інтервального аналізу. В даному дослідженні розглянуто двосторонні методи ньютонівського типу, в яких обернена матриця похідних наближається верхньою границею інтервального розширення відповідної матриці. Побудовано рекурсивну схему даного класу методів та обчислено оптимальну глибину рекурсії.

1. Методи. Розглянемо загальну ітераційну схему одного з видів двосторонніх методів[1] для розв'язування систем нелінійних рівнянь вигляду $f(x)=0$, де $f:D\subseteq V_n(R)\to V_n(R)$.

$$\begin{cases} y^{(k,0)}=y^{(k)},y^{(k,r+1)}=y^{(k,r)}-P^{(k)}f(y^{(k,r)}),y^{(k+1)}=y^{(k,l+1)},0\le r\le l,\\ x^{(k,0)}=x^{(k)},x^{(k,r+1)}=x^{(k,r)}-P^{(k)}f(x^{(k,r)}),x^{(k+1)}=x^{(k,l+1)},0\le r\le l,\\ P^{(k+1)}=P^{(k)}+P^{(k)}\sum_{\mu=1}^{m+1}(-1)^{\mu}[B(x^{(k+1)},y^{(k+1)})P^{(k)}-I]^{\mu},k\ge 0,l,m\in N.\end{cases} \quad (1.1$$

Будемо розглядати її при різних значеннях l та m ($l=0,\ m=0;\ l=0,\ m$-довільне; l,m - довільні). Матриця $P^{(k)}$ – це наближення оберненої матриці до матриці $B(x^{(k)},y^{(k)})$, яка обчислюється як верхня оцінка відповідного інтервального розширення.

2. Оцінка глибини рекурсії. Для практичного застосування методів (1.1) важливим є питання вибору оптимальної глибини рекурсії (параметр l). Методику оцінки глибини рекурсії можна знайти в [2]. Для нашого випадку застосуємо інший підхід.

Встановимо глибину рекурсії методу (1.1) при $P^{(k)}=B(x^{(k)},y^{(k)})^{-1}$. Для цього оцінимо різницю $x^{(k,p+1)}-y^{(k,p+1)}$. Введемо позначення $A^{(k,p)}=A(x^{(k,p)},y^{(k,p)})$, тоді

$$x^{(k,p)}-y^{(k,p)}=(I-P^{(k)}A^{(k,p-1)})(x^{(k,p-1)}-y^{(k,p-1)})\,. \tag{2.1}$$

використовуючи це співвідношення для різних p, (2.1) перепишемо у вигляді

$$x^{(k,p+1)}-y^{(k,p+1)}=(I-P^{(k)}A^{(k,p)})(I-P^{(k)}A^{(k,p-1)})\cdot\ldots\cdot(I-P^{(k)}A^{(k)})\times$$
$$(x^{(k)}-y^{(k)}) \tag{2.2}$$

де $A^{(k)} = A^{(k,0)}$, $x^{(k)} = x^{(k,0)}$, $y^{(k)} = y^{(k,0)}$. Розкладемо різницю $I-P^{(k)}A^{(k,p)}$ наступним чином

$$I-P^{(k)}A^{(k,p)}=P^{(k)}B^{(k)}-P^{(k)}A^{(k,p)}=P^{(k)}(B^{(k)}-A^{(k,p)})\,.$$

Оцінимо норму

$$\left\|B^{(k)}-A^{(k,p)}\right\|\le M_1\left\|y^{(k)}-x^{(k)}\right\|,\ldots,\left\|B^{(k)}-A^{(k)}\right\|\le M_p\left\|y^{(k)}-x^{(k)}\right\|. \tag{2.3}$$

Тоді, використавши (2.2) та (2.3), запишемо

$$\left\|x^{(k,p+1)}-y^{(k,p+1)}\right\|\le L\left\|y^{(k)}-x^{(k)}\right\|^{p+2}. \tag{2.4}$$

Використовуючи (2.4), можемо зробити наступні оцінки

$$\left\|x^{(k)}-y^{(k)}\right\|\le L_1\left\|x^{(k-1)}-y^{(k-1)}\right\|^{p+2},\ldots,\left\|x^{(k+1)}-y^{(k+1)}\right\|\le L_0\left\|x^{(0)}-y^{(0)}\right\|^{(p+2)^{(k+1)}}$$

На n-му кроці будемо мати

$$\left\|x^{(n)}-y^{(n)}\right\|\le M_0\left\|x^{(0)}-y^{(0)}\right\|^{(p+2)^n} \tag{2.5}$$

Введемо позначення $\varepsilon=\left\|x^{(n)}-y^{(n)}\right\|, X_0=\left\|x^{(0)}-y^{(0)}\right\|$. Тоді (2.5) запишеться у вигляді

$$\varepsilon\le M_0\cdot X_0^{(p+2)^n}\,. \tag{2.6}$$

Нехай на обчислення $x^{(k)}$, $y^{(k)}$ (k=1,...,n) витрачається $N_l=N_{lx}+N_{ly}=2N_{lx}$ обчислень (операцій, інтервал часу), а на обчислення $x^{(k,i)}$, $y^{(k,i)}$ (i=1,...,p+1) $-N_2=N_{2x}+N_{2y}=2N_{2x}$ обчислень. Тоді на обчислення $x^{(k+1)}$, $y^{(k+1)}$ при відомих $x^{(k)}$, $y^{(k)}$ витрачається N_l+lN_2

обчислень. Починаючи з $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, для отримання $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ необхідно провести $n(N_1+lN_2)$ обчислень. Параметр p будемо вибирати так, щоб об'єм обчислень для отримання $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ був мінімальним. Знайдемо вигляд функції $n=n(p)$. Прологарифмувавши співвідношення (2.6), будемо мати

$$(l+2)^n = T, \text{ де } T = (\ln \varepsilon - \ln M_0) / \ln X_0.$$

Звідки

$$n = \ln T / \ln (l+2). \qquad (2.7)$$

Тоді на обчислення $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ витрачається $n(N_1+lN_2)$ $\ln\ T\ /\ \ln\ (l+2)$ обчислень.

Будемо рахувати параметр p неперервним аргументом, тоді необхідною умовою мінімуму обчислень є

$$\ln T\,\frac{(l+2)N_2\ln(l+2)-N_1-lN_2}{(l+2)\ln^2(l+2)}=0,$$

або

$$1+a / z = \ln z, \text{ де } z = l + 2,\ a = N_1 / N_2 - 2. \qquad (2.8)$$

Отже,оптимальна глибина рекурсії методу визначається зі співвідношення (2.8).

3. Застосування. Розглянемо тестову задачу

$$y^{//} = \sin y + y,\ y(0) = 1,\ \ y(1) = 1.$$

Дискретизувавши її, застосуємо метод (1.1) з різними параметрами l та m (n=20 - розмірність схеми; i - кількість ітерацій; t – час обчислень (мк.с.); $e = 10^{-10}$ - похибка обчислень)

m=1

Інтервали	L=0	L=1	L=2	L=3
[-1,1]	I=10 t=41	i=9 t=37	i=8 t=34	i=8 t=36
[-10,10]	I=11 t=44	i=9 t=38	i=9 t=40	i=8 t=37
[-100,100]	I=11 t=45	i=9 t=38	i=9 t=41	i=8 t=37

m=2

Інтервали	L=0	L=1	L=2	L=3
[-1,1]	i=10 t=52	i=9 t=48	i=8 t=44	i=8 t=47
[-10,10]	i=10 t=52	i=9 t=48	i=8 t=44	i=8 t=46
[-100,100]	i=10 t=57	i=9 t=48	i=8 t=44	i=8 t=46

m=3

Інтервали	L=0	L=1	L=2	L=3
[-1,1]	i=10 t=64	i=9 t=59	i=8 t=53	i=8 t=55
[-10,10]	i=10 t=64	i=9 t=59	i=8 t=53	i=8 t=54
[-100,100]	i=11 t=71	i=9 t=59	i=8 t=52	i=8 t=55

З отриманих результатів видно, що збіжність схеми (1.1) суттєво залежить від вибору параметрів l та m. При збільшенні параметрів m та l ми хочемо прискорити збіжність методу, але існують такі оптимальні значення m_0 і l_0, при збільшенні яких збіжність не покращується. Для даного прикладу $m_0=2$, $l_0=2$.

1. Венгерський П.С., Трушевський В.М., Сеньо П.С. Використання інтерваль-ного аналізу для побудови одного типу двосторонніх методів для розв'язування систем нелінійних рівнянь.Львів,1998.-24с.-Рукопис деп. в УкрНДІНТІ(в друці).
2. Давиденко Д.Е. О приложении метода вариации параметра к теории нелинейных функциональных уравнений// Укр.мат.журн. 1955., Т.7. №1.

УДК 517.6

В.Д. Вовк, Р.Б. Петришин, Г.А. Шинкаренко

ВЕРХІВКА СИСТЕМИ КЛАСІВ ПРОГРАМНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ

Застосування об'єктного підходу не має альтернативи при розробці складних програмних систем. Оскільки складність реалізації окремих чисельних методів, наприклад, методу скінченних елементів (МСЕ), сумнівів не викликає, то зрозумілими є намагання розробників використовувати засоби об'єктно-орієнтованого програмування при створенні своїх систем. Проте у більшості випадків це призводить до збільшення в загальному затрат на створення програмного продукту, а ефективність програми не тільки не зростає, а часто й зменшується. Причиною цього є те, що видима складність структури математичних методів належить до іншої