$$\frac{1}{h_z^2}\widehat{U}_{0,j+1}^{(n+1)}-2(\frac{1}{h_z^2}+\frac{2}{h_r^2})\widehat{U}_{0,j}^{(n+1)}+\frac{1}{h_z^2}\widehat{U}_{0,j-1}^{(n+1)}=-f_{0,j}-\frac{4}{h_r^2}U_{1,j}^{(n)},$$

$$(r=\frac{h_r}{2}) \tag{24}$$

$$U_{i,j}^{(n+1)}=w_n\widehat{U}_{i,j}^{(n+1)}+(1-w_n)U_{i,j}^{(n)}, \tag{25}$$

У формулах (22) і (25) – оптимальний параметр верхньої релаксації, який значно прискорює збіжність даних ітераційних процесів, і визначається згідно методики [1].

Обчислювальним експериментом на модельній задачі показана перевага ітераційного методу верхньої релаксації з прогонкою за лініями.

1. Самарский А.А. Теория разностних схем.- М.:Наука.1989.-616 с.2. Левицька С.М. Виділення еліптичних інтегралів в осесиметричній задачі нестаціонарної теплопровідності. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип.41. С.91-94.

УДК 517.949.21

А.Т. Дудикевич, С.М. Левицька

РІЗНИЦЕВА СХЕМА ПІДВИЩЕНОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА В ПРОСТОРОВОМУ ВИПАДКУ

Розв'язується внутрішня просторова задача Діріхле для рівняння Пуассона

$$\Delta U=\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial^2 U}{\partial x_\alpha^2}=f(x_1,...,x_p),(x_1,...x_p)\in G \tag{1}$$

$$U\big|_\partial=g(x_1,...,x_p),(x_1,...,x_p)\in\partial, \tag{2}$$

в паралелепіпеді $\overline{G}=\{0\le x_\alpha\le l_\alpha,\alpha=\overline{1,p}\}$ де $\overline{G}=G\cup\partial$.

Апроксимуючи диференціальну задачу (1) - (2) різницевими співвідношеннями, одержується різницева задача підвищеного порядку точності

$$\Lambda^1 y=\varphi(x),x\in\omega_h \tag{3}$$

$$y\big|_{\gamma_h}=\mu(x),\qquad x\in\gamma_h, \tag{4}$$

де р – розмірність задачі, $\lambda_\alpha y = -y_{\overline{x_\alpha} x_\alpha} \left(\alpha = \overline{1,p}\right)$ – різницева апроксимація на сітці ω_h оператора $L_\alpha, \varphi = f - \sum_{\alpha=1}^{p} \chi_\alpha \lambda_\alpha f, \chi_\alpha = \frac{h_\alpha^2}{12}$.

Теорема. *Нехай розв'язок задачі (1)-(2) задовольняє умовам, при яких різницева схема (3)-(4) має максимальний (шостий) порядок апроксимації. Тоді різницева схема (3)-(4) збігається в нормі сіткових просторів $L_2, W_2^{(1)}, W_2^{(2)}$ зі швидкістю $м\left(h^6\right)$ для довільного $p \geq 2$. Для $p = 2,3$ різницева схема (3)-(4) збігається з цією ж швидкістю в рівномірній метриці.*

Різницева схема, яка визначена на 3^p – точковому шаблоні, задовольняє умовам принципу максимуму тоді і тільки тоді, якщо для кроків сітки виконується умова

$$\sum_{\beta \neq \alpha}^{1 \div K} \frac{h_\alpha^2}{h_\beta^2} \leq 5. \qquad (5)$$

В роботі на паралелепіпедальній сітці з кроками $h_\alpha \left(\alpha = 1,2,3\right)$ приводиться різницева схема (3)-(4),

де $\Lambda^1 y = \Lambda y + \frac{k}{2} \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\beta \succ \alpha} \left(h_\alpha^2 + h_\beta^2\right) \lambda_\alpha \lambda_\beta y + l \prod_{\alpha=1}^{3} h_\alpha \lambda_\alpha y,$

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{k}{2} \sum_{\alpha=1}^{3} h_\alpha^2 \lambda_\alpha f, \lambda y = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha y.$$

На 27-точковому шаблоні, який складається із вузлів $\left(x + ih_1, y + jh_2, z + kh_3, i, j, k = -1,0,1\right)$ в індексному вигляді одержано різницеве рівняння

$$\left(\Lambda^1 U\right)_{i,j,k} = \frac{1}{60} \left\{ \begin{aligned} & 2(20\alpha - 5\beta - 5\gamma + 4)(U_{i+1,j,k} + U_{i-1,j,k}) + \\ & + 2(20\beta - 5\alpha - 5\gamma + 4)(U_{I,J+1,K} + U_{i,j-1,k}) + \\ & + 2(20\gamma - 5\alpha - 5\beta + 4)(U_{i,j,k+1} + U_{i,j,k-1}) + \\ & + [5(\beta + \alpha) - 4](U_{i+1,j+1,k} + U_{i-1,j+1,k} + U_{i+1,j-1,k} + \\ & + U_{i-1,j-1,k}) + [5(\alpha + \gamma) - 4](U_{i+1,j,k+1} + U_{i+1,j,k-1} + \\ & + U_{i-1,j,k+1} + U_{i-1,j,k-1}) + [5(\beta + \gamma) - 4](U_{i,j+1,k+1} + \\ & + U_{i,j+1,k-1} + U_{i,j-1,k+1} + U_{i,j-1,k-1}) + 2(U_{i+1,j+1,k+1} + \\ & + U_{i+1,j+1,k-1} + U_{i-1,j+1,k+1} + U_{i+1,j-1,k+1} + U_{i-1,j-1,k+1} + \\ & + U_{i-1,j+1,k-1} + U_{i+1,j-1,k-1} + U_{i-1,j-1,k-1}) - \\ & - 16[1 + 5(\alpha + \beta + \gamma)]U_{i,j,k} \end{aligned} \right\} = f_{i,j,k}$$

Для $k = l = 0$ дана різницева схема на кубічній сітці має другий порядок точності, для $k = \frac{1}{6}, l = 0$ – четвертий, а для $k = \frac{1}{6}, l = \frac{1}{30}$ - шостий.

1. Самарский А.А. Теория разностних схем.-М.: Наука, 1989.-616с.

УДК 536.241

Л.М. Дяконюк, Я.Г. Савула

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОПЕРЕНЕСЕННЯ У ШАРІ З ТОНКИМ ПОКРИТТЯМ

Розглянемо ізотропний шар постійної товщини H з тонким покриттям, товщина якого h є малою в порівнянні з H. Теплофізичні характеристики покриття і шару є різними. Вважатимемо, що між покриттям і пластиною існує ідеальний тепловий контакт, бічна поверхня теплоізольована, а на верхній і нижній лицевій поверхні заданий теплообмін за Ньютоном.

Потрібно знайти функцію розподілу температури, вважаючи відомим розподіл в початковий момент часу.

Для математичного моделювання даної задачі використаємо некласичну комбіновану модель, яка враховує малість товщини покриття, що є особливо важливим для застосування чисельних методів. Для її побудови використано припущення, що функція розподілу температури в покритті змінюється за лінійним законом по товщині. Отримана модель складається з системи диференціальних рівнянь, що містять диференціальні оператори різної вимірності за просторовими змінними. Детальний опис даної моделі та її дослідження зроблені в роботах [1,2].

Для чисельного аналізу задачі використовуємо напіваналітичний метод скінченних елементів, з розкладом функції температури в шарі в ряд по товщині за функціями Бабушки [3] та МСЕ з двовимірними ізопараметричними квадратичними апроксимаціями за двома іншими просторовими координатами.