

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=r_1} = -\theta_1 \frac{\sqrt{z_1}}{r_1} \left(\frac{\lambda \cdot \sqrt{z_2} \cdot K_1(2 \cdot \sqrt{z_2}) \cdot I_1(2 \cdot \sqrt{z_1})}{P} - \frac{\alpha_l \cdot r_2 \cdot K_0(2 \cdot \sqrt{z_2}) \cdot I_1(2 \cdot \sqrt{z_1})}{P} - \frac{\lambda \cdot \sqrt{z_2} \cdot K_1(2 \cdot \sqrt{z_1}) \cdot I_1(2 \cdot \sqrt{z_2})}{P} - \frac{\alpha_l \cdot r_2 \cdot I_0(2 \cdot \sqrt{z_2}) \cdot K_1(2 \cdot \sqrt{z_1})}{P} \right). \quad (12)$$

Використовуючи результати чисельно-аналітичного моделювання, отримали рівняння сумарного теплового балансу від усієї поверхні форми. На основі проведеного математичного моделювання сконструйовано форму для лиття неметалів з певною кількістю поздовжніх та радіальних ребер, для якої розподіл температур має рівномірний характер, тобто тепловий режим роботи такої форми оптимальний.

УДК 519:6

К.С. Іванків, М.В. Щербатий

ДО ПИТАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСАМИ ПРОТІКАННЯ ІНФЕКЦІЙНИХ ЗАХВОРЮВАНЬ

Успішне застосування методів математичного моделювання у клінічній практиці тісно пов'язане із створенням ефективних алгоритмів і програм, які дозволяють здійснювати числове дослідження створених моделей, проводити статистичну оцінку їх параметрів, знаходити оптимальні керування процесами, що досліджуються.

Аналіз математичних моделей інфекційних захворювань [1,5] дають основу для постановок змістовних задач оптимального керування імунофізіологічними процесами у живому організмі з метою обґрунтування рекомендацій до вибору найбільш адекватного лікування хворого.

Складність процесів, що проходять у живому організмі [4] не дозволяють однозначно вибрати критерій оптимального керування лікуванням, виходячи із практичних міркувань. Результати, отримані у [2, 3] показують, що можна запропонувати такий критерій, який добре узгоджується з досвідом застосування індексів важкості [2] у клінічній практиці і пов'язаний із забезпеченням стійкого стану здорового організму.

1. Опис моделі інфекційного захворювання з врахуванням температури.

В даній роботі для моделювання інфекційних захворювань використовуються моделі, запропоновані групою математиків і клініцистів під керівництвом Г.І.Марчука [1]. Ці моделі при різних значеннях параметрів відображають чотири основні форми захворювань: субклінічну, гостру, хронічну і летальний наслідок. В математичному плані розглядувані моделі є задачами Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь із запізненням.

Розглянемо, наприклад, модель інфекційного захворювання, яка враховує температурну реакцію організму [1]:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= (\beta(T) - \nu F)V, \\ \frac{dF}{dt} &= \rho C - \eta \nu FV - \mu_f F, \\ \frac{dC}{dt} &= \xi(m)\alpha(T)F(t-\tau)V(t-\tau) - \mu_c(C - C^*), \\ \frac{dm}{dt} &= \sigma V - \mu_m m, \quad t \in [t_0, t_e] \\ \frac{dT}{dt} &= K_T(FV - (FV)^*)\theta(FV - (FV)^*) - \mu_T(T - T^*)\end{aligned}\tag{1}$$

з початковими умовами в точці $t = t_0$ і на інтервалі запізнення $t \in [t_0 - \tau, t_0]$

$$V(t) = V_0, F(t) = F_0, C(t_0) = C_0, m(t_0) = m_0, T(t_0) = T_0\tag{2}$$

Основними характеристиками інфекційного захворювання є: $V(t)$ - концентрація (кількість) вірусів; $F(t)$ - концентрація антитіл; $C(t)$ - концентрація плазмоклітин (виробників антитіл); $m(t)$ - відносна характеристика пораненого органу; ($m = 1 - M'/M$, де M, M' - характеристика здорового органу і здорової частини пораненого органу відповідно (маса або площа)); $T(t)$ - температура

організму. Величини $\beta, \nu, \rho, \eta, \mu_f, \alpha, \mu_c, \tau, \mu_m, k_T, \mu_T$ є вхідними параметрами моделі і характеризують як здатність вірусів розмножуватись в організмі, так і здатність організму протистояти розмноженню.

Функції $\beta(T), \alpha(T)$, які характеризують темпи розмноження вірусів і коефіцієнт стимуляції імунної системи відповідно вибираються у вигляді

$$\begin{aligned}\beta(T) &= \beta_0 / (1 + a(T - T^*)), \\ \alpha(T) &= \alpha_0 / (1 + b(T - T^*)),\end{aligned}\quad (3)$$

α_0, β_0 - значення відповідних коефіцієнтів при нормальній температурі $T = T^* = 36,6^\circ \text{C}$, $a > 0, b > 0$ - деякі параметри.

2. Критерій оптимізації.

Вхідні параметри моделі утворюють вектор керувань, який позначимо

$$u = u(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)\}, \quad u \in U, \quad (4)$$

де U область допустимих керувань, що враховує додаткові обмеження, які накладаються, наприклад, на фізіологічно допустимі дози застосування деяких препаратів, невід'ємність ряду керувань та ін.

Наведемо декілька функціоналів, які можна використовувати як критерій оптимізації процесом протікання інфекційних захворювань.

Функціонал

$$I(u) = \int_0^\infty m(u(t), t) dt \rightarrow \min_{u \in U} \quad (5)$$

дає керування гладким проходженням захворювання, що є найбільш бажаний результат лікування [2].

Введемо величину

$$J(u, t_1, t_2) = \frac{\ln(m(u(t_1), t_1) / m(u(t_2), t_2))}{t_2 - t_1}, \quad (6)$$

$$u = u(t) \in U,$$

яка називається середнім темпом функціонального відновлення на інтервалі часу $0 \leq t_1 < t_2 < +\infty$. Можна розглядати вибір оптимального керування процесом (1)-(2), як задачу максимізації середнього темпу функціонального відновлення (6) на інтервалі часу (t_1, t_2) .

Степінь збалансованості різних ланок імунної системи і її резервні можливості пропонуються [3] характеризувати функціоналом

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} V(t) dt / (t_{\max} - t_0) \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt + S_0 \quad (7)$$

де $t_{\max}$ - час досягнення максимуму концентрації антитіл, S_0 - деякий параметр.

Функціонал (7) носить назву індексу імунного статусу організму і може вибиратись в ролі критерію оптимальності при керуванні імунного відповіддю організму.

Проведені нами числові експерименти при різних значеннях вхідних параметрів моделі (1)-(2) дозволяють відображати різні форми протікання інфекційних захворювань і вказують на можливість добитися відповідного ефекту при лікуванні цих захворювань.

1. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. - М.: Наука, 1980. - 264 с. 2. Погочев И.Б. Применение математических моделей заболеваний в клинической практике. - М.: Наука, 1988. - 192 с. 3. Сергиенко И.В., Яненко В.М., Ажаев К.Л. Оптимальное управление иммунным ответом, синхронизирующее отдельные звенья иммунной системы. II. Идентификация параметров модели и восстановление пропущенных данных. //Кибернетика и системн. анализ. - 1997. - № 1. - С. 161-186. 4. Петров Р.В. Иммунология. - М.: Медицина, 1987. - 415 с. 5. Prikrlyova D., Jilek M., Waniewski J. Mathematical modelling of the immuno response/- Boea Kation, Usa: CRC press Inc., 1992-210 p.

УДК 539.3

Н.В. Иванова

ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ ДЕФОРМУВАННЯ ЗСУВНИХ ОБОЛОНОК

Використання певних гіпотез дає змогу замість тривимірної задачі теорії пружності наближено розглядати двовимірні задачі теорії оболонок. Один з можливих шляхів оцінювання придатності наближених теорій оболонок полягає у порівнянні отриманих на їх основі результатів з розв'язками тривимірних задач. У даній праці