наближенням для створення загальноприйнятої структури класів чисельних методів.

Зрозуміло, що для покриття затрат на створення такої системи класів (як і будь-якої іншої програмної системи) потрібна певна "критична маса" організаційних заходів, програмних напрацювань і користувачів. Проте приклади використання відомих структур класів (наприклад, MFC фірми Microsoft) свідчать про необхідність та ефективність такої розробки.

УДК 519.6

В.Д. Вовк, Р.Б. Петришин, Г.А. Шинкаренко

РОЗВ'ЯЗУВАНІСТЬ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

1. Постановка початково-крайової задачі. Для дослідження закономірностей фізичних процесів у пружних тілах, де враховується скінченна швидкість поширення тепла, розглянемо початково-крайову задачу узагальненої термопружності, сформульовану Підстригачем та Коляно.

2. Варіаційна задача. Ввівши простори допустимих функцій та простори лінійних неперервних функціоналів, можемо сформулювати відповідну варіаційну задачу узагальненої термопружності:

$$\begin{cases} \text{задано } u_0 \in V, v_0 \in H, \theta_0 \in Z, q_0 \in R \square \in (l,\mu) \in L^2(0,T;V' \times G'); \\ \text{знайти трійку } \psi = (u,\theta,q) \in L^2(0,T;V \times G \times R) \text{ таку, що} \\ m(u''(t),v) + a(u'(t),v) + c(u(t),v) - b(\theta(t),v) = \rangle l(t),v\langle, \\ s(\theta'(t),\xi) + d(q(t),\xi) + b(\xi,u'(t)) = \rangle \mu(t),\xi\langle, \\ \tau_r k(q'(t),r) - d(r,\theta(t)) + k(q(t),r) = 0, \\ m(u'(0)-v_0,v) = 0, c(u(0)-u_0,v) = 0 \forall v \in V, \\ s(\theta(0)-\theta_0,\xi) = 0 k(q(0)-q_0,r) = 0 \forall \xi \in G, \forall r \in R. \end{cases} \tag{2.1}$$

Коефіцієнт $\tau_r \geq 0$ називається часом термічної релаксації і при $\tau_r = 0$ варіаційна задача узагальненої термопружності збігається з варіаційною задачею класичної термопружності.

3. Напівдискретизація Гальоркіна та енергетичне рівняння. Використовуючи напівдискретизацію Гальоркіна за просторовими змінними можемо записати задачу для знаходження розв'язку варіаційної задачі для якої маємо таке енергетичне рівняння і наступні енергетичні норми

$$\frac{1}{2}\|\psi_h(t)\|^2 + \int_0^t |\psi_h(\tau)|^2 d\tau = \int_0^t [\langle l(\tau), u_h'(\tau)\rangle + \langle \mu(\tau), \theta_h(\tau)\rangle] d\tau + \frac{1}{2}\|\psi_h(0)\|^2 \forall t \in [0,T], \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \|\psi_h(t)\|^2 := m(u_h'(t), u_h'(t)) + c(u_h(t), u_h(t)) + s(\theta_h(t), \theta_h(t)) + \tau_r k(q_h(t), q_h(t)), \\ |\psi_h(t)|^2 := a(u_h'(t), u_h'(t)) + k(q_h(t), q_h(t)) \forall \psi_h = (u_h, \theta_h, q_h) \in \Phi_h = V_h \times G_h \times R_h. \end{cases} \tag{3.2}$$

Виходячи з енергетичного рівняння (3.1) і нерівностей Буняковського-Шварца приходимо до наступної апріорної оцінки напівдискретних апроксимацій Гальоркіна

$$\frac{1}{2}\|\psi_h(t)\|^2 + \int_0^t |\psi_h(\tau)|^2 d\tau \leq K\left\{\|v_0\|_H^2 + \|u_0\|_R^2 + \|\theta_0\|_Z^2 + \|q_0\|_R^2\right\} + \int_0^t \left\{\|l(\tau)\|_*^2 + \|\mu(\tau)\|_*^2\right\} d\tau \forall t \in [0,T], \forall h > 0. \tag{3.3}$$

4. Коректність варіаційної задачі.

__**Теорема.**__ (про коректність задачі узагальненої термопружності).

Варіаційна задача узагальненої термопружності (2.1) допускає єдиний розв'язок $\psi = (u, \theta, q)$ такий, що

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0,T;V), u' \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V), u'' \in L^2(0,T;V'), \\ \theta \in L^\infty(0,T;Z) \cap L^2(0,T;G), \theta' \in L^2(0,T;G'), \\ q \in L^\infty(0,T;Z) \cap L^2(0,T;R), q' \in L^2(0,T;R'); \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{2}\|\psi_h(t)\|^2 + \int_0^t |\psi_h(\tau)|^2 d\tau \leq K\left\{\|v_0\|_H^2 + \|u_0\|_R^2 + \|\theta_0\|_Z^2 + \|q_0\|_R^2\right\} + \int_0^t \left\{\|l(\tau)\|_*^2 + \|\mu(\tau)\|_*^2\right\} d\tau \forall t \in [0,T] \quad , \tag{4.2}$$

де $K = \text{const} > 0$ не залежить від величин, що нас цікавлять.

__**Доведення**__ теореми наведемо в три етапи.

1). Існування розв'язку. Як випливає з (3.3), послідовності напівдискретних апроксимацій $\{u_h,\theta_h,q_h\}$ (відпов. $\{u_h'\}$) утворюють при $h>0$ обмежені множини в просторах $L^\infty(0,T;V)$, $L^\infty(0,T;Z)\cap L^2(0,T;G)$, $L^\infty(0,T;Z)\cap L^2(0,T;R)$ (відпов. $L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)$).

Тому, зокрема, з послідовності $\psi_h=(u_h,\theta_h,q_h)$ можна вибрати збіжну підпослідовність $\psi_\Delta=(u_\Delta,\theta_\Delta,q_\Delta)$ і пару $\psi=(u,\theta,q)$ таку, що

$$\begin{cases}(u_\Delta,\theta_\Delta,q_\Delta)\to(u_h,\theta_h,q_h)\;\textit{в}\;L^2(0,T;V\times G\times R)\;\textit{слабко},\\ u_\Delta'\to u'\;\textit{в}\;L^2(0,T;H)\;\textit{слабко}.\end{cases}\tag{4.3}$$

Залишається показати, що знайдена таким чином трійка $\psi=(u,\theta,q)$ з простору $L^2(0,T;V\times G\times R)$ є розв'язком задачі (2.1).

Нехай $v_1,\ldots,v_N$, $\xi_1,\ldots,\xi_M$ і $r_1,\ldots,r_S$ – базиси просторів $V_h\subset V$, $G_h\subset G$ і $R_h\subset R$. Введемо простір $W=\{g\in C^1([0,T])|g(T)=0$ і розглянемо функції виду

$$v_h(t)=\sum_{i=1}^N g_i(t)v_i\,,\;\xi_h(t)=\sum_{i=1}^N \hat{g}_i(t)\xi_i\,,\;r_h(t)=\sum_{i=1}^N \breve{g}_i(t)r_i\,.\tag{4.4}$$

Підставляючи ψ_Δ в рівняння напівдискретизованої задачі, якщо $v=v_h$, $\xi=\xi_h$ і $r=r_h$, та інтегруючи їх на проміжку $(0,T)$ знайдемо, що

$$\begin{cases}\int_0^T\{-m(u_\Delta',v_h')+a(u_\Delta',v_h)+c(u_\Delta,v_h)-b(\theta_\Delta,v_h)-\rangle l,v_h\langle\}d\tau=-m(u_\Delta'(0),v_h(0)),\\ \int_0^T\{-s(\theta_\Delta,\xi_h)+d(q_\Delta,\xi_h)+b(\xi_h,u_\Delta')-\rangle\mu,\xi_h\langle\}d\tau=s(\theta_\Delta(0),\xi_h(0)),\\ \int_0^T\{\tau_r k(q_\Delta,r_h)-d(r_h,\theta_\Delta)+k(q_\Delta,r_h)\}d\tau=0.\end{cases}\tag{4.5}$$

Переходячи в цих рівняннях до границі при $\Delta\to 0$, а потім знову застосовуючи інтегрування по частинах, отримаємо, що

$$\begin{cases} \int\limits_0^T \{-m(u'', v_h') + a(u', v_h) + c(u, v_h) - b(\theta, v_h) - \rangle l, v_h \langle\} d\tau = m(u'(0) - v(0), v_h(0)) \forall v_h \in C^1([0,T]; V_h), \\ \int\limits_0^T \{-s(\theta, \xi_h) + d(q, \xi_h) + b(\xi_h, u') - \rangle \mu, \xi_h \langle\} d\tau = s(\theta(0) - \theta(0), \xi_h(0)) \forall \xi_h \in C^1([0,T]; G_h), \\ \int\limits_0^T \{\tau_r k(q, r_h) - d(r_h, \theta) + k(q, r_h)\} d\tau = 0 \forall r_h \in C^1([0,T]; R_h). \end{cases} \quad (4.6)$$

Але оскільки V_h, G_h, R_h щільні в просторах V, G, R відповідно, то останні рівняння виконуються для кожного $\forall v \in C^1([0,T]; V)$, $\forall \xi \in C^1([0,T]; G)$ і $\forall r \in C^1([0,T]; R)$; в силу (3.2) показуємо, що границя $\psi = (u, \theta, q)$, яка визначається в (4.5), задовольняє всі рівняння варіаційної задачі (2.1).

*2). **Обмеженість розв'язку.*** Шляхом граничного переходу в (3.3) при $h \to 0$ (а це можливо!) переконаємось, що для розв'язку $\psi = (u, \theta, q)$ задачі (2.1) також справедлива апріорна оцінка (4.2).

*3). **Єдиність розв'язку*** безпосередньо випливає з апріорної оцінки (4.2), якщо використати доведення від супротивного.

УДК 518:517.948

Я.С. Гарасим, Б.А. Остудін

ПРО ОСОБЛИВОСТІ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО РОДУ В ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ

Вибір конкретного наближеного алгоритму при розв'язуванні граничних задач математичної фізики обумовлюється багатьма чинниками, а саме, типом диференціального рівняння, виглядом початкових та крайових умов, класом допустимих граничних поверхонь, загальною розмірністю задачі і т.п. Зокрема, для розв'язання досить широкого класу зовнішніх задач теорії
