засобів показав недоцільність їх використання для поставленої задачі через велику громіздкість, зумовлену універсальністю; недостатність інтерфейсу і зручності використання; неефективність розв'язування спеціалізованих задач; неспроможність обробляти великі арифметичні вирази. У зв'язку з цим розроблено спеціалізовані засоби для аналітичних перетворень.

Для побудови передавальних функцій нечітких систем розроблено програмну систему, написану мовою Pascal компілятора Delphi. Структура нечіткої системи задається K-списком разом зі степенями чіткості зв'язків. Розроблена система використовує всі можливості багатовіконного середовища Windows, забезпечує перегляд структури і використання допомог. Її можна використовувати для систем, у яких розмір аналітичного виразу чисельника і знаменника передавальної функції не перевищує 65 тис. символів.

УДК 519.6:517.925

Ю.С. Козаревська, Я.В. Кондратюк, О.Й. Піскозуб,
Г.А. Шинкаренко

АДАПТИВНА СТАБІЛІЗАЦІЯ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ МІГРАЦІЇ ДОМІШОК

В останні роки побудовано ряд ефективних схем методу скінченних елементів для розв'язування крайових задач міграції домішок вигляду

$$\begin{cases} L\psi := w\cdot\nabla\psi - \nabla\cdot(\mu\nabla\psi) + \sigma\psi = f & \text{в } \Omega \\ \psi = 0 & \text{на } \Gamma := \partial\Omega. \end{cases} \qquad (1)$$

За допомогою стабілізуючих властивостей протипотокових схем або функцій-бульбашок апроксимації МСЕ уникають нефізичної поведінки при домінуванні перенесення в процесі міграції. Добре відомо, що у цьому випадку штучні осциляції породжуються примежовими та/або внутрішніми шарами і завдяки вектору w поширюються над усією областю Ω.

Мета даної праці – покращити властивості апроксимацій МСЕ за допомогою адаптивного триангулювання області Ω, здатного виявити та локалізувати згадані шари в задачах мігрування домішок.

1. Для відшукання наближеного розв'язку задачі (1) скористаємось класичною процедурою Гальоркіна:

$$\begin{cases} \textit{знайти}\ \psi_h \in V_h \subset V = H_0^1(\Omega),\ \dim V_h < +\infty\ \textit{таку, що} \\ b(w;\psi_h,\varphi) + a(\psi_h,\varphi) = < l,\varphi > \qquad \forall \varphi \in V_h , \end{cases} \tag{2}$$

де

$$\begin{cases} b(w;\psi_h,\varphi) := \int\limits_\Omega \psi_h w \cdot \nabla\varphi dx \\ a(\psi_h,\varphi) := \int\limits_\Omega \{\mu\nabla\varphi\cdot\nabla\psi_h + \sigma\psi_h\varphi\} dx, \qquad \forall \psi_h,\varphi \in V \\ < f,\varphi > := (f,\varphi)_\Omega := \int\limits_\Omega f\varphi dx . \end{cases} \tag{3}$$

Надалі будемо вважати, що простори апроксимацій V_h будуються наступним чином. Нехай $\mathrm{T}_h := \{\mathrm{K}\}$ - триангуляція області Ω зі скінченними елементами K, $h_\mathrm{K} := diam\,\mathrm{K}$, $h := \max h_\mathrm{K}$. Тоді простір V_h формується із неперервних обмежених функцій, які є поліномами заданого порядку p на кожному скінченному елементі, тобто,

$$V_h := \{\psi \in V \,|\, v \quad |_\mathrm{K} - \textit{поліном } p - \textit{го порядку}\ \forall \mathrm{K} \in \mathrm{T}_h \} . \tag{4}$$

2. Рекурентна процедура побудови просторів V_h з наступним розв'язуванням задачі (2) побудована на аналізі норм розв'язків ψ_h

$$|\psi_h|_\mathrm{K} := \left\{ \int\limits_\mathrm{K} \left(\psi_h^2 + |\nabla\psi_h|^2\right) dx \right\}^{1/2} . \tag{5}$$

Наведений нижче алгоритм адаптивного триангулювання області передбачає покрокове виконання наступної процедури. Нехай вихідна триангуляція T_h^j містить N^j скінченних елементів K, $j = 0$.

(I) Знайдемо розв'язок $\psi_h^j \in V_h^j$ задачі (2) і обчислимо $\rho(\psi_h^j) := |\psi_h^j|_\Omega / N^j$.

(II) Кожен скінченний елемент K , який задовольняє умову

$$|\psi_h^j|_\mathrm{K} > \rho(\psi_h^j) \tag{7}$$

поділяється (додаванням нових розрахункових вузлів) на M елементів нової триангуляції. Такий перегляд усіх скінченних елементів із T_h^j і відповідна їх модифікація згідно з критерієм (7) породжує нову триангуляцію T_h^{j+1}. Якщо $T_h^{j+1} = T_h^j$, то процес рекурентного адаптування триангуляції вважається завершеним і за остаточно уточнений розв'язок приймається ψ_h^j.

(III) Якщо ж $T_h^{j+1} \neq T_h^j$, то нова триангуляція тестується згідно з критерієм

$$\min_{K \in T_h^{j+1}} h_K \leq h_* = const > 0\,. \tag{8}$$

Виконання цієї умови хоча б одним скінченним елементом із новоствореної T_h^{j+1} сигналізує про надмірне згущення сітки скінченних елементів і прийняття додаткових рішень стосовно доцільності продовження процесу адаптування.

(IV) Якщо елементи T_h^{j+1} не задовольняють умову (8), то обчислюється наступне наближення $\psi_h^{j+1} \in V_h^{j+1}$ до розв'язку задачі (2).

Виконання умови $\left(\left|\psi_h^{j+1}\right|_\Omega - \left|\psi_h^j\right|_\Omega\right) / \left|\psi_h^j\right|_\Omega \leq \varepsilon_* = const$ свідчить про незначне уточнення розв'язку та його градієнту на останньому кроці адаптування сітки і вимагає переривання даного алгоритму.

3. Запропонований алгоритм було застосовано до наступної одновимірної стаціонарної задачі мігрування домішки

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 10^4 \frac{\partial \psi}{\partial x} = 3 \cdot 10^4 x^2 \qquad \forall x \in (0,1), \qquad\qquad \psi(0) = \psi(1) = 0.$$

Нижче наведено таблицю поведінки середніх значень відносної похибки $\delta^j = \sum_i \left|\psi\left(x^j\right) - \psi_h\left(x_i^j\right)\right| \big/ N^j$ розв'язків, отриманих на кожній ітерації адаптивного згущення вихідної рівномірної скінченноелементної сітки з використанням різних типів просторів апроксимацій V_h^j при M=2 та $h_* = 0.00001$.

Апроксим. на скінч. елем.	лінійна		квадратична		кубічна ермітова неперервна		кубічна ермітова неперервно диференційована	
Номер ітерації	N^j	δ^j %	N^j	δ^j %	N^j	δ^j %	N^j	δ^j %
0	20	485563.6	20	2542.0692	20	53893.5981	20	19940.2
1	30	114432.9	29	562.9214	28	8582.0931	22	123004.4
2	47	8240.461	41	74.5692	37	437.2901	25	710787.7
3	63	1624.905	51	12.6308	44	11.5732	30	2485122
4	79	66.172	59	3.9809	48	1.9068	37	285431.3
5	90	10.931	64	1.5709	51	0.5508	42	12337.26
6	97	7.3304	67	0.6135	53	0.1042	45	336.233
7	101	6.0979	69	0.2811	54	0.0095	47	6.7618
8	103	5.6625	70	0.2048	55	0.0007	48	0.92
9			72	0.1873	56	0.0003		

УДК 519.6

М.Ф. Копитко

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ ПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ШАРУВАТИХ ТІЛ

Широке використання композиційних матеріалів для виготовлення конструктивних елементів різноманітних приладів і механізмів привело до появи багатьох нових і розвитку відомих підходів до розв'язування задач визначення їх напружено-деформованого стану. Згадані елементи, являють собою переважно багатошарові тонкостінні пластини або оболонки, матеріал кожного шару яких є композитом, армованим односпрямованими волокнами. У зв'язку з невеликою відносною товщиною конструктивного елемента і наявністю в пакеті декількох ще тонших шарів застосування чисельних методів до розв'язування задачі в рамках теорії пружності стає в цьому випадку дуже проблематичним. Тому