тобто $\{\tau_j(\varphi,\varepsilon)\}_{j=1}^{\infty}$ має ті ж властивості, що й $\{\tau_j(\varphi)\}_{j=1}^{\infty}$.

1. Samoilenko A.M. Elements of the mathematical theory of multifrequency oscillations. Kluwer Academic Publishers, 1991. 2. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations. World Scientific, 1995.

УДК 517.3

*А.Т. Дудикевич, С.М. Левицька*

# КОМБІНОВАНИЙ МЕТОД ОБЧИСЛЕННЯ ПОТЕНЦІАЛУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ ДЛЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ

У випадку розрахунку потенціалу електростатичного поля в системах з осьовою симетрією розв'язок рівняння природньо розглядати в циліндричній системі координат, в якій вважати вісь OZ- віссю симетрії.

Шукається функція U(M), яка задовольняє рівнянню Лапласа

$$\begin{gathered}\Delta U(M)=0,\\ M\in R^3\setminus S\end{gathered} \tag{1}$$

а на поверхні S-умові Діріхле

$$U(P)=f(P)\,,\quad p\in S\,,\ f(P)\in C(S) \tag{2}$$

і умові регулярності на безмежності

$$u(\infty)=0 \tag{3}$$

де S - поверхня, задана параметричними рівняннями

$$\left.\begin{aligned} r&=r(v)\\ z&=z(v)\end{aligned}\right\},\ 1\le v\le 1 \tag{4}$$

Розв'язок задачі (1)-(3) будемо шукати у вигляді потенціалу простого шару

$$U(P)=\iint\limits_S q(P)/r(M,P)ds_P \tag{5}$$

де $q(P)$ -невідома густина поверхневих зарядів на S;

$r$ – віддаль між точками $M$ і $P$.

Враховуючи граничну умову (2), із (5) для визначення невідомої функції отримуємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\iint_S \frac{q(P)dS_P}{r(M,P)} = f(P) \tag{6}$$

Заміна змінних (4) і певні перетворення риведуть це рівняння до вигляду

$$\left. \int_{-1}^{1} \frac{q(v)F(v)\mathrm{K}(k)dv}{\sqrt{(r-\bar{r})^2+(z-\bar{z})^2}} \right|_L = f(\bar{r},\bar{z}), \tag{7}$$

де $k^2 = \dfrac{4r\bar{r}}{(r-\bar{r})^2+(z-\bar{z})^2}$ ,

$\mathrm{K}(k) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}$ – повний еліптичний інтеграл

перщого роду, для визначення якого використовується апроксимація

$$\mathrm{K}(k) = W(a) + V(a)\ln\frac{1}{a} \tag{8}$$

$$0 \le k^2 < 1 \;\; a = 1-k^2 = [(r-\bar{r})^2+(z-\bar{z})^2]/[(r+\bar{r})^2+(z-\bar{z})^2]$$

Інтегральне рівняння (7) розв'язується методом механічних квадратур. Невідому густину представимо у вигляді

$$q(v) = g(v)/\sqrt{1-v^2} \tag{9}$$

При співпаданні точок інтегрування з точками спостереження ядро інтегрального рівняння (7) має особливість. Застосовуємо методику виділення особливостей

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1}\left(\frac{g(v)F(v)\mathrm{K}(k)}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{(r+\bar{r})^2+(z-\bar{z})^2}} - \frac{g(\bar{v})F(\bar{v})\ln|v-\bar{v}|}{\sqrt{1-v^2}}\right)dv + \\ &+ g(\bar{v})F(\bar{v})\int_{-1}^{1}\frac{\ln|v-\bar{v}|}{\sqrt{1-v^2}}dv = f(\bar{v}) \end{aligned} \tag{10}$$

Останній інтеграл в (10) обчислюється аналітично

$$\int_{-1}^{1}\frac{\ln|v-\bar{v}|}{\sqrt{1-v^2}}dv = -\pi\ln 2,$$

а підінтегральна функція в першому інтегралі в особливій точці доозначується деякою константою $C(\bar{v})$ .

Оскільки підінтегральна функція в (10) неперервна, то застосовуємо квадратурну формулу Гаусса-Чебишева з вагою

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{M}\sum_{m=1}^{M} f(x_m) \quad , \quad x_m = \cos(\frac{2m-1}{2M}\pi) \tag{11}$$

За точки спостереження вибираємо нулі многочлена Чебишева першого роду $v_l = \cos(\frac{2l-1}{2M}\pi)$, $l=\overline{1,M}$. Із (10) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{m=1}^{M} A_{m,l} g_l = f_l \quad , \quad l = \overline{1,M} \quad , \tag{12}$$

де

$$A_{m,l} = \frac{\pi}{M}\frac{g(v_m)F(v_m)\mathrm{K}(k)}{\sqrt{(r(v_m)+r(v_l))^2+(z(v_m)-z(v_l))^2}}$$

$$A_{m,m} = \frac{\pi}{M}\{c(v_m) - F(v_m)\sum_{p=1, p\neq m}^{M}\ln\left|v_p - v_m\right| - \pi F(v_m)\ln 2\} \tag{13}$$

Тому що виділення особливостей приводить до діагонального переважання, то система лінійних алгебраїчних рівнянь буде стійкою. Розв"язуючи систему (12) методом Гаусса, знаходимо невідомі компоненти густини $g(v_1), g(v_2),..., g(v_M)$.

Тоді потенціал в довільній точці можна знайти за формулою

$$U(x(v_l),y(v_l),z(v_l)) = \sum_{m=1}^{M}\frac{g(v_m)}{\sqrt{1-v_m^2}}\frac{F(v_m)\mathrm{K}(k)}{\sqrt{(r(v_m)+r(v_l))^2+(z(v_m)-z(v_l))^2}} \tag{14}$$

Для розрахунку електронно-оптичних систем однією з основних задач є задача обчислення траєкторій руху електронів, що зводиться до знаходження компонент напруженості поля Ця задача методом інтегральних рівнянь вимагає великих обчислювальних розрахунків, тому доцільно від зоанішньої задачі перейти до внутрішньої При цьому значення потенціалу на границі області замикання знаходяться за формулою (14) а у внутрішній області - методом сіток.

Для цього диференціальна задача (1)-(2) для довільної точки замкнутої області в осесиметричній циліндричній системі координат запишеться так:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = f(r,z), \qquad (r,z) \in R^3 \setminus S \tag{15}$$

$$U\big|_{\Gamma} = f(r,z), \quad (r,z) \in S; \tag{16}$$

Коефіцієнти рівняння (15) мають особливість, тому на осі симетрії розв'язується рівняння вигляду

$$2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=f(0,z) \qquad (17)$$

і вводиться рівномірна сітка по змінній $r$ зсунута на півкроку, тобто

$$\Omega = w_r * w_z = \{(r_i, z_j) \ \left| r_i \in w_r, z_j \in w_z \right|\},$$

де

$$w_r = \{r_i = (i+\frac{1}{2})h_r, i=0,1,2,...,h_r>0\}$$

$$w_z = \{z_j = jh_z, j=0,\pm1,\pm2,...,h_z>0\}$$

Диференціальна задача (15)-(16) апроксимується на даній сітці різницевою задачею:

$$\frac{i}{r_i h_r}U_{i-1,j}+\frac{1}{h_z^2}U_{i,j-1}+\frac{i+1}{r_i h_r}U_{i+1,j}+\frac{1}{h_z^2}U_{i,j+1}-(\frac{2}{h_z^2}+\frac{2i+1}{h_r r_i})U_{i,j}=-f_{i,j}$$

$$(r\neq\frac{h_r}{2}) \qquad (18)$$

$$\frac{1}{h_z^2}(U_{0,j+1}+U_{0,j-1})+\frac{4}{h_r^2}U_{1,j}-(\frac{2}{h_z^2}+\frac{4}{h_r^2})U_{0,j}=-f_{0,j}$$

$$(\text{для } r=\frac{h_r}{2}) \qquad (19)$$

Система різницевих рівнянь розв"язувалася ітераційними методами верхньої релаксації за точками згідно розрахункових формул:

$$\widehat{U}_{i,j}^{(n+1)}=\frac{r_i h_r h_z^2}{2(r_i h_r+(i+1)h_z^2)}(\frac{i}{r_i h_r}U_{i-1,j}^{(n+1)}+\frac{1}{h_z^2}U_{i,j-1}^{(n+1)}+\frac{i+1}{r_i h_r}U_{i+1,j}^{(n)}+\frac{1}{h_z^2}U_{i,j+1}^{(n)}+f_{i,j}$$

$$(r\neq\frac{h_r}{2}) \qquad (20)$$

$$\widehat{U}_{0,j}^{(n+1)}=\frac{h_r^2 h_z^2}{2(h_r^2+2h_z^2)}(\frac{1}{h_z^2}(U_{0,j+1}^{(n)}+U_{0,j-1}^{(n+1)})+\frac{4}{h_r^2}U_{1,j}^{(n)}+f_{0,j}), \quad (r=\frac{h_r}{2}), \qquad (21)$$

$$U_{i,j}^{(n+1)}=w_n\widehat{U}_{i,j}^{(n+1)}+(1-w_n)U_{i,j}^{(n)}, \qquad \begin{matrix} i=0,1,...N, \\ j=1,...,M, \end{matrix} \qquad (22)$$

і верхньої релаксації з прогонкою за лініями:

$$\frac{i}{h_z^2}\widehat{U}_{i,j-1}^{(n+1)}-(\frac{2}{h_z^2}+\frac{2i+1}{r_l h_r})\widehat{U}_{i,j}^{N+1)}+\frac{1}{h_z^2}\widehat{U}_{i,j+1}^{(n+1)}=-f_{i,j}-\frac{i}{r_i h_r}U_{i-1,j}^{(n+1)}-\frac{i+1}{r_i h_r}U_{i+1,j}^{(n)},$$

$$(r\neq\frac{h_r}{2}) \qquad (23)$$

$$\frac{1}{h_z^2}\widehat{U}_{0,j+1}^{(n+1)} - 2\left(\frac{1}{h_z^2} + \frac{2}{h_r^2}\right)\widehat{U}_{0,j}^{(n+1)} + \frac{1}{h_z^2}\widehat{U}_{0,j-1}^{(n+1)} = -f_{0,j} - \frac{4}{h_r^2}U_{1,j}^{(n)},$$

$$\left(r = \frac{h_r}{2}\right) \tag{24}$$

$$U_{i,j}^{(n+1)} = w_n\widehat{U}_{i,j}^{(n+1)} + (1-w_n)U_{i,j}^{(n)}, \tag{25}$$

У формулах (22) і (25) – оптимальний параметр верхньої релаксації, який значно прискорює збіжність даних ітераційних процесів, і визначається згідно методики [1].

Обчислювальним експериментом на модельній задачі показана перевага ітераційного методу верхньої релаксації з прогонкою за лініями.

1. Самарский А.А. Теория разностних схем.- М.:Наука.1989.-616 с.2. Левицька С.М. Виділення еліптичних інтегралів в осесиметричній задачі нестаціонарної теплопровідності. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип.41. С.91-94.

УДК 517.949.21

*А.Т. Дудикевич, С.М. Левицька*

# РІЗНИЦЕВА СХЕМА ПІДВИЩЕНОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА В ПРОСТОРОВОМУ ВИПАДКУ

Розв'язується внутрішня просторова задача Діріхле для рівняння Пуассона

$$\Delta U = \sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial^2 U}{\partial x_\alpha^2} = f(x_1,\dots,x_p),(x_1,\dots x_p)\in G \tag{1}$$

$$U\big|_\partial = g(x_1,\dots,x_p),(x_1,\dots,x_p)\in\partial, \tag{2}$$

в паралелепіпеді $\overline{G} = \left\{0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \alpha = \overline{1,p}\right\}$ де $\overline{G} = G \bigcup \partial$.

Апроксимуючи диференціальну задачу (1) - (2) різницевими співвідношеннями, одержується різницева задача підвищеного порядку точності

$$\Lambda^1 y = \varphi(x), x\in\omega_h \tag{3}$$

$$y\big|_{\gamma_h} = \mu(x), \qquad x\in\gamma_h, \tag{4}$$