$$\begin{cases} \int_0^T \{-m(u',v_h')+a(u',v_h)+c(u,v_h)-b(\theta,v_h)-\rangle l,v_h\langle\}d\tau = m(u'(0)-v(0),v_h(0))\forall v_h \in C^1([0,T];V_h), \\ \int_0^T \{-s(\theta,\xi_h)+d(q,\xi_h)+b(\xi_h,u')-\rangle \mu,\xi_h\langle\}d\tau = s(\theta(0)-\theta(0),\xi_h(0))\forall \xi_h \in C^1([0,T];G_h), \\ \int_0^T \{\tau_r k(q,r_h)-d(r_h,\theta)+k(q,r_h)\}d\tau = 0 \forall r_h \in C^1([0,T];R_h). \end{cases} \quad (4.6)$$

Але оскільки V_h, G_h, R_h щільні в просторах V, G, R відповідно, то останні рівняння виконуються для кожного $\forall v \in C^1([0,T];V)$, $\forall \xi \in C^1([0,T];G)$ і $\forall r \in C^1([0,T];R)$; в силу (3.2) показуємо, що границя $\psi=(u,\theta,q)$, яка визначається в (4.5), задовольняє всі рівняння варіаційної задачі (2.1).

2). Обмеженість розв'язку. Шляхом граничного переходу в (3.3) при $h \to 0$ (а це можливо!) переконаємось, що для розв'язку $\psi=(u,\theta,q)$ задачі (2.1) також справедлива апріорна оцінка (4.2).

3). Єдиність розв'язку безпосередньо випливає з апріорної оцінки (4.2), якщо використати доведення від супротивного.

УДК 518:517.948

Я.С. Гарасим, Б.А. Остудін

ПРО ОСОБЛИВОСТІ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО РОДУ В ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ

Вибір конкретного наближеного алгоритму при розв'язуванні граничних задач математичної фізики обумовлюється багатьма чинниками, а саме, типом диференціального рівняння, виглядом початкових та крайових умов, класом допустимих граничних поверхонь, загальною розмірністю задачі і т.п. Зокрема, для розв'язання досить широкого класу зовнішніх задач теорії потенціалу на незамкнених поверхнях природно застосувати апарат граничних інтегральних рівнянь (ІР), який дозволяє сформулювати проблему у вигляді еквівалентного ІР. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що в $\mathbf{R}^3$ міститься лише одна достатньо гладка поверхня S. Розглянемо задачу розрахунку електростатичного поля в області $\Omega := \mathbf{R}^3 \setminus \overline{S}$, якщо на S задане граничне значення потенціалу $g(P)$ ($P \in S$). Як показано в [1, 2], дана проблема зводиться до розв'язання ІР першого роду зі слабкою особливістю в ядрі

$$K\tau := \int_S K(P,M)\tau(M)\mathrm{d}S_M = g(P), \quad P \in S, \tag{1}$$

яке має єдиний розв'язок для довільної функції $g(P) \in \mathrm{H}^{1/2}(S)$.

Розглянемо питання наближеного розв'язування ІР (1) в припущенні, що поверхня S задається параметричними рівняннями $x = x(\alpha,\beta)$, $y = y(\alpha,\beta)$, $z = z(\alpha,\beta)$ $\left((\alpha,\beta) \in [-1,1]\times[-1,1]\right)$. Враховуючи сингулярну поведінку густини τ на ребрі S, поділимо проміжок зміни параметрів α і β на N_α та N_β рівних частин, відступивши при цьому від границі відповідно на δ_α і δ_β. В результаті отримаємо наступну сітку

$$\begin{cases} \alpha_k := H_\alpha k - 1 + \left(\left[\dfrac{N_\alpha - k}{N_\alpha}\right] - \left[\dfrac{k}{N_\alpha}\right]\right)\delta_\alpha, k = \overline{0, N_\alpha}, \\ \beta_l := H_\beta l - 1 + \left(\left[\dfrac{N_\beta - l}{N_\beta}\right] - \left[\dfrac{l}{N_\beta}\right]\right)\delta_\alpha, l = \overline{0, N_\beta}. \end{cases}$$

Тут $H_\alpha := 2/N_\alpha$, $H_\beta := 2/N_\beta$, а квадратні дужки означають цілу частину внутрішнього виразу. Виберемо центр кожного елемента $[\alpha_{k-1},\alpha_k]\times[\beta_{l-1},\beta_l]$, $k = \overline{1,N_\alpha}$, $l = \overline{1,N_\beta}$ за початок локальної системи координат $0\xi\eta$ виконавши заміну змінних

$$\begin{cases} \alpha(\xi,\eta) := \dfrac{1}{2}H_\alpha(2k - 1 + \xi) - 1 + \left(\Delta_{\alpha k}^{(-)} - \Delta_{\alpha k}^{(+)}\xi\right), \\ \beta(\xi,\eta) := \dfrac{1}{2}H_\beta(2l - 1 + \eta) - 1 + \left(\Delta_{\beta k}^{(-)} - \Delta_{\beta k}^{(+)}\eta\right), -1 \le \xi,\eta \le 1, \end{cases}$$

де

$$\begin{cases} \Delta_{\alpha k}^{(-)} := \left(\left[\dfrac{N_\alpha - k + 1}{N_\alpha} \right] - \left[\dfrac{k}{N_\alpha} \right] \right) \dfrac{\delta_\alpha}{2}, \\ \Delta_{\alpha k}^{(+)} := \left(\left[\dfrac{N_\alpha - k + 1}{N_\alpha} \right] + \left[\dfrac{k}{N_\alpha} \right] \right) \dfrac{\delta_\alpha}{2}, \end{cases}$$

а $\Delta_{\beta l}^{(-)}$ і $\Delta_{\beta l}^{(+)}$ вводяться аналогічно заміною у попередньому записі k на l та α на β. Позначимо якобіан переходу до системи $0\xi\eta$ через

$$\partial_{kl} = \left(\frac{1}{2} H_\alpha - \Delta_{\alpha k}^{(+)} \right) \left(\frac{1}{2} H_\beta - \Delta_{\beta l}^{(+)} \right).$$

Для апроксимації шуканої густини $\tau(\alpha, \beta)$ в межах кожного елемента використаємо бікубічні базисні функції (див. рис. 1).

$$\tau(\alpha(\xi,\eta), \beta(\xi,\eta)) := \sum_{k=1}^{N_\alpha} \sum_{l=1}^{N_\beta} \sum_{i=3k-3}^{3k} \sum_{j=3l-3}^{3l} \tau_{ij} \psi_{ij}(\xi,\eta),$$

де

$$\tau_{ij} := \tau \left(\alpha_k - \left(k - \frac{i}{3} \right) H_\alpha + \Delta_{\alpha k}^{(i)}, \beta_l - \left(l - \frac{j}{3} \right) H_\beta + \Delta_{\beta l}^{(j)} \right),$$

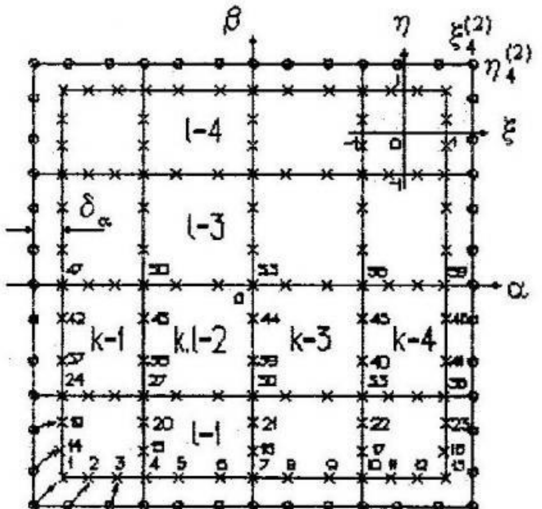

Рис.1.

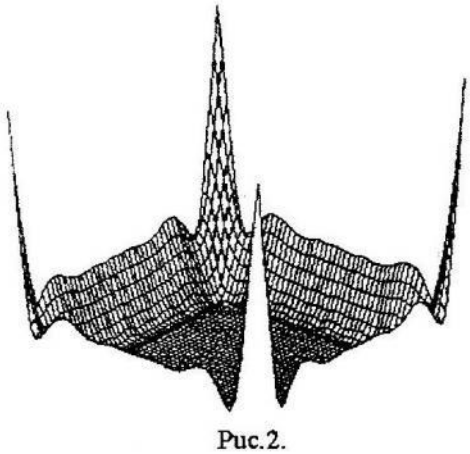

Рис.2.

$$\begin{cases} \Delta_{\alpha k}^{(i)} := \left[\dfrac{N_\alpha - k + 1}{N_\alpha}\right]\dfrac{3-i}{3}\delta_\alpha - \left[\dfrac{k}{N_\alpha}\right]\dfrac{i+3-3N_\alpha}{3}\delta_\alpha, \\ \Delta_{\beta l}^{(j)} := \left[\dfrac{N_\beta - l + 1}{N_\beta}\right]\dfrac{3-j}{3}\delta_\beta + \left[\dfrac{l}{N_\beta}\right]\dfrac{j+3-3N_\beta}{3}\delta_\beta, \end{cases}$$

$$\psi_{ij}(\xi,\eta) := \frac{1}{64}\left(1+(-1)^r\right)\left(1+(-1)^{k+i/3}\xi\right)\times$$

$$\times\left(1+(-1)^{l+j/3}\eta\right)\left(9\xi^2+9\eta^2-10\right)+\frac{9}{64}\left(1-(-1)^r\right)\times$$

$$\times\left(1+\xi_0\xi+\eta_0\eta\right)\left(1-\eta_0^2\xi^2-\xi_0^2\eta^2\right)\left(1+(-1)^q 3\eta_0\xi-(-1)^q 3\xi_0\eta\right),$$

$$r = \left[\frac{2i+j}{3}\right]+\left[\frac{2j+1}{3}\right], \quad q = \left[\frac{2i+2}{3}\right]+\left[\frac{i}{3}\right]+\left[\frac{j+1}{3}\right]+k+l+1,$$

$$\xi_0 := \frac{1}{2}\left((-1)^{i_0}-(-1)^{j_0}\right), \quad \eta_0 := \frac{1}{2}\left((-1)^{i_0}+(-1)^{j_0}\right),$$

$$i_0 := \left[\frac{i}{3}\right]+\left[\frac{j}{3}\right]+k+l+1, \quad j_0 := \left[\frac{i}{3}\right]+\left[\frac{j+2}{3}\right]+k+l+1,$$

причому беруться до уваги лише ті індекси i та j, для яких виконується умова

$$\left(\left\{\frac{i}{3}\right\}=0\right)\vee\left(\left\{\frac{j}{3}\right\}=0\right)=\text{true}.$$

Фігурні дужки тут означають дробову частину внутрішнього виразу. Отже, дискретний аналог ІР (1) запишеться у вигляді

$$\sum_{k=1}^{N_\alpha}\sum_{l=1}^{N_\beta}\sum_{i=3k-3}^{3k}\sum_{j=3l-3}^{3l}\tau_{ij}I_{kl}^{(ij)}(\alpha_0,\beta_0)=g(\alpha_0,\beta_0), \quad -1\le\alpha_0,\beta_0\le 1. \qquad (2)$$

Тут

$$I_{kl}^{(ij)}(\alpha_0,\beta_0):=\partial_{kl}\int\limits_{\xi_k^{(1)}}^{\xi_k^{(2)}}\int\limits_{\eta_l^{(1)}}^{\eta_l^{(2)}}K(\alpha_0,\beta_0;\xi,\eta)J(\xi,\eta)\psi_{ij}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\ ,$$

J – якобіан переходу від поверхневого інтеграла до подвійного,

$$\xi_k^{(1)}:=-\frac{H_\alpha+\left[\dfrac{N_\alpha-k+1}{N_\alpha}\right]\delta_\alpha}{H_\alpha-\left[\dfrac{N_\alpha-k+1}{N_\alpha}\right]\delta_\alpha},\quad \xi_k^{(2)}:=\frac{H_\alpha+\left[\dfrac{k}{N_\alpha}\right]\delta_\alpha}{H_\alpha-\left[\dfrac{k}{N_\alpha}\right]\delta_\alpha},$$

підставивши на місце k та α відповідно l та β отримаємо аналогічне представлення для $\eta_l^{(1)}$ і $\eta_l^{(2)}$. Вибравши контрольні значення (α_0,β_0) у вузлових точках із (2), отримаємо СЛАР для визначення τ_{ij}. Відзначимо, що при цьому проблема коректного заповнення матриці СЛАР не є тривіальною. Зокрема, пропонується перенумерувати всі невідомі τ_{ij}, наприклад, починаючи від нижнього лівого кута зліва направо та знизу вверх. Тоді зв'язок між τ_{ij} та його порядковим номером n у рівнянні (2) є

$$n:=(3N_\alpha+1)\left[\frac{j+2}{3}\right]+(N_\alpha+1)\left[\frac{2j}{3}\right]+$$
$$+\left(\left[\frac{j}{3}\right]-\left[\frac{j+2}{3}\right]+1\right)i+\left(\left[\frac{j+2}{3}\right]-\left[\frac{j}{3}\right]\right)\left[\frac{i}{3}\right]+1\,.$$

Аналогічним чином можна перенумерувати контрольні точки (α_0,β_0). Зауважимо, що при наявності декількох поверхонь в останній формулі необхідно внести поправку на кількість невідомих на розглянутих вже поверхнях.

Рис. 2 ілюструє розподіл густини ІР, отриманий описаною методикою на рівномірній сітці $N_\alpha=N_\beta=10$ ($\delta_\alpha=\delta_\beta=0.05$) для квадратного електрода з потенціалом $g(P)\equiv 1$. Контрольний розрахунок основної задачі проводився на пластині $I_{\Gamma}(u_{k+1},\lambda_k)=I_{\overline{\Gamma}}(u_{k+1},\lambda_k)$ у проміжних точках. При цьому середньоквадратичне відхилення від очікуваного результату становило 0,2%.

На закінчення відзначимо таке. Характерною особливістю описаної методики є те, що при певних обмеженнях на геометрію граничних поверхонь вдається обчислити аналітично всі двовимірні інтеграли (включаючи невласні), які входять у зображення коефіцієнтів названих СЛАР. Такий спосіб чисельного аналізу досить широкого класу практично важливих задач суттєво прискорює час їх розв'язання.

1. Гарасим Я.С., Остудін Б.А. Наближене розв'язування деяких граничних задач теорії потенціалу методом інтегральних рівнянь без використання кубатурних формул// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.–мат. 1997. Вип. 46. С. 73-82. 2. Sybil Yu.M. Three dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface// Математичні студії. 1997. Т. 8. № 2. С. 79–96.

УДК 517.958:519.6

Н.П. Головач, І.І. Дияк

АЛГОРИТМ ОБЧИСЛЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ДЕФОРМАЦІЙ У ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ПМГЕ

Проводиться дослідження квазістатичної задачі термопружності на основі застосування прямого методу граничних елементів (ПМГЕ) в однорідній та ізотропній області V із границею S на основі рівняннь

$$\partial_j \Sigma_{ij} = 0, \qquad x \in V, \tag{1}$$

$$\Sigma_{ij} n_j = T_i, \qquad x \in S_t \tag{2}$$

$$u_i = \widetilde{u}_i, \qquad x \in S_u \tag{3}$$

де $\Sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \dfrac{\alpha E\theta}{1-2\nu}\delta_{ij}; \qquad T_i = t_i + \dfrac{\alpha E\theta}{1-2\nu} n_i.$

Тут σ_{ij} - компоненти тензора напружень; t_i - компоненти поверхневих навантажень; θ - приріст температури; α - коефіцієнт температурного розширення; E - модуль Юнга; ν - коефіцієнт Пуасона і δ_{ij} - символ Кронекера.

Крім цього, має місце закон Гука

$$\Sigma_{ij} = \lambda E_{kk}\delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \tag{4}$$

та співвідношення Коші