УДК 519.6:539.3

І.І.Дияк

АДАПТИВНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ НА ОСНОВІ ГІБРИДНИХ АПРОКСИМАЦІЙ

У 90-х роках широке коло досліджень присвячене адаптивним процедурам у скінченно- та граничноелементних реалізаціях. При використанні граничноелементних та гібридних адаптивних апроксимацій багато проблем ще залишаються відкритими[4]. Ефективність усього адаптивного процесу залежить значною мірою від вибору критерію апостеріорної оцінки похибки. Тут пропонується новий підхід побудови покращеного розв'язку, який базується на гібридних скінченно- та граничноелементних апроксимаціях.

Розлядається плоска задача лінійної теорії пружності, постановку якої можна подати у вигляді [4]
рівняння рівноваги:

$$\mathbf{Lu} - \mathbf{f} \equiv \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{DSu} - \mathbf{f} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{x} \in \Omega \subset R^2, \tag{1}$$

кінематичні граничні умови:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}, \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \tag{2}$$

статичні граничні умови:

$$\mathbf{t} = \mathbf{HDSu} = \overline{\mathbf{p}}, \qquad x \in \Gamma_N, \tag{3}$$

тут $\mathbf{S}$ – матричний оператор, що визначає компоненти вектора деформацій $\vec{\varepsilon} = \left(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yy}\right)^T$ через компоненти вектора переміщень у вигляді:

$$\vec{\varepsilon} = \mathbf{Su}, \tag{4}$$

$\mathbf{D}$ - матриця пружних констант закону Гука:

$$\vec{\sigma} = \mathbf{D}\vec{\varepsilon}, \tag{5}$$

тут $\vec{\sigma} = \left(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}\right)^T$, $\mathbf{u} = \left(u_x, u_y\right)^T$ – вектор переміщень, $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ – границя області,. $\mathbf{H}$ – матриця напрямних косинусів нормалі до границі області.

Використовуючи скінченноелементну апроксимацію

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h = \mathbf{N}\overline{\mathbf{u}}, \tag{6}$$

на основі процедури Бубнова-Гальоркіна, крайова задача (1)-(3) приводиться до знаходження переміщень у вузлах СЕ сітки на основі розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь [2]:

$$\mathbf{K}\overline{\mathbf{u}} - \mathbf{F} = \mathbf{0}, \tag{7}$$

де

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega}(\mathbf{SN})^T \mathbf{D}(\mathbf{SN})d\Omega, \qquad \mathbf{F} = \int_{\Omega}\mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_p}\mathbf{N}^T \overline{\mathbf{p}} d\Gamma .$$

При цьому напруження обчислюються зі співвідношення

$$\sigma_h = (\mathbf{DSN})\overline{\mathbf{u}} . \tag{8}$$

Вибравши апроксимацію для переміщень з класу функцій C^0, одержимо розривні на границях між елементами апроксимації напружень у (8). Нехай похибки наближених розв'язків $\mathbf{u}_h, \sigma_h$:

$$e = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h , \quad \text{та} \quad e_\sigma = \sigma - \sigma_h . \tag{9}$$

У скінченноелементному аналізі виправдане не поточкове визначення похибки, а використання енергетичної норми похибки, яка для задачі теорії пружності має такий вигляд:

$$\|e\| = \left(\int_{\Omega}(\mathrm{Se})^T \mathbf{D}(\mathrm{Se})d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega}(e_\sigma)^T \mathbf{D}^{-1}(e_\sigma)d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} . \tag{10}$$

У інженерних задачах, оцінюючи величину похибки в будь-якій нормі, порівнюється наближений розв'язок $\mathbf{u}_h$ з покращеним розв'язком $\mathbf{u}^*$. Різниця між апостеріорними оцінками похибки, що пропонуються різними авторами, полягає у різних способах отримання покращеного розв'язку $\mathbf{u}^*$. Найпоширенішою є процедура побудови розв'язку σ^* запропонована у [6]. Теоретична аргументація цього підходу наведена у [3]. У цьому випадку припускається, що напруження σ^* інтерполюються за допомогою тієї ж системи базисних функцій, що і переміщення, тобто

$$\sigma^* = \mathbf{N}\overline{\sigma}^* , \tag{11}$$

і використовується процедура проектування

$$\int_{\Omega}\mathbf{N}^T(\sigma^* - \sigma_h)d\Omega = 0 , \tag{12}$$

тут $\overline{\sigma}^*$ - вектор вузлових значень напружень. Підставивши співвідношення (8) і (11) у рівняння (12), отримаємо

$$\overline{\sigma}^* = \mathbf{A}^{-1}\left(\int_{\Omega}\mathbf{N}^T\mathbf{DSN}d\Omega\right)\overline{\mathbf{u}} , \tag{13}$$

де $\mathbf{A}$ - матриця "мас", вигляду

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega .$$

У роботі [3] показано, що наближений розв'язок σ^* є точнішою апроксимацією узагальненого розв'язку ніж σ_h, і вибір апроксимуючих функцій у формулі (12) таких же як у (6), не тільки ефективний, а й найекономніший у задачах з регулярними розв'язками.

Для обчислення покращеного σ роз'язку пропонується наступна процедура. За знайденими значеннями переміщень з (7) проводиться обчислення граничних напружень на скінченному елементі на основі використання оператора Стєклова-Пуанкаре [4]:

$$\mathbf{t} = \mathbf{S}\mathbf{u} = \mathbf{V}^{-1}\left(\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{K}\right)\mathbf{u}, \qquad (15)$$

тут оператор $\mathbf{V}$ – потенціал простого шару, оператор $\mathbf{K}$ – потенціал подвійного шару. Застосовуючи процедуру методу Бубнова-Гальоркіна з вибором функцій апроксимації таких же, як і у (6), одержимо значення граничних напружень $\mathbf{t}^*$. Уточнені значення σ^* знаходяться за відомими формулами для ПМГЕ [1], у такій кількості внутрішніх точок, яка необхідна для точного обчислення енергетичної норми похибки (10) у межах скінченного елемента.

Проведені числові дослідження тестових задач підтверджують ефективність запропонованого підходу.

1. Бенерджи П. Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. - М.: Мир, 1984. - 494 с. 2. Дияк І.І., Чернуха А.Ю. Чисельне дослідження задачі теорії пружності на основі комбінації методів граничних та скінченних елементів// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1993. Вип. 39. С. 41-46. 3. Ainsworth M., Zhu J.Z., Craig A.W., Zienkiewicz O.C. Analisis of the Zienkiewicz- Zhu a-posteriori error estimator in the finite element method// Int. J. Num.Meth.Eng. 1989. Vol.28. P. 2161-2174. 4. Rank E. Adaptive h-,p- and hp-versions for boundary integral element methods//Int. J.Num. Meth. Engng., 1989. Vol.28. P. 1335-1349. 5. Steinbach O., Wendland W.L. Efficient Preconditioners for Boundary Element Methods and their Use in Domain Decomposition Methods.-Bericht Nr.95-19, 18p. 6. Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. A simple error estimate and adaptive procedure for practical engineering analysis//Int.J.Num. Meth. Eng. 1987. Vol.24. P. 337-357.