вигляду $v_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\varphi_k(y)$. Нехай для деякої функції $u_n(x,y)\in H_n \cap H_A$ справджується тотожність

$$[u_n, v_n]=(f, v_n),$$

в якій $v_n(x,y)$ – довільна функція з $H_n \cap H_A$. Тоді функція $u_n(x,y)$ називається узагальненим розв'язком методу Канторовича (10) – (12).

Аналогічно, як і в праці [1] доводиться наступна теорема.

Теорема. *При довільній функції $f(x,y)\in H$ задача (1) – (3) має єдиний узагальнений розв'язок $u(x,y)\in H_A$; при довільному n система методу Канторовича (10) – (12) має єдиний узагальнений розв'язок $u_n(x,y)\in H_n \cap H_A$, який збігається до розв'язку задачі (1) – (3) і швидкість збіжності характеризується оцінкою*

$$|u-u_n|_A \le |u-v_n|_A,$$

де елемент $v_n \in H_n \cap H_A$ такий, що реалізує мінімум функціонала $|u-v_n|_A$.

Зауважимо, що координатну систему функцій $\{\varphi_k(y)\}$ можна, наприклад, вибирати наступним чином

$$\varphi_k(y)=y^2(y-b)^2 y^{k-1}, \quad k=1,2,\dots$$

1. Лучка А.Ю., Жук М.В. Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа. Сб. "Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений". К., 1975. С. 84 – 98.

УДК 519.6

П.Ф. Завгородній, А.П. Власюк, О.Ю. Тимейчук

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ОРЕБРЕННЯ ПОВЕРХНІ ФОРМИ НА ПРОЦЕС ЛИТТЯ

Оребрення поверхні форми є одним з основних шляхів інтенсифікації теплопередачі. В ідеально виконаній формі формуючі поверхні мають ізотермічне поле температур. Необхідно зауважити, що ребра різної геометрії і теплопровідності по - різному впливають на процес лиття навіть в однакових умовах при однорідних джерелах теплоти.

Рівномірного розподілу температури у формі можна досягти за рахунок поперечних (радіальних) ребер. Поздовжні ребра дозволяють збільшити тепловіддачу з поверхні конструкції.

З метою оптимізації теплового режиму роботи для лиття нами була запропонована конструкція форми з радіальними та поздовжніми ребрами.

Математична модель оребрення. Математична модель теплових процесів, які відбуваються в радіальному ребрі, можна описати диференціальним рівнянням 2- го порядку

$$\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{R-2r}{r(R-r)}\frac{d\theta}{dr}-\frac{\alpha\theta}{\lambda(R-r)\sin\varphi}=0 \tag{1}$$

з такими граничними умовами:

$$\theta\big|_{r=r_1}=\theta_1 \ , \quad \frac{d\theta}{dr}\bigg|_{r=r_2}=-\frac{\alpha}{\lambda}\cdot\theta \ , \tag{2}$$

де θ - температурний напір в основі ребра; r - радіальна змінна; r_1 та r_2 - зовнішні радіуси форми відповідно без врахування та з врахуванням радіального ребра; λ - коефіцієнт теплопровідності; α - коефіцієнт тепловіддачі; 2φ - кут, під яким виготовлено радіальне ребро.

Розв'язок крайової задачі (1), (2) має вигляд

$$\theta(r)=C_1\cdot y_1(r/R)+C_2\cdot y_2(r/R)\ , \tag{3}$$

де

$$y_1(r/R)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}C_\kappa^{(1)}\cdot(r/R)^\kappa\ ,$$

$$y_2(r/R)=y_1(r/R)\cdot\ln(r/R)+\sum_{\kappa=0}^{\infty}C_\kappa^{(2)}\cdot(r/R)^\kappa\ ,$$

$$C_1=\frac{\theta_1\cdot b_2}{a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1}\ , \qquad C_2=\frac{-\theta_1\cdot a_2}{a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1}\ ,$$

$$a_1=y_1(r_1/R)\ , \qquad a_2=y_1'(r_2/R)+\alpha/\lambda\cdot y_1(r_2/R)$$

$$b_1=y_2(r_1/R)\ , \qquad b_2=y_2'(r_2/R)+\alpha/\lambda\cdot y_2(r_2/R)\ .$$

Значення температурного напору в ребрі дорівнює

$$\theta=\frac{\theta_1}{a_1b_2-a_2b_1}\cdot\big(b_2\cdot y_1(r/R)-a_2\cdot y_2(r/R)\big)\ . \tag{4}$$

Тоді тепловіддача від радіальних ребер обчислюється за формулою

$$Q_{pp} = -\frac{\lambda}{R} \cdot \theta_1 \cdot E_{pp} \cdot f_{pp} \cdot n_{pp}, \tag{5}$$

де $E_{pp} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \cdot \left[b_2 \cdot y_1^{©}(r/R) - a_2 \cdot y_2^{©}(r/R) \right]$ – безрозмірний комплекс ефективності впливу радіальних ребер на тепловий потік.

Аналогічно розраховується теплообмін з врахуванням поздовжніх ребер, який описується диференціальним рівнянням 2-го порядку

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\theta}{dr} - \frac{\alpha_p \cdot n \cdot \theta}{\pi \cdot \lambda \cdot r \cdot \cos\varphi} = 0 \tag{6}$$

з наступними граничними умовами:

$$\theta\big|_{r=r_1} = \theta_1 = t_1 - t_p \quad , -\lambda \frac{d\theta}{dr}\bigg|_{r=r_2} = \alpha_l \cdot \theta_l\big|_{r=r_2}, \tag{7}$$

де $F_l = 2\pi r l / n$, n - кількість ребер, l -довжина ребра.

Ввівши координату $z = (\alpha_p \cdot n \cdot r)/(\pi \cdot \lambda \cdot \cos\varphi)$, рівняння (6) зведемо до рівняння Бесселя

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d\theta}{dz} - \frac{\theta}{z} = 0, \tag{8}$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$\theta = C_1 \cdot I_0(2 \cdot \sqrt{z}) + C_2 \cdot K_0(2 \cdot \sqrt{z}), \tag{9}$$

де I_0, K_0 - модифіковані функції Бесселя першого та другого роду нульового порядку; C_1, C_2 - константи.

Використавши граничні умови (7), отримаємо розподіл температур в поздовжніх ребрах

$$\theta = \theta_1 \frac{\lambda \cdot \sqrt{z_2} \cdot K_1(2 \cdot \sqrt{z_2}) \cdot I_0(2 \cdot \sqrt{z}) - \alpha_l \cdot r_2 \cdot K_0(2 \cdot \sqrt{z_2}) \cdot I_0(2 \cdot \sqrt{z})}{P} +$$

$$+ \frac{\lambda \cdot \sqrt{z_2} \cdot I_1(2 \cdot \sqrt{z_2}) \cdot K_0 \cdot (2 \cdot \sqrt{z}) + \alpha_l \cdot r_2 \cdot I_0(2 \cdot \sqrt{z_2}) \cdot K_0(2 \cdot \sqrt{z})}{P}.$$

(10)

Тоді тепловий потік від поздовжніх ребер дорівнює

$$\theta_p = -\lambda \cdot \frac{d\theta}{dr}\bigg|_{r=r_1} f = -2\pi r_1 l \lambda \frac{d\theta}{dr}\bigg|_{r=r_1}, \tag{11}$$

де

$$\left.\frac{d\theta}{dr}\right|_{r=r_1} = -\theta_1 \frac{\sqrt{z_1}}{r_1}\left(\frac{\lambda \cdot \sqrt{z_2} \cdot K_1(2\cdot\sqrt{z_2})\cdot I_1(2\cdot\sqrt{z_1})}{P} - \right.$$

$$-\frac{\alpha_l \cdot r_2 \cdot K_0(2\cdot\sqrt{z_2})\cdot I_1(2\cdot\sqrt{z_1})}{P} - \frac{\lambda \cdot \sqrt{z_2} \cdot K_1(2\cdot\sqrt{z_1})\cdot I_1(2\cdot\sqrt{z_2})}{P} -$$

$$\left. -\frac{\alpha_l \cdot r_2 \cdot I_0(2\cdot\sqrt{z_2})\cdot K_1(2\cdot\sqrt{z_1})}{P} \right). \tag{12}$$

Використовуючи результати чисельно-аналітичного моделювання, отримали рівняння сумарного теплового балансу від усієї поверхні форми. На основі проведеного математичного моделювання сконструйовано форму для лиття неметалів з певною кількістю поздовжніх та радіальних ребер, для якої розподіл температур має рівномірний характер, тобто тепловий режим роботи такої форми оптимальний.

УДК 519:6

К.С. Іванків, М.В. Щербатий

ДО ПИТАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСАМИ ПРОТІКАННЯ ІНФЕКЦІЙНИХ ЗАХВОРЮВАНЬ

Успішне застосування методів математичного моделювання у клінічній практиці тісно пов'язане із створенням ефективних алгоритмів і програм, які дозволяють здійснювати числове дослідження створених моделей, проводити статистичну оцінку їх параметрів, знаходити оптимальні керування процесами, що досліджуються.

Аналіз математичних моделей інфекційних захворювань [1,5] дають основу для постановок змістовних задач оптимального керування імунофізіологічними процесами у живому організмі з метою обгрунтування рекомендацій до вибору найбільш адекватного лікування хворого.