УДК 519.6

А.І. Кардаш

РОЗПАРАЛЕЛЮВАННЯ МЕТОДУ ПРОСТОЇ ІТЕРАЦІЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР

Розглянемо реалізацію методу простої ітерації на спеціальній обчислювальній системі, яка складається з n процесорів, де n — розмірність системи алгебраїчних рівнянь.

Побудуємо процес обчислень так, що кожен процесор обчислює $x_i^{(k)}$ (i = 1,...,n). Тоді на першому кроці з першого процесора р буде передаватись число $x_1^{(k-1)}$ у всі інші. На другому кроці обчислюються добутки

$$e_{i1}^{(k)} = \alpha_{i1} x_1^{(k-1)},\ (i = 1,...,n),$$

а на третьому – суми:

$$s_{i1}^{(k)} = \beta_i + e_{i1}^{(k)},\ (i = 1,...,n).$$

Потім у всі процесори передається число $x_2^{(k-1)}$ і знову обчислюються добутки

$$e_{i2}^{(k)} = \alpha_{12} x_2^{(k-1)},\ (i = 1,...,n)$$

та суми

$$s_{i2}^{(k)} = s_{i1}^{(k)} + e_{i2}^{(k)},\ (i = 1,...,n)$$

і так далі.

Після 3n кроків одержимо

$$x_i^{(k)} = s_{in}^{(k)},\ (i = 1,...,n);$$

далі обчислюємо

$$\Delta x_i^{(k)} = \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|,\ (i = 1,...,n)$$

і після порівняння з ε здійснюємо умовний перехід.

Загальне число кроків для кожного наближення при такому розпаралелюванні буде наступне:

$$T_n = 3n + 2.$$

Число операцій, які необхідно виконати при послідовній реалізації алгоритму буде рівне

$$T_1 = 2n^2 + 2n\,.$$

Тоді прискорення виконання алгоритму при переході від послідовного розв'язування до паралельного на n процесорах буде:

$$S_n = T_1 / T_n = (2n^2 + 2n) / (3n + 2) = 2n / 3 + o(1),$$

а ефективність:

$$E_n = S_n / n = 2 / 3.$$

Якщо передбачити можливість суміщення пересилки числа з обчислювальними операціями, то

$$T_n = 2n + 2,$$

$$S_n = (2n^2 + 2n) / (2n + 2) = n.$$

Тоді $E_n = 1$.

На кожному кроці працюють всі процесори і досягається досить висока ефективність.

Ціна алгоритму:

$$C_n = nT_n = (2n + 2)n = 2n(n + 1).$$

Цінність алгоритму:

$$F_n = S_n / C_n = n / 2n(n + 1) = 1 / 2(n + 1).$$

Розглянемо реалізацію методу простої ітерації на систолічних структурах для системи рівнянь 3-го порядку (для простоти викладу). В цьому випадку формули ітераційного процесу матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \alpha_{11} x_1^{(k)} + \alpha_{12} x_2^{(k)} + \alpha_{13} x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k)} + \alpha_{22} x_2^{(k)} + \alpha_{23} x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \beta_3 + \alpha_{31} x_1^{(k)} + \alpha_{32} x_2^{(k)} + \alpha_{33} x_3^{(k)} \end{cases}.$$

На рис. 1 приведено систолічний масив для даної системи. В ньому використовуються два типи систоличних комірок:

- базова, яка виконує операцію множення з додаванням, а також передає інформацію;
- логічна, яка перевіряє умову, виробляє ознаку результату і передає інформацію.

На цій систоличній структурі для системи 3-го порядку одна ітерація здійснюється за чотири такти. Тут використовується 12 систолічних комірок, з яких 9 — базових і 3 логічні. Для системи рівнянь n-го порядку буде задіяно n(1+n) комірок. Із яких n×n базових і n логічних. Число тактів однієї ітерації буде рівне n+1.

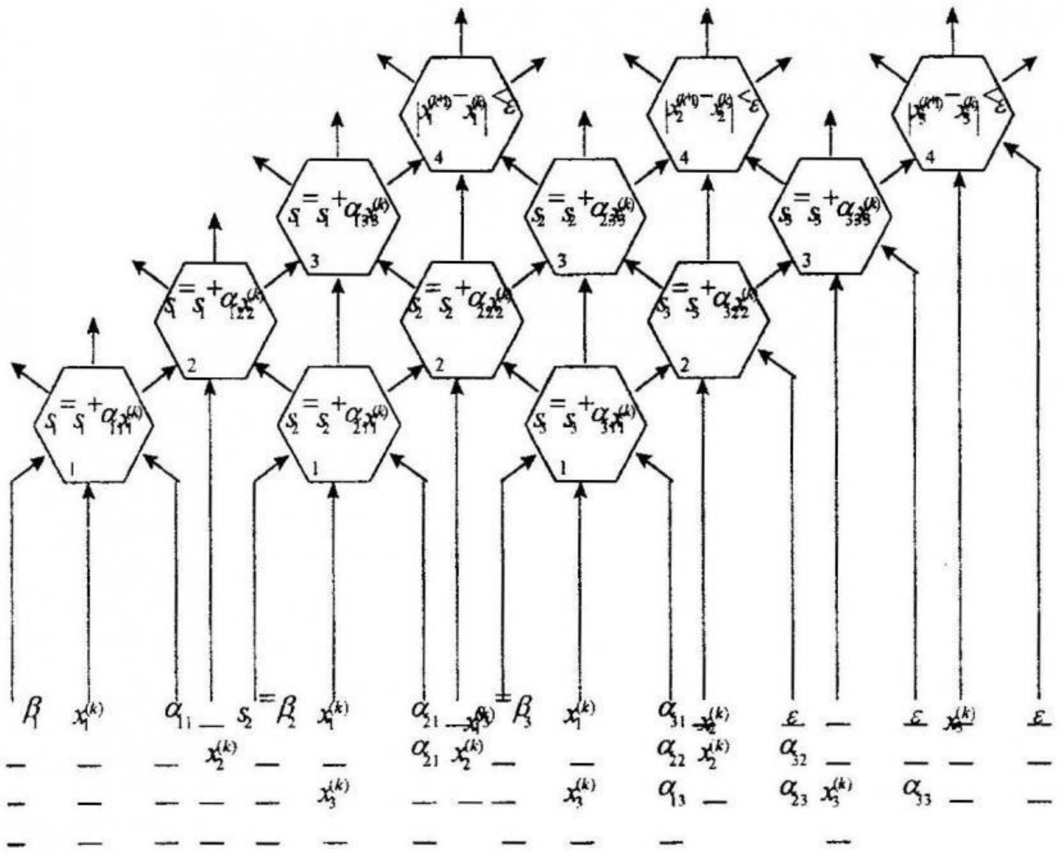

Рис. 1.

1. Воеводин В.В. Математические модели и методы в параллельных процессах. - М.: Наука, 1986. - 296 с. 2. Program simulation of parallel algorithms of the numerical analysis. A.I.Kardash, V.V.Chernyahovskyi, I.I.Chulyk. //Mathematical Modelling and Applied Mathematics. A.A.Samarskii and M.P.Sapogovas (Editors). Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland). 1992. IMACS. P. 253-259.

УДК 519.6

А.І. Кардаш, І.І. Чулик

РОЗПАРАЛЕЛЮВАННЯ МЕТОДУ ЗЕЙДЕЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо процес розпаралелювання алгоритму методу Зейделя на спеціальній обчислювальній системі, яка складається з n процесорів.